JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. GRAINDORGE

Note sur l'intégration d'une certaine classe d'équations aux dérivées partielles du second ordre

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 17 (1872), p. 426-432.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1872_2_17__426_0>

Note sur l'intégration d'une certaine classe d'équations aux dérivées partielles du second ordre;

Par J. GRAINDORGE,

Docteur ès sciences, Répétiteur à l'Université de Liége.

Dans un Mémoire publié en 1784 [*], Monge a considéré l'équation du second ordre

$$(1) \qquad \mathrm{R}r + \mathrm{S}s + \mathrm{T}t = \mathrm{U},$$

R, S, T, U étant des fonctions de x, y, z, p, q.

Il énonce le théorème suivant :

Soient

$$f_1 = a_1, \quad f_2 = a_2$$

deux intégrales satisfaisant aux équations

$$(2) \qquad \begin{cases} dy - m\,dx = 0, \\ \mathrm{R}m\,dp + \mathrm{T}\,dq - \mathrm{U}m\,dx = 0, \end{cases}$$

dans lesquelles m est l'une des racines de l'équation

$$(3) \qquad \mathrm{R}m^2 - \mathrm{S}m + \mathrm{T} = 0;$$

l'équation

$$f_1 = \varphi(f_2)$$

sera une intégrale première de la proposée.

Si donc m' et m'' sont les deux racines de l'équation (3), on obtient

[*] *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1784, p. 128.

deux intégrales du premier ordre de l'équation (1), et l'on peut facilement en déduire l'intégrale générale.

Monge n'a pas appliqué sa méthode, ni aucun géomètre après lui, aux cas particuliers où l'une quelconque, ou bien deux des dérivées du second ordre r, s, t ne figurent pas dans la proposée. Il n'est cependant pas difficile d'éviter, par un artifice bien simple, les résultats illusoires que présente alors le procédé de Monge. C'est ce que je me propose de montrer dans cette Note.

1° Si $R = 0$, l'équation (1) devient

$$Ss + Tt = U. \tag{4}$$

Dans ce cas, l'équation (3), qui donne, en général,

$$m = \frac{S \pm \sqrt{S^2 - 4RT}}{2R}, \tag{5}$$

se réduit à la suivante :

$$Sm - T = 0.$$

On en déduit

$$m = \frac{T}{S}.$$

Cette valeur de m nous donne, pour les équations (2),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{T}{S}, \quad T dq - U dy = 0. \tag{6}$$

Quant à la seconde valeur de m, elle est, comme on le sait, infinie, et donne des résultats illusoires.

Mais on peut transformer les équations (2) de la manière suivante.

Observons d'abord que, pour $m = \infty$, on a

$$\frac{1}{m} = \frac{dx}{dy} = 0, \quad \text{ou} \quad dx = 0.$$

En outre, de (5) on tire, pour la valeur correspondante,

$$Rm = \frac{S + \sqrt{S^2 - 4RT}}{2},$$

et pour $R = 0$, il vient

$$\lim Rm = S.$$

On a ainsi le nouveau système

$$(7) \qquad dx = 0, \quad S dp + T dq - U dy = 0.$$

2° Lorsque $T = 0$, l'équation (1) devient

$$(8) \qquad Rr + Ss \mp U.$$

On a alors, d'après (3),

$$m = 0, \quad m = \frac{S}{R}.$$

De la valeur $m = \frac{S}{R}$, on déduit

$$(9) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{S}{R}, \quad S dp - U dy = 0.$$

La valeur $m = 0$ donne

$$dy = 0,$$

et la seconde des équations (2) est illusoire.

Mais de

$$m = \frac{S - \sqrt{S^2 - 4RT}}{2R},$$

on conclut

$$\frac{T}{m} = \frac{S + \sqrt{S^2 - 4RT}}{2};$$

en faisant $T = 0$, on a

$$\lim \frac{T}{m} = S.$$

La seconde équation (2) donne alors

$$R dp + S dq - U dx = 0,$$

et l'on a le système

$$(10) \qquad dy = 0, \quad R dp + S dq - U dx = 0.$$

3° Lorsque $R = 0$, $T = 0$, l'équation (1) se réduit à la suivante :

$$(11) \qquad Ss = U.$$

Les deux systèmes compris dans (2) deviennent alors

$$(12) \qquad \begin{cases} dx = 0, & S dp - U dy = 0, \\ dy = 0, & S dq - U dx = 0. \end{cases}$$

Remarque. — On pourrait d'ailleurs trouver ces deux relations, ainsi que les précédentes, en remplaçant s par sa valeur déduite des équations

$$(13) \qquad \begin{cases} dp = r dx + s dy, \\ dq = s dx + t dy. \end{cases}$$

Tirant s de la première, et substituant dans (11), on a

$$S dp - S r dx = U dy;$$

d'où

$$S dp = U dy,$$
$$dx = 0.$$

De même, en substituant dans (11) la valeur de s tirée de la seconde équation (13), il vient

$$S dq - S t dy = U dx.$$

Par suite,

$$S dq = U dx,$$
$$dy = 0.$$

Application. — Soit l'équation du second ordre

$$(14) \qquad pqr - (1 + p^2) s = 0,$$

qui appartient aux surfaces dont les lignes de l'une des courbures sont situées dans des plans parallèles au plan des zx.

Cette équation est de la forme (8) : les deux systèmes (9) et (10) nous donnent

$$\text{(I)} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1+p^2}{pq}, \quad dp = 0;$$

$$\text{(II)} \qquad dy = 0, \quad pq\,dp - (1+p^2)\,dq = 0.$$

Or du système (II) on tire facilement

$$y = \text{const.},$$
$$\beta\sqrt{1+p^2} = q.$$

Par conséquent, l'équation

$$\text{(15)} \qquad q = \sqrt{1+p^2}\,f'(y)$$

sera une première intégrale intermédiaire de l'équation (14).

D'un autre côté, le système (I) nous donne

$$dp = 0 \quad \text{ou} \quad p = \alpha.$$

En combinant cette dernière équation avec les relations

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1+\alpha^2}{\alpha q},$$
$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

on obtient

$$\alpha\,dz + dx = 0;$$

d'où

$$\alpha z + x = \beta.$$

Par suite, l'équation

$$\text{(16)} \qquad x + pz = \varphi(p),$$

sera une seconde intégrale intermédiaire de (14).

Il nous reste maintenant à intégrer l'équation

$$dz = pdx + qdy,$$

ce que l'on pourrait faire en prenant y et p pour variables indépendantes [*].

Mais, en appliquant la méthode de Jacobi, on peut se contenter de la première intégrale intermédiaire (15).

En effet, on en déduit le système d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{dy}{1} = \frac{dx}{\frac{-pf'(y)}{\sqrt{1+p^2}}} = \frac{dp}{0}.$$

On a donc, d'après cela,

$$p = a_1;$$

par suite,

$$q = \sqrt{1+a_1^2}\, f'(y).$$

Remplaçant p, q par ces valeurs dans

$$dz = pdx + qdy,$$

il vient

$$dz = a_1\, dx + \sqrt{1+a_1^2}\, f'(y)\, dy;$$

d'où

$$z - \varphi(a_1) = a_1\, x + \sqrt{1+a_1^2}\, f(y).$$

L'intégrale générale s'obtient alors en éliminant a_1 entre les deux équations

$$z - \varphi(a_1) - a_1\, x - \sqrt{1+a_1^2}\, f(y) = 0,$$

$$x + \varphi'(a_1) + \frac{a_1 f(y)}{\sqrt{1+a_1^2}} = 0.$$

Ce sont les deux équations auxquelles M. Serret est arrivé.

---

[*] Voir le *Traité de Calcul intégral* de M. SERRET, p. 663.

En appliquant les résultats que je viens d'exposer ci-dessus aux équations considérées par Laplace (*), on parvient très-rapidement aux formules que l'auteur de la *Mécanique céleste* a trouvées par de nombreuses transformations.

---

[*] *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1773.

FIN DU TOME DIX-SEPTIÈME (2e SÉRIE).

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.