JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

DE SAINT-VENANT

Mémoire sur les divers genres d'homogénéité des corps solides, et principalement sur l'homogénéité semi-polaire ou cylindrique, et sur les homogénéités polaires ou sphériconique et sphérique

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 10 (1865), p. 297-349.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1865_2_10__297_0>

MÉMOIRE

Sur les divers genres d'homogénéité des corps solides, et principalement sur l'homogénéité semi-polaire *ou cylindrique, et sur les homogénéités* polaires *ou sphériconique et sphérique;*

PAR M. DE SAINT-VENANT.

Lu à l'Académie des Sciences le 21 mai 1860.

1. *Définitions; objet.* — On connaît la distinction établie par Cauchy entre un corps solide *isotrope* et un corps solide qui est simplement *homogène*, quant à ses propriétés élastiques. Un solide est isotrope si, *tournée* ou envisagée n'importe comment, sa matière est identique à elle-même, c'est-à-dire si elle offre *partout* et *en tous sens* la même contexture; ou si, non-seulement en tous ses points, mais encore suivant toutes les directions, les mêmes petits déplacements moléculaires y développent les mêmes réactions mécaniques.

Il n'est qu'homogène si sa matière offre la même élasticité ou les mêmes réactions en tous les points dans des directions *homologues*, mais non pas en tous sens autour de chaque point.

D'après cela, les corps régulièrement cristallisés sont homogènes et non isotropes. Il peut en être de même de corps *amorphes* ou à cristallisation confuse, tels qu'une plaque métallique laminée, car elle a presque toujours des forces élastiques de grandeurs différentes dans le sens de l'épaisseur, dans le sens de la largeur et dans le sens de la longueur [*].

[*] C'est à quoi n'ont sans doute pas songé plusieurs savants de l'Angleterre et de l'Allemagne, qui semblent n'attribuer l'hétérotropie qu'aux corps cristallins. (*Voir* mon *Mémoire sur la distribution des élasticités autour de chaque point d'un solide ou d'un*

Mais, outre l'homogénéité en quelque sorte *parallèle* ou *rectiligne* qui se présente dans ces deux exemples, et qui a été seule considérée jusqu'à présent, il peut y en avoir une infinité d'autres.

Qu'on enroule en tuyau cylindrique cette plaque homogène rectangulaire non isotrope supposée mince, en dirigeant, par exemple, les génératrices dans le sens de sa longueur. *Elle ne cessera pas d'être homogène;* mais l'égalité d'élasticité aux divers points n'aura pas lieu pour des directions parallèles entre elles. Il y aura égale élasticité suivant les rayons qui vont tous couper perpendiculairement l'axe du cylindre : ce sera l'élasticité dans le sens de l'épaisseur. Il y aura égale élasticité suivant les diverses tangentes aux cercles ayant leur centre sur cet axe. Il n'y aura que les élasticités égales suivant la longueur qui auront conservé des directions parallèles entre elles.

C'est ce que l'on peut appeler l'homogénéité semi-polaire ou cylindrique; elle a généralement lieu pour les tubes étirés ou coulés, et aussi pour les pièces de bois de droit fil.

Quelque chose de plus compliqué et d'analogue cependant aura lieu si l'enroulement de la plaque en cylindre se fait obliquement à ses dimensions, ou si on l'opère en cône, etc.

Qu'on imagine maintenant une sphère solide pleine ou creuse, ou un corps de forme quelconque divisible en couches sphériques concentriques. Si la résistance ou la réaction élastique, pour mêmes déplacements de ses points, est partout égale dans le sens des rayons, et partout égale aussi dans certains sens perpendiculaires entre eux et aux rayons, ceux par exemple où se comptent les latitudes et les longitudes pour un équateur donné, la matière est homogène, mais *polairement*, ou d'une manière que nous pouvons appeler *sphériconique* vu le rôle qu'y jouent les *cônes de latitude* (ci-après, n^os^ **9** et **10**) ayant un axe déterminé, le même pour tous.

On peut aller plus loin et dire qu'il y a autant de genres d'homogénéité mécanique qu'il y a de systèmes possibles de coordonnées curvilignes ou de systèmes de surfaces orthogonales conjuguées. Tous

---

milieu de contexture quelconque, particulièrement quand il est amorphe sans être isotrope, inséré dans ce même Journal, 1864).

les genres peuvent être compris dans cette définition, qui s'appliquerait même à des propriétés de toute sorte, mécaniques ou autres:

Un corps est homogène lorsque l'un quelconque de ses éléments imperceptibles est identique à tout élément du même corps, pris ailleurs, ayant même volume et même forme, mais orienté d'une certaine manière qui peut changer d'un endroit à l'autre. Il l'est même encore lorsque cette identité de deux éléments, pris n'importe où et convenablement orientés, souffre exception pour certains points isolés ou *ombilicaux* (tels que sont ceux de l'intersection commune des plans des cercles de longitude de la sphère dont on vient de parler, comme on dira au n° **11**).

Le mode d'orientation des éléments, ou la direction relative de leurs lignes homologues, détermine le genre de l'homogénéité, genre dont chacun admet, comme nous verrons au n° **3**, des *sous-genres* où les orientations possibles en chaque point sont multiples.

Les corps isotropes réunissent tous les genres d'homogénéité; leurs éléments sont identiques de quelque manière qu'ils soient orientés.

Mais, comme l'ont remarqué depuis longtemps Savart [*] et M. Regnault [**], l'isotropie est rare, même dans les solides *coulés*, dont la contexture s'est constituée par refroidissement rapide après fusion. Une plaque de fonte, un vase de verre, etc., peuvent offrir en divers sens des élasticités inégales, tout comme une feuille ou un tube de tôle; et c'est même, comme je l'ai montré ailleurs à la suite d'une discussion détaillée [***], la seule conclusion qu'on doive tirer des différences qui ont été trouvées entre les résultats de quelques expériences, et ceux de calculs faits avec des formules d'*isotropie* à un seul coefficient; formules qui sont les conséquences obligées et rigoureuses

---

[*] *Annales de Chimie et de Physique*, t. XLI, 1829, p. 373, *Essai sur la réaction de torsion.*

[**] *Relation des expériences entreprises pour déterminer les principales lois physiques et les données numériques qui entrent dans le calcul des machines à vapeur*, 1re partie, 1847, t. XXI des *Mémoires de l'Institut*, p. 432.

[***] Nouvelle édition annotée (1864) des *Leçons de Navier*, à l'Appendice V, dont on peut consulter surtout les §§ 49, 54, 68 et surtout 75.

de la loi des actions moléculaires *que tout le monde invoque ouvertement ou tacitement*, et même sans laquelle tout établissement de formules mathématiques d'élasticité est illusoire [*].

Il est donc désirable de pouvoir poser et traiter les formules relatives aux corps hétérotropes comme celles qui s'appliquent aux corps isotropes.

C'est ce que j'ai fait dans de précédents Mémoires pour des cas de torsion et de flexion de prismes doués de l'homogénéité que nous venons d'appeler parallèle ou rectiligne, où les éléments identiques ont tous la même orientation [**].

Je me propose, dans celui-ci, d'établir les principes généraux propres aux homogénéités de tout genre, et, comme application, de résoudre quelques problèmes sur un cylindre creux et sur une sphère creuse, hétérotropes et doués des homogénéités qu'on vient de définir.

2. *Caractère et expression analytique d'un genre quelconque d'homogénéité.* — Imaginons trois droites matérielles extrêmement petites et rectangulaires

$$\mathrm{x},\ \mathrm{y},\ \mathrm{z} \quad \text{ou} \quad m\mathrm{x},\ m\mathrm{y},\ m\mathrm{z}$$

partant d'un même point m d'un corps élastique pris dans l'état dit *naturel*, où aucune force extérieure n'agit sur lui [***]. Puis, le corps ayant éprouvé ensuite une petite déformation qui change les distances et les actions mutuelles de ses parties et engendre en conséquence des pressions ou tensions à son intérieur, appelons respectivement

$$\partial_{\mathrm{x}},\ \partial_{\mathrm{y}},\ \partial_{\mathrm{z}} \quad \text{et} \quad g_{\mathrm{yz}},\ g_{\mathrm{zx}},\ g_{\mathrm{xy}}$$

---

[*] *Leçons de Navier*, Appendices, §§. 21, 56, 75, et, dans le même ouvrage, l'*Historique*, n^{os} XXII, XLIII; et aussi le n° 2 du *Mémoire* cité *sur la distribution des élasticités*, 1864, p. 269-270.

[**] *Savants étrangers*, t. XIV, *De la torsion des prismes*; *Journal de M. Liouville*, 1856, *De la flexion*; et *Notes sur Navier*.

[***] Nouvelle édition de Navier, Appendice III, § 22, et Appendice complémentaire, § 80.

les trois *dilatations*, dans les sens de ces droites, c'est-à-dire les proportions très-petites des allongements qu'elles ont éprouvés, et les trois *glissements* relatifs intérieurs, mesurés par les cosinus des angles légèrement aigus dans lesquels se sont changés ymz, zmx, xmy; quantités qui déterminent complétement la déformation dans une petite étendue autour du point m. On a, comme on sait, pour les six composantes, suivant les mêmes trois droites, des pressions ou tensions p à travers l'unité superficielle de trois petites faces qui leur sont perpendiculaires, ayant leur centre en m, les expressions suivantes, où la première sous-lettre affectant p désigne la face par sa normale, et, la seconde, le sens de décomposition :

$$(1)\ [*]\quad \left\{\begin{aligned}
p_{xx} &= a_{xxxx}\partial_x + a_{xxyy}\partial_y + a_{xxzz}\partial_z + a_{xxyz}g_{yz} + a_{xxzx}g_{zx} + a_{xxxy}g_{xy},\\
p_{yy} &= a_{yyxx}\partial_x + a_{yyyy}\partial_y + a_{yyzz}\partial_z + a_{yyyz}g_{yz} + a_{yyzx}g_{zx} + a_{yyxy}g_{xy},\\
p_{zz} &= a_{zzxx}\partial_x + a_{zzyy}\partial_y + a_{zzzz}\partial_z + a_{zzyz}g_{yz} + a_{zzzx}g_{zx} + a_{zzxy}g_{xy},\\
p_{yz} &= a_{yzxx}\partial_x + a_{yzyy}\partial_y + a_{yzzz}\partial_z + a_{yzyz}g_{yz} + a_{yzzx}g_{zx} + a_{yzxy}g_{xy},\\
p_{zx} &= a_{zxxx}\partial_x + a_{zxyy}\partial_y + a_{zxzz}\partial_z + a_{zxyz}g_{yz} + a_{zxzx}g_{zx} + a_{zxxy}g_{xy},\\
p_{xy} &= a_{xyxx}\partial_x + a_{xyyy}\partial_y + a_{xyzz}\partial_z + a_{xyyz}g_{yz} + a_{xyzx}g_{zx} + a_{xyxy}g_{xy};
\end{aligned}\right.$$

$a_{xxxx},\ldots, a_{xyyx}$ sont des coefficients qui dépendent de la contexture du corps dans la même petite étendue où le point m se trouve compris; coefficients ou paramètres qui de trente-six se réduisent à vingt et un distincts *au plus*, vu l'égalité nécessaire, irréfragablement prouvée par Green [**], entre ceux qui, comme a_{xxyz} et a_{yzxx}, ne diffèrent que par l'ordre où sont placés leurs deux groupes de deux indices ou sous-lettres.

---

[*] *Voyez* dans ce Journal, année 1864, *Mémoire sur la distribution des élasticités, etc.*, n° 3, p. 272, et aussi, nouvelle édition de Navier, 1864, Appendice complémentaire, § 84, p. 795, ce qu'il faut ajouter aux formules (1) quand le corps part d'un autre état que l'état naturel, ou quand il y avait, antérieurement aux déformations ∂_x, $\partial_y,\ldots$, g_{yx} éprouvées, des pressions intérieures et extérieures p^0_{xx}, $p^0_{yy},\ldots$, p^0_{xy}.

[**] *Comptes rendus de l'Acad. des Sciences*, 16 décembre 1861, t. LIII, p. 1107.

Il faut même, avec Cauchy, Poisson, etc., réduire ces paramètres *seulement à quinze* en vertu de cette grande loi des actions fonctions des distances dont on ne peut pas, disons-nous, se passer en Mécanique physique, et dont on tire *six* égalités complémentaires, telles que

$$a_{xxyy} = a_{xyxy}, \quad a_{xxyz} = a_{xyzx},$$

ce qui fait toutes les vingt et une égalités susceptibles d'être posées entre ceux des coefficients qui portent les quatre mêmes sous-lettres quel que soit leur arrangement.

Mais pour montrer que ce qui suit est indépendant de l'existence de ces six dernières égalités, auxquelles plusieurs savants refusent d'acquiescer, nous n'opérerons, comme Green, que la réduction des trente-six coefficients à vingt et un dans le cas le plus général de contexture, ce qui en conserve, quand il y a isotropie, *deux* qu'il n'y a aucun inconvénient à traiter comme inégaux dans les formules, sauf à les faire égaux dans les applications, si l'on est convaincu, comme je le suis, de leur égalité.

La place de ces divers coefficients dans les formules (1) montre suffisamment le rôle de chacun dans les propriétés élastiques d'une matière hétérotrope. Les coefficients a_{xxxx}, a_{yyyy}, a_{zzzz}, par lesquels il faut multiplier les dilatations pour avoir les pressions qu'elles engendrent dans leurs sens, sur des faces qui leur sont perpendiculaires, sont appelés *élasticités directes*. Ceux a_{yzyz}, a_{zxzx}, a_{xyxy} sont les *élasticités tangentielles*. Ceux a_{yyzz}, a_{zzxx}, a_{xxyy} sont appelés (par les auteurs qui les croient inégaux aux trois précédents) *élasticités latérales*. Enfin M. Rankine a nommé *élasticités asymétriques* les autres, tels que a_{xxyz}, a_{xxxy}, etc., qui sont nuls (n° suivant) lorsqu'il y a, au point considéré, trois plans de symétrie de contexture, perpendiculaires aux lignes x, y, z.

Ces formules (1) de composantes de pression sur trois faces orthogonales conviennent à des corps hétérogènes comme à des corps homogènes.

Elles sont applicables, par conséquent, pour tous les genres d'homogénéité.

Si x, y, z ont partout les mêmes directions, parallèles respectivement à trois axes coordonnés fixes x, y, z, et si les coefficients a ont les mêmes grandeurs pour tous les points m d'un corps, ce corps jouit de l'homogénéité *parallèle* ou *rectiligne;* car les petits éléments parallélipipèdes de mêmes dimensions, orientés de même, donnent, pour mêmes déformations éprouvées $\partial_x, \ldots, g_{xy}$, les mêmes pressions ou réactions élastiques $p_{xx}, \ldots, p_{xy}$.

Si, $a_{xxxx}, \ldots, a_{xyxy}$ ayant encore les mêmes grandeurs partout, les directions des lignes orthogonales x, y, z varient d'un point à l'autre suivant une certaine loi, le corps est homogène, mais d'un autre genre.

Tous les genres d'homogénéité sont donc caractérisés par les équations (1) avec les vingt et un ou quinze coefficients $a_{xxxx}, \ldots, a_{xyxy}$ *constants,* en prenant, en chaque point, les directions x, y, z normales aux surfaces orthogonales conjuguées du système de coordonnées auquel répond le genre particulier d'homogénéité que l'on considère.

3. *Sous-genres répondant à des symétries de contexture de la matière en chaque point; homogénéité simplement sphérique.* — Chaque genre d'homogénéité se subdivise naturellement, tout comme le genre ordinaire ou parallèle, en une infinité d'espèces répondant aux valeurs particulières, en nombre infini, des coefficients a.

Mais, pour chacun, il y a aussi des *sous-genres,* où un élément, pris dans un endroit quelconque, peut trouver dans tout autre endroit son identique suivant *deux* ou *plusieurs* orientations.

Cette possibilité de *deux* orientations aura lieu si, partout, la contexture du corps est symétrique mécaniquement par rapport au plan tangent à l'une des trois surfaces coordonnées qui caractérisent le genre de l'homogénéité; car tout élément sera identique avec l'élément qui lui est symétrique par rapport à ce plan.

Si x représente en direction la normale à cette surface ou à ce plan de symétrie, les termes en g_{zx}, g_{xy} doivent disparaître des quatre premières expressions (1), et subsister seuls dans les deux dernières; il le faut pour que celles-là restent les mêmes et que celles-ci ne fassent que changer de signe lorsqu'on change simplement le sens de la ligne x, c'est-à-dire quand on la remplace par son prolongement symétrique de l'autre côté de la face yz [*].

Si la symétrie de contexture a lieu par rapport au plan tangent à une deuxième face zx, cela entraîne la symétrie par rapport à la troisième xy; et l'on a un sous-genre pour lequel l'orientation possible est sextuple, c'est-à-dire qu'un élément pris n'importe où trouve partout son identique dans six positions différentes. Alors les expressions (1) se réduisent à la forme suivante en x, y, z, comme on sait que cela a lieu en x, y, z pour le genre parallèle ou ordinaire :

$$(2)\qquad \begin{cases} p_{xx} = a\,\partial_x + f'\partial_y + e'\partial_z, \\ p_{yy} = f'\partial_x + b\,\partial_y + d'\partial_z, \\ p_{zz} = e'\partial_x + d'\partial_y + c\,\partial_z, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} p_{yz} &= d g_{yz}, \\ p_{zx} &= e g_{zx}, \\ p_{xy} &= f g_{xy}. \end{aligned}$$

J'affecte d'accents trois des coefficients, par le motif énoncé au numéro précédent, et bien que, dans mon intime conviction, non encore généralement partagée, les élasticités latérales d', e', f' soient égales respectivement aux élasticités tangentielles d, e, f.

Et si, en chaque endroit, dans une petite étendue, x ou mx est un axe de symétrie de la matière du corps, chaque élément, transporté ailleurs, y trouve son identique dans une infinité de positions symétriques par rapport à cet axe. Alors on a, toujours comme pour l'homogénéité parallèle [**],

$$\text{non-seulement}\quad b = c,\ e = f,\ e' = f', \quad \text{mais encore}\quad b = 2d + d';$$

ce qui est la condition pour que les six expressions p restent composées de la même manière et avec les mêmes coefficients en fonction des ∂ et g relatifs à leurs directions lorsqu'on fait tourner my et mz, autour de mx, d'un angle infiniment petit, et, par suite, d'un angle quelconque.

---

[*] *Voyez* le tome de 1856 de ce Journal, *Mémoire sur la flexion*, art. 9, ou la nouvelle édition annotée des *Leçons de Navier*, Appendice III, § 24.

[**] *Voyez* le tome de 1856 de ce Journal, *Mémoire sur la flexion*, art. 9, ou la nouvelle édition annotée des *Leçons de Navier*, Appendice III, § 24

Ainsi, lorsque, dans le genre polaire ou sphériconique (n° **1**), tous les rayons sont des axes de symétrie, on peut prendre indifféremment pour équateur tout plan passant par le centre, et l'on a un sous-genre qui peut être appelé simplement *sphérique* (ci-après n° **10**).

Si, en même temps que $m\mathrm{x}$, $m\mathrm{y}$ est axe de symétrie de contexture, $m\mathrm{z}$ l'est par cela seul, ainsi que toute droite tirée par m. Tout élément a son identique dans toutes les situations ou orientations possibles, et il y a *isotropie* pour tous les systèmes de coordonnées.

Il ne reste alors, dans les formules, que deux coefficients d, d' (ou plutôt, disons-nous, un seul $\mathrm{d} = \mathrm{d}'$, d'après la loi des actions matérielles).

En excluant les cristaux proprement dits, bornons-nous à considérer les corps *amorphes* ou à cristallisation confuse, tels que sont les métaux, etc. Ils peuvent être regardés comme ayant en chaque point trois plans de symétrie de contexture. En effet, comme nous avons dit à un autre Mémoire [*], ils sont constitués comme si leur matière, primitivement isotrope, avait été comprimée ou dilatée en divers sens. Or, on sait que ces dilatations ou compressions peuvent être toujours réduites à trois, dites *principales*, dans des directions rectangulaires.

Les formules (2), en choisissant les x, y, z dans ces trois directions, sont donc applicables à tous les corps que nous considérons ici.

Mais il y a plus. Les neuf (ou six) coefficients a, b,..., f' de ces formules (2) n'ont pas entre eux tous les rapports numériques possibles. Des considérations analytiques simples, confirmées par les seules expériences qui aient été faites sur les élasticités dans diverses directions obliques l'une à l'autre, conduisent à admettre entre eux les relations constantes suivantes, dites *de distribution ellipsoïdale* des élasticités directes [**] :

$$2\mathrm{d} + \mathrm{d}' = \sqrt{\mathrm{bc}}, \quad 2\mathrm{e} + \mathrm{e}' = \sqrt{\mathrm{ca}}, \quad 2\mathrm{f} + \mathrm{f}' = \sqrt{\mathrm{ab}};$$

---

[*] Dans ce Journal, 1864, *Mémoire* cité *sur la distribution des élasticités, principalement dans les corps solides amorphes sans être isotropes*, n^os 13 à 16 et 28, 29 ; et anssi, 3e édition (annotée) de Navier, Appendice complémentaire, §§ 89, 90, 92.

[**] Ou donnant un ellipsoïde pour la surface dont les rayons vecteurs sont les

telles, évidemment, que si l'on a $b = c$ par exemple, x est un axe de symétrie par cela seul, et que si $a = b = c$, il y a isotropie. Il en résulte, en tirant a, b, c et effaçant les accents, les formules suivantes :

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} p_{xx} &= 3\frac{ef}{d}\partial_x + f\partial_y + e\partial_z, \\ p_{yy} &= f\partial_x + 3\frac{fd}{e}\partial_y + d\partial_z, \\ p_{zz} &= e\partial_x + d\partial_y + 3\frac{de}{f}\partial_z, \end{aligned}\right. \quad \text{et} \quad \begin{aligned} p_{yz} &= dg_{yz}, \\ p_{zx} &= eg_{zx}, \\ p_{xy} &= fg_{xy}, \end{aligned}$$

à trois paramètres seulement; formules qui suffisent pour tous les corps amorphes, et par conséquent pour tous les matériaux employés dans les constructions et les machines. Elles devraient être généralement employées, en abandonnant ces formules fautives d'isotropie à deux paramètres, par lesquelles quelques auteurs ont cherché, avons-nous dit, à interpréter divers faits.

4. *Problème des déplacements éprouvés par les divers points sous l'empire de forces extérieures données.* — Pour poser les équations différentielles dont l'intégration est propre à donner ces déplacements, supposés très-petits, et estimés ou projetés partout sur les trois normales aux surfaces coordonnées, deux procédés peuvent être mis en usage.

Le premier consiste à exprimer, si on le peut, par des considérations géométriques et pour un point quelconque *m* du corps, les dilatations et glissements

$$\partial_x, \ \partial_y, \ \partial_z, \quad g_{yz}, \ g_{zx}, \ g_{xy}$$

qui entrent dans les formules (1), (2) ou (3) en fonction des dérivées par rapport aux coordonnées choisies, linéaires ou *angulaires*, que

---

inverses des racines quatrièmes des coefficients tels que a_{xxxx} par lesquels il faut multiplier une dilatation ∂_x pour avoir la pression normale p_{xx} qu'elle engendre sur une face perpendiculaire à sa direction x; et donnant aussi un ellipsoïde avec les racines quatrièmes des *modules d'élasticité* (E de Navier) de la matière dans les mêmes sens.

nous appellerons

$$\alpha,\ 6,\ \gamma,$$

des projections

$$\mathrm{U},\ \mathrm{V},\ \mathrm{W}$$

des déplacements, suivant les directions

$$\mathrm{x},\ \mathrm{y},\ \mathrm{z}$$

qui sont, avons-nous dit, celles des normales aux surfaces coordonnées menées par le point m dont les coordonnées sont α, 6, γ;

Et, par des considérations du même genre, à poser en

$$p_{\mathrm{xx}},\ p_{\mathrm{yy}},\ldots,\ p_{\mathrm{xy}}$$

et leurs dérivées par rapport à α, 6, γ, les trois équations d'équilibre de translation, aussi suivant les directions normales x, y, z, d'un petit élément solide compris entre six des surfaces orthogonales, infiniment voisines deux à deux, ayant m pour un de ses angles ou bien pour son point central.

De cette manière, en mettant pour $p_{\mathrm{xx}},\ldots,\ p_{\mathrm{xy}}$ leurs expressions (1) ou (2) ou (3) en $\partial_{\mathrm{x}},\ldots,\ g_{\mathrm{xy}}$, et, pour ces dilatations et glissements, leurs valeurs trouvées en U, V, W, α, 6, γ, l'on aura obtenu les équations différentielles *indéfinies*, ou s'appliquant à tous les points, et ce qu'il faut pour poser les équations *définies*, exprimant que les pressions aux divers points de la surface ont des grandeurs données.

Le second procédé, tout analytique, consiste à partir des expressions déjà connues suivantes, donnant les dilatations et glissements parallèlement à des axes coordonnés rectangles x, y, z, en fonction des projections

$$u,\ v,\ w,$$

dans leurs directions, des déplacements supposés très-petits aussi, ou ramenés à être tels dans chaque petite étendue :

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \partial_x = \dfrac{du}{dx}, & \partial_y = \dfrac{dv}{dy}, & \partial_z = \dfrac{dw}{dz}, \\ g_{yz} = \dfrac{dv}{dz} + \dfrac{dw}{dy}, & g_{zx} = \dfrac{dw}{dx} + \dfrac{du}{dz}, & g_{xy} = \dfrac{du}{dy} + \dfrac{dv}{dx}, \end{array}\right.$$

et à partir aussi des équations, également connues,

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{dp_{xx}}{dx}+\dfrac{dp_{xy}}{dy}+\dfrac{dp_{xz}}{dz}=\mathrm{X}, \\ \dfrac{dp_{xy}}{dx}+\dfrac{dp_{yy}}{dy}+\dfrac{dp_{yz}}{dz}=\mathrm{Y}, \\ \dfrac{dp_{zx}}{dx}+\dfrac{dp_{yz}}{dy}+\dfrac{dp_{zz}}{dz}=\mathrm{Z}, \end{cases}$$

exprimant l'équilibre de translation, parallèlement aux trois mêmes axes fixes, d'un élément intérieur compris entre six plans qui leur sont perpendiculaires, et sur les points duquel agit, à la manière de la pesanteur, une force dont les composantes parallèles à x, y, z sont appelées

$$\mathrm{X},\ \mathrm{Y},\ \mathrm{Z} \text{ par unité de volume.}$$

Puis, comme ces équations (4), (5) sont vraies pour des corps de toutes les contextures, on opère un changement de variables indépendantes qui permet d'y remplacer toutes les dérivées en x, y, z par des dérivées en α, β, γ, après avoir, dans les seconds membres $\frac{du}{dx}$, etc., de (4), mis pour u, v, w leurs expressions en U, V, W, faciles à trouver d'après l'état de la question. Il ne restera ainsi qu'à faire des substitutions des expressions (4) de $\partial_x, \ldots, g_{xy}$ dans les formules de transformation connues (i) ci-après qui donnent

$$\partial_{\mathrm{x}},\ \partial_{\mathrm{y}}, \ldots,\ g_{\mathrm{xy}} \quad \text{en fonction de} \quad \partial_x,\ \partial_y, \ldots,\ g_{xy}$$
$$\text{et des angles de } \mathrm{x},\ \mathrm{y},\ \mathrm{z} \text{ avec } x,\ y,\ z,$$

et qu'à faire, à l'inverse, des substitutions, aux p_{xx}, $p_{yy}, \ldots, p_{xy}$, de leurs expressions, fournies par le théorème connu de projections de plans de pression, en fonction des composantes p_{xx}, $p_{\mathrm{yy}}, \ldots, p_{\mathrm{xy}}$, dont les valeurs sont données par (1) ou (2) ou (3), pour obtenir les relations et équations différentielles que l'on cherchait.

M. Lamé a employé avec succès [*], pour ce qui regarde l'établis-

---

[*] *Leçons sur la théorie de l'élasticité*, 1852, § 77 pour les coordonnées semi-polaires, et § 83 pour les coordonnées polaires.

sement des trois équations d'équilibre intérieur, un procédé en quelque sorte *mixte*, moins direct que le premier, mais plus simple que la partie du second qui est relative à ces équations. Il consiste, en considérant, comme dans le premier procédé, les forces agissant tant sur les six faces qu'à l'intérieur de l'élément compris entre des surfaces courbes coordonnées, et dont un des huit angles est occupé par le point m que l'on considère, à égaler à zéro leurs trois sommes de composantes, non pas sur les directions x, y, z des trois côtés ou des trois normales émanant de ce point, mais suivant les directions fixes de trois axes coordonnés x, y, z. Ces composantes, en effet, sont toujours facilement exprimables, quant aux pressions sur les trois faces adjacentes à m, en fonction de celles p_{xx}, $p_{\mathrm{yy}}, \ldots, p_{\mathrm{xy}}$ des pressions qui s'exercent sur l'unité superficielle de chacune; car on connaît, et les neuf cosinus des angles de x, y, z avec x, y, z, et les trois superficies par lesquelles il faut multiplier les composantes des pressions sur l'unité, pour avoir celles qui agissent, en chaque sens, sur les trois premières faces dont on vient de parler. Ensuite, pour avoir les excès, sur celles-ci, des neuf composantes, dans les mêmes sens fixes x, y, z, des pressions sur les faces respectivement opposées, et qui ne sont en général ni égales ni parallèles exactement aux pressions sur les premières faces, il suffit de prendre les dérivées des composantes de pressions déjà trouvées, par rapport à α, 6, γ, et de multiplier par les distances deux à deux, pour lesquelles on peut prendre les longueurs des trois côtés adjacents à m. Les trois sommes de ces excès, en chaque sens x, y, z, divisées par le volume de l'élément et ajoutées aux composantes, aussi suivant x, y, z, des forces extérieures agissant sur l'unité de ce volume, donnent les trois équations d'équilibre. Et l'on en peut facilement ensuite déduire trois autres équations plus simples où figurent isolément les composantes des forces dans les sens x, y, z où se comptent les coordonnées curvilignes α, 6, γ.

Comme le deuxième procédé, qui généralise et modifie un peu celui qu'a employé M. Lamé, sera sans doute ordinairement mis en usage pour ce qui regarde l'établissement des expressions des dilatations et glissements ∂_{x}, $\partial_{\mathrm{y}}, \ldots, g_{\mathrm{xy}}$ ou ∂_{α}, $\partial_{6}, \ldots, g_{\alpha 6}$ en fonction des déplacements U, V, W et de leurs dérivées en α, β, γ, il est bon d'en indiquer le détail ici.

Les points du corps étant d'abord rapportés à des axes rectangulaires fixes de coordonnées x, y, z, appelons, pour éviter toute confusion,

$$x', \ y', \ z'$$

ce que nous avons nommé jusqu'ici

$$\mathrm{x}, \ \mathrm{y}, \ \mathrm{z},$$

c'est-à-dire les directions, au point particulier m, des normales aux surfaces conjuguées du système pour lequel le corps non isotrope jouit de l'homogénéité. Et considérons, pour un moment, le point m comme l'origine de coordonnées rectilignes nouvelles fixes x', y', z' parallèles à ces directions, afin d'y rapporter, avant et après leurs petits déplacements, les seuls points qui sont à de petites distances autour de m; les formules ordinaires de transformation de coordonnées rectangles, en appelant

(a) $c_{xx'}$, $c_{xy'}$,... $c_{zz'}$, les cosinus des angles de x avec x', avec y', etc.,

donneront

(b) x, y, z = des fonctions connues de x', y', z' et de $c_{xx'}$, etc.,

d'où, substituant

$$x+u, \ y+v, \ z+w, \quad \text{et} \quad x'+\mathrm{U}, \ y'+\mathrm{V}, \ z'+\mathrm{W}$$
$$\text{à} \quad x, \ y, \ z \quad \text{et} \quad x', \ y', \ z',$$

et retranchant x, y, z, ce qui revient à mettre dans ces formules u, v, w, U, V, W à la place de x, y, z, x', y', z',

$$(c) \qquad \begin{cases} u = \mathrm{U}c_{xx'} + \mathrm{V}c_{xy'} + \mathrm{W}c_{xz'}, \\ v = \mathrm{U}c_{yx'} + \mathrm{V}c_{yy'} + \mathrm{W}c_{yz'}, \\ w = \mathrm{U}c_{zx'} + \mathrm{V}c_{zy'} + \mathrm{W}c_{zz'}; \end{cases}$$

et, par suite,

$$(d)\quad \begin{cases} \dfrac{du}{dx} = \dfrac{dU}{dx}\,c_{xx'} + \dfrac{dV}{dx}\,c_{xy'} + \dfrac{dW}{dx}\,c_{xz'}, \quad \dfrac{du}{dy} = \ldots, \quad \dfrac{dw}{dz} = \ldots, \\ \qquad \text{où } c_{xx'},\ c_{xy'},\ldots, \text{ sont fonctions des coordonnées nouvelles } \alpha,\ \beta,\ \gamma. \end{cases}$$

Mais on a, par la nature ou la définition de ces coordonnées curvilignes particulières,

$$(e)\qquad \alpha,\ \beta,\ \gamma = \text{des fonctions connues de } x,\ y,\ z; \text{ et réciproquement.}$$

D'où

$$(f)\qquad \frac{d(\alpha, \beta, \gamma)}{d(x, y, z)} = \text{des fonctions connues de } \alpha,\ \beta,\ \gamma.$$

On en tire facilement, puisqu'on a

$$\frac{d.}{dx} = \frac{d\alpha}{dx}\frac{d.}{d\alpha} + \frac{d\beta}{dx}\frac{d.}{d\beta} + \frac{d\gamma}{dx}\frac{d.}{d\gamma}, \quad \frac{d.}{dy} = \ldots; \quad \frac{d.}{dz} = \ldots.$$

où le point symbolique remplace une fonction quelconque, les formules de changement de variable indépendante

$$(g)\qquad \frac{d.}{d(x, y, z)} = \text{des fonctions connues de } \frac{d.}{d(\alpha, \beta, \gamma)} \text{ et de } \alpha,\ \beta,\ \gamma.$$

En les appliquant à U, à V, à W, et en substituant ce qui en résulte dans les expressions (d) de $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy},\ldots, \frac{dw}{dz}$, puis celles-ci dans les les expressions (4) des déformations ∂, g, on obtient pour celles-ci

$$(h)\qquad \partial_x,\ \partial_y,\ \partial_z,\ g_{yz},\ g_{zx},\ g_{xy} = \text{des fonctions connues de } \frac{d(U, V, W)}{d(\alpha, \beta, \gamma)} \text{ et de } \alpha,\ \beta,\ \gamma.$$

Mais on connaît les formules suivantes de changement de direction des dilatations et glissements très-petits :

$$(i)\quad \begin{cases} \partial_{x'} = \partial_x c_{xx'}^2 + \partial_y c_{yx'}^2 + \partial_z c_{zx'}^2 + g_{yz}\,c_{yx'}\,c_{zx'} + g_{zx}\,c_{zx'}\,c_{xx'} + g_{xy}\,c_{xx'}\,c_{yx'}, \\ \partial_{y'} = \ldots, \qquad \partial_{z'} = \ldots, \\ g_{y'z'} = 2\partial_x\,c_{xy'}\,c_{xz'} + 2\partial_y\,c_{yy'}\,c_{yz'} + 2\partial_z\,c_{zy'}\,c_{zz'} + \\ \qquad + g_{yz}(c_{yy'}c_{zz'} + c_{zy'}c_{yz'}) + g_{zx}(c_{zy'}c_{xz'} + c_{xy'}c_{zz'}) + g_{xy}(c_{xy'}c_{yz'} + c_{yy'}c_{xz'}), \\ g_{z'x'} = \ldots, \qquad g_{x'y'} = \ldots, \end{cases}$$

susceptibles d'être tirées, pour des déplacements très-petits u, v, w, U, V, W, de la combinaison des formules (4) et (d), mais démontrables directement et simplement, quelles que soient les grandeurs absolues des déplacements, en se fondant sur ce que, lorsqu'on a deux résultantes de plusieurs lignes droites (comme sont les diagonales de parallélipipèdes par rapport à trois de leurs côtés), le produit de l'une des deux par la projection de l'autre sur sa direction est égal à la somme algébrique des produits des lignes composantes de la première par les diverses projections, sur leurs directions, des lignes composantes de la seconde [*].

Substituant les valeurs (h) des ∂_x, ∂_y,..., g_{xy} dans les seconds membres des formules (i); mettant, pour les neuf cosinus c, leurs valeurs en α, β, γ, et écrivant

$$(j)\qquad \left\{\begin{array}{l} \qquad\qquad\quad \partial_\alpha,\ \partial_\beta,\ \partial_\gamma,\ g_{\beta\gamma},\ g_{\gamma\alpha},\ g_{\alpha\beta}, \\ \text{au lieu de } \partial_{x'},\ \partial_{y'},\ \partial_{z'},\ g_{y'z'},\ g_{z'x'},\ g_{x'y'}, \end{array}\right.$$

vu que les coordonnées α, β, γ, même angulaires, prennent leurs accroissements quand les points qu'elles désignent cheminent précisément dans les sens des normales x', y', z' ou x, y, z, on obtient

$$(k)\ \partial_\alpha, \partial_\beta, \partial_\gamma, g_{\beta\gamma}, g_{\gamma\alpha}, g_{\alpha\beta} = \text{des fonctions connues de } \frac{d(\mathrm{U},\mathrm{V},\mathrm{W})}{d(\alpha,\beta,\gamma)} \text{ et de } \alpha, \beta, \gamma,$$

c'est-à-dire les formules que l'on cherchait à établir.

Nous verrons comment la complication naturelle de ces calculs peut souvent être fort atténuée.

5. *Application à l'homogénéité semi-polaire ou cylindrique; établissement préalable, d'une manière directe, des formules de l'élasticité pour les coordonnées relatives à ce genre d'homogénéité.* — Si l'on conçoit dans un corps une droite prise pour *axe*, un plan perpendiculaire pris pour *base* et un plan passant par cette droite pris pour *méridien fixe*, et si, avec M. Lamé, on adopte pour coordonnées d'un point quelconque m :

---

[*] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1864, p. 289, note.

r son rayon vecteur ou la perpendiculaire élevée à l'axe et se terminant en ce point;

φ l'angle azimutal que ce rayon fait avec le méridien, pris d'un des deux côtés de l'axe;

z la distance de m à la base;

les surfaces coordonnées seront : 1° les cylindres à base circulaire ayant l'axe du système pour axe de figure; 2° les plans méridiens ou passant par cet axe; 3° les plans parallèles à la base.

En appelant :

U, V, W les projections du petit déplacement sur les normales respectives à ces surfaces;

∂_r, ∂_φ, ∂_z, $g_{\varphi z}$, g_{zr}, $g_{r\varphi}$ les dilatations et glissements dans les trois sens r, $r\varphi$, et z de ces mêmes normales;

p_{rr}, $p_{\varphi\varphi}$, p_{zz}, $p_{\varphi z}$, p_{zr}, $p_{r\varphi}$ les composantes, dans les mêmes directions, des pressions sur l'unité superficielle des petites faces qui leur sont perpendiculaires;

exprimons directement (premier procédé) les dilatations et glissements en fonction des déplacements et de leurs dérivées, et posons, aussi directement, les équations d'équilibre d'un élément de volume.

Si mn, mp, mq sont trois petites lignes tirées du point m dans les mêmes directions rectangulaires r, φ, z du rayon r, de l'élément de l'arc $r\varphi$, et de l'ordonnée z, et si des déplacements extrêmement petits les changent en $m_1 n_1$, $m_1 p_1$, $m_1 q_1$, l'on a

$$\partial_r = \frac{m_1 n_1 - mn}{mn}, \quad \partial_\varphi = \frac{m_1 p_1 - mp}{mp}, \quad \partial_z = \frac{m_1 q_1 - mq}{mq}.$$

Or, comme la direction de $m_1 n_1$ est très-peu différente de celle de mn, sa longueur est égale à celle de sa projection orthogonale sur la direction de mn, à cela près d'une quantité très-petite d'ordre supérieur et négligeable; mais cette projection est égale à mn augmenté de l'excès de la valeur de U pour le point n sur la valeur de U pour le point m, c'est-à-dire est égale à $mn + \frac{dU}{dr} mn$. Donc $\partial_r = \frac{dU}{dr}$.

On trouvera de même $\partial_z = \frac{dW}{dz}$.

Quant à ce qui regarde ∂_φ, $m_1 p_1$ est égal aussi à sa projection *ortho-*

gonale sur la direction de mp, c'est-à-dire sur la tangente au cercle de rayon r, ayant son plan perpendiculaire à l'axe, ou, ce qui revient au même, sur la circonférence même avec laquelle cette tangente se confond dans une petite étendue; mais si l'on projette polairement $m_1 p_1$ sur cette même circonférence, au moyen des deux rayons vecteurs de m_1 et de p_1, projetés eux-mêmes orthogonalement sur son plan, la projection polaire, ou le petit arc intercepté, sera $m_1 p_1$ diminué dans la proportion du déplacement U, dans le sens r, au rayon r, c'est-à-dire sera $m_1 p_1 \frac{U}{r}$, que l'on peut remplacer par $mp\frac{U}{r}$, vu la petitesse du rapport $\frac{U}{r}$. Or cette projection polaire sur l'arc est égale à $mp + \frac{dV}{rd\varphi}mp$; donc $m_1 p_1$, ou sa projection orthogonale sur la tangente, est égal à $mp + \frac{dV}{rd\varphi}mp + \frac{U}{r}mp$, et par conséquent on a

$$\partial_\varphi = \frac{U}{r} + \frac{1}{r}\frac{dV}{d\varphi}.$$

Venons aux glissements, qui sont les excès des angles droits pmq, qmn, nmp sur les angles légèrement aigus $p_1 m_1 q_1$; $q_1 m_1 n_1$, $n_1 m_1 p_1$, ou, ce qui revient au même, les cosinus de ces trois derniers angles. Le premier et le second, relatifs à des angles dont un des côtés primitifs était la ligne mq parallèle aux z, sont évidemment les mêmes que dans un système de coordonnées rectilignes r, $r\varphi$ (le petit arc ou sa tangente) et z. Ils ont donc pour grandeurs $\frac{dV}{dz} + \frac{dW}{rd\varphi}$ et $\frac{dW}{dr} + \frac{dU}{dz}$.

Il en serait de même du troisième $g_{r\varphi} = nmp - n_1 m_1 p_1$, et, en appelant, comme ci-dessus, y' la direction d'une coordonnée suivant la tangente à l'arc $r\varphi$, ce glissement serait la somme des deux petites rotations $\frac{dU}{dy'}$, $\frac{dV}{dr}$ éprouvées en sens contraires par mn et par mp en devenant $m_1 n_1$, $m_1 p_1$, si cette tangente n'avait pas changé de direction; mais elle a tourné de $\frac{V}{r}$ en vertu du déplacement V de son point de contact. Cette petite rotation diminue d'autant celle de mn ou la quote-part $\frac{dU}{dy'} = \frac{dU}{rd\varphi}$ qu'elle apporte dans le rétrécissement de l'angle primitivement droit nmp. Donc $g_{r\varphi} = \frac{dU}{rd\varphi} + \frac{dV}{dr} - \frac{V}{r}$.

On a ainsi, en récapitulant,

$$(6)\quad \begin{cases} \partial_r = \dfrac{dU}{dr}, & \partial_\varphi = \dfrac{1}{r}\dfrac{dV}{d\varphi} + \dfrac{U}{r}, \quad \partial_z = \dfrac{dW}{dz}, \\ g_{\varphi z} = \dfrac{dV}{dz} + \dfrac{dW}{rd\varphi}, & g_{zr} = \dfrac{dW}{dr} + \dfrac{dU}{dz}, \quad g_{r\varphi} = \dfrac{dU}{rd\varphi} + \dfrac{dV}{dr} - \dfrac{V}{r}, \end{cases}$$

formules d'accord avec celles des six composantes de pression dans un cylindre de matière isotrope, auxquelles arrive M. Lamé en suivant la marche du second procédé ci-dessus (n° **4**), excepté qu'à partir de l'établissement des formules de changement de variable (f) et de celle qui remplace (g) en donnant $\dfrac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)}$ en fonction de $\dfrac{d(U,V,W)}{d(r,\varphi,z)}$, l'illustre académicien fait les substitutions, non pas dans (i) du n° **5**, mais dans les expressions de $p_{xx}, \ldots, p_{xy}$, dont il déduit celles de $p_{rr}, \ldots, p_{r\varphi}$ au moyen des six formules connues de changement de plan de pression dues à Cauchy, les cosinus qui y entrent étant

$$(7)\quad \begin{cases} c_{xx'} = \cos\varphi, & c_{yx'} = \sin\varphi, & c_{zx'} = 0; \\ c_{xy'} = -\sin\varphi, & c_{yy'} = \cos\varphi, & c_{zx'} = 0; \\ c_{xz'} = 0, & c_{yz'} = 0, & c_{zz'} = 1. \end{cases}$$

La substitution dans les formules (i) donnant $\partial_{x'}$ ou $\dfrac{dU}{dx'} =$ etc., indiquée au numéro précédent, m'a paru plus simple et plus adaptée aux cas d'homogénéité hétérotrope de tout genre dont nous nous occupons.

Au reste, on diminue considérablement la longueur des calculs qu'entraîne ce procédé analytique si l'on prend pour le plan méridien fixe, auquel on rapporte les points autour de m, celui qui passe par m, ou si l'on fait $\varphi = 0$, après avoir effectué les différentiations par rapport à cet angle, simplification dont on verra l'analogue au n° **9** pour les coordonnées sphériques, ce qui rendra abordables les calculs y relatifs.

Établissons aussi d'une manière directe (premier procédé) les équations d'équilibre d'un élément de volume compris entre deux surfaces cylindriques ayant pour axe celui du système, et distantes de Δr, deux plans méridiens, distants angulairement de $\Delta\varphi$, et deux plans parallèles à la base, distants de Δz.

Si, au lieu de placer l'un des angles de l'élément au point m, auquel se rapportent les coordonnées r, φ, z et les valeurs p_{rr}, $p_{\varphi\varphi}$, etc. des composantes, nous y mettons, pour plus d'exactitude et de symétrie, le centre de l'élément, c'est-à-dire l'intersection des trois surfaces coordonnées à égale distance de celles qui le limitent deux à deux, et si nous appelons

$$(8)\qquad \mathrm{A}_r = r\Delta\varphi.\Delta z,\quad \mathrm{A}_\varphi = \Delta r\Delta z,\quad \mathrm{A}_z = \Delta r.r\Delta\varphi$$

les *faces moyennes* ou les parties de ces trois surfaces qui sont interceptées par celles de l'élément, et sont respectivement perpendiculaires à r, à $r\varphi$, à z, nous aurons

$$\mathrm{A}_r p_{rr},\quad \mathrm{A}_r p_{r\varphi},\ldots,\quad \mathrm{A}_z p_{zz}$$

pour les composantes, suivant r, $r\varphi$, z, des pressions qui s'exercent à travers ces faces moyennes, d'où, par exemple,

$$\mathrm{A}_r p_{rr} + \frac{d.\mathrm{A}_r p_{rr}}{dr}\frac{\Delta r}{2} \quad \text{et} \quad -\left(\mathrm{A}_r p_{rr} - \frac{d.\mathrm{A}_r p_{rr}}{dr}\frac{\Delta r}{2}\right)$$

pour les composantes, dans le sens r, de celles qui ont lieu à travers les faces antérieure et postérieure de l'élément, situées respectivement aux distances $r+\frac{\Delta r}{2}$, $r-\frac{\Delta r}{2}$ de l'axe. Leur somme algébrique, qui doit seule figurer dans l'équation de l'équilibre de translation dans le sens r, se réduit à

$$\frac{d.\mathrm{A}_r p_{rr}}{dr}\Delta r;$$

et une pareille réduction aura lieu dans les autres additions de composantes de même nom, prises sur deux faces opposées.

Mais il entrera des termes d'une autre forme dans deux des trois équations d'équilibre.

En effet, les faces méridiennes antérieure et postérieure de l'élément, distantes respectivement de $\varphi+\frac{\Delta\varphi}{2}$, $\varphi-\frac{\Delta\varphi}{2}$ du plan méridien fixe, ne sont pas parallèles à la face moyenne correspondante A_φ; elles font avec elle des angles $\frac{\Delta\varphi}{2}$. Les composantes, suivant les rayons qui y aboutissent, des pressions sur ces faces, fourniront néanmoins, suivant la coordonnée r, un terme $\frac{d.A_\varphi p_{\varphi r}}{d\varphi}\Delta\varphi$, comme si elles étaient parallèles à cette coordonnée, car le cosinus d'un angle extrêmement petit ne diffère point de l'unité; mais les composantes qui sont normales à ces mêmes faces, du côté du dehors de l'élément, fourniront, à celles que l'on prend suivant r, deux forces $-A_\varphi p_{\varphi\varphi}\frac{\Delta\varphi}{2}$ de même sens; et, suivant la tangente à l'arc $r\varphi$, les premières composantes fourniront deux forces $A_\varphi p_{\varphi r}.\frac{\Delta\varphi}{2}$, qui seront aussi de même sens, précisément parce que ces composantes, agissant sur les faces A_φ antérieure et postérieure, tendent, l'une à éloigner, l'autre à rapprocher de l'axe, son point d'application.

Les trois sommes de composantes de pressions sur les six faces de l'élément, dans les sens de r, de $r\varphi$ et de z, sont ainsi

$$\frac{d.A_r p_{rr}}{dr}\Delta r+\frac{d.A_\varphi p_{\varphi r}}{d\varphi}\Delta\varphi+\frac{d.A_z p_{zr}}{dz}\Delta z-2A_\varphi p_{\varphi\varphi}\frac{\Delta\varphi}{2},$$

$$\frac{d.A_r p_{r\varphi}}{dr}\Delta r+\frac{d.A_\varphi p_{\varphi\varphi}}{d\varphi}\Delta\varphi+\frac{d.A_z p_{z\varphi}}{dz}\Delta z+2A_\varphi p_{\varphi r}\frac{\Delta\varphi}{2},$$

$$\frac{d.A_r p_{rz}}{dr}\Delta r+\frac{d.A_\varphi p_{\varphi z}}{d\varphi}\Delta\varphi+\frac{d.A_z p_{zz}}{dz}\Delta z.$$

On peut écrire A_φ, A_z hors des signes d, car les faces de l'élément qui leur répondent sont égales des deux côtés antérieur et postérieur. Il n'en est pas de même de A_r, qui varie proportionnellement à son rayon vecteur, en sorte qu'en effectuant la différentiation, chacun des termes où entre A_r en fournira deux. Mettant, pour ces trois superficies, leurs valeurs (8), et appelant

$$R,\quad \Phi,\quad Z$$

les forces agissant, en m, dans le sens r, $r\varphi$, z sur l'unité de volume de la matière, on peut diviser tout par le volume de l'élément, qui est

$$\Delta r.r\Delta\varphi.\Delta z;$$

ce qui donne, pour les trois équations générales d'équilibre,

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{dp_{rr}}{dr}+\frac{dp_{r\varphi}}{rd\varphi}+\frac{dp_{zr}}{dz}+\frac{p_{rr}-p_{\varphi\varphi}}{r}+\mathrm{R}=0,\\
&\frac{dp_{r\varphi}}{dr}+\frac{dp_{\varphi\varphi}}{rd\varphi}+\frac{dp_{\varphi z}}{dz}+\frac{2p_{r\varphi}}{r}+\Phi=0,\\
&\frac{dp_{zr}}{dr}+\frac{dp_{\varphi z}}{rd\varphi}+\frac{dp_{zz}}{dz}+\frac{p_{zr}}{r}+\mathrm{Z}=0.
\end{aligned}\right.$$

Elles sont identiques avec celles que donne M. Lamé [*] après avoir obtenu, avec la troisième, deux autres équations plus compliquées exprimant l'équilibre, non dans les sens r et $r\varphi$, mais dans ceux de deux coordonnées rectilignes fixes x, y, au moyen du procédé mixte mentionné au numéro précédent.

6. *Caractère analytique de l'homogénéité semi-polaire ou cylindrique.* — La matière d'un corps jouira, de la manière la plus générale, de ce genre d'homogénéité autour d'un axe z lorsqu'en mettant, dans les formules (1) des six composantes de pression,

$$\left\{\begin{array}{llllll}
\text{les expressions (6)} & \partial_r=\dfrac{dU}{dr}, & \partial_\varphi=\text{etc.}, & g_{\varphi z}=\dfrac{dV}{dz}+\dfrac{dW}{rd\varphi}, & \text{etc.},\\
\text{à la place de} & \partial_x, & \partial_y, \ \text{etc.}, & g_{yz}, & \text{etc.},\\
\text{avec} & p_{\varphi\varphi}, & p_{\psi\psi}, \ \text{etc.}, & p_{\varphi z}, & \text{etc.},\\
\text{pour} & p_{xx}, & p_{yy}, \ \text{etc.}, & p_{yz}, & \text{etc.},
\end{array}\right.$$

lorsque, dis-je, elles seront satisfaites en tous les points, ou, ce qui revient au même, lorsque de petits déplacements U, V, W y engendreront des pressions dont les grandeurs soient données par ces formules *avec les coefficients* a *les mêmes partout.*

Il y aura symétrie de contexture en chaque point par rapport aux surfaces coordonnées si les vingt et un ou quinze coefficients des expressions (1) se réduisent aux neuf ou six des expressions (2), c'est-à-

[*] *Leçons*, 1852, § 77, équations (5).

dire si l'on a partout

$$(10)\left\{\begin{aligned} p_{rr} &= \mathrm{a}\frac{d\mathrm{U}}{dr} + \mathrm{f}'\left(\frac{d\mathrm{V}}{rd\varphi} + \frac{\mathrm{U}}{r}\right) + \mathrm{e}'\frac{d\mathrm{W}}{dz}, & p_{\varphi z} &= \mathrm{d}\left(\frac{d\mathrm{V}}{dz} + \frac{d\mathrm{W}}{rd\varphi}\right),\\ p_{\varphi\varphi} &= \mathrm{f}'\frac{d\mathrm{U}}{dr} + \mathrm{b}\left(\frac{d\mathrm{V}}{rd\varphi} + \frac{\mathrm{U}}{r}\right) + \mathrm{d}'\frac{d\mathrm{W}}{dz}, \quad \text{et} & p_{zr} &= \mathrm{e}\left(\frac{d\mathrm{W}}{dr} + \frac{d\mathrm{U}}{dz}\right),\\ p_{zz} &= \mathrm{e}'\frac{d\mathrm{U}}{dr} + \mathrm{d}'\left(\frac{d\mathrm{V}}{rd\varphi} + \frac{\mathrm{U}}{r}\right) + \mathrm{c}\,\frac{d\mathrm{W}}{d\mathrm{W}}; & p_{r\varphi} &= \mathrm{f}\left(\frac{d\mathrm{U}}{rd\varphi} + \frac{d\mathrm{V}}{dr} - \frac{\mathrm{V}}{r}\right). \end{aligned}\right.$$

7. *Cylindre creux.* — Supposons que ce cylindre ou tuyau ait les rayons

$$r_0 \text{ à l'intérieur,} \qquad r_1 \text{ à l'extérieur,}$$

et jouisse de l'homogénéité ainsi que de la symétrie de contexture définies par les équations (10); qu'il ait ses parois soumises à des pressions normales constantes

$$-p_0 \text{ intérieurement,} \qquad -p_1 \text{ extérieurement,}$$

et qu'il soit fermé aux deux bouts par des fonds ou couvercles plans ou courbes. Ces fonds sont supposés soumis aux mêmes pressions, et *ajustés de telle manière,* comme dit M. Lamé, que les tractions parallèles à l'axe n'altèrent pas la forme plane des diverses sections transversales du tuyau, c'est-à-dire qu'elles produisent, en tous les points de chacune des sections, le même déplacement longitudinal W. Cette condition sera exprimée plus loin (n° **12**); elle est d'ailleurs toujours remplie sensiblement, avec des couvercles quelconques, si le tuyau est très-long et si l'on ne considère pas des points trop proches de ses extrémités.

Vu la symétrie de contexture et la normalité des pressions aux parois, les déplacements des points ne pourront s'opérer que dans les plans méridiens, et seront les mêmes aux mêmes distances r de l'axe; en sorte qu'on aura

$$(11) \qquad \frac{d\mathrm{U}}{d\varphi} = 0, \quad \frac{d\mathrm{U}}{dz} = 0, \quad \mathrm{V} = 0, \quad \frac{d\mathrm{W}}{dr} = 0, \quad \frac{d\mathrm{W}}{d\varphi} = 0;$$

d'où, formules (10),

$$(12)\left\{\begin{array}{l} p_{rr}=\mathrm{a}\frac{dU}{dr}+\mathrm{f}'\frac{U}{r}+\mathrm{e}'\frac{dW}{dz},\ p_{\varphi\varphi}=\mathrm{f}'\frac{dU}{dr}+\mathrm{b}\frac{U}{r}+\mathrm{d}'\frac{dW}{dz},\ p_{zz}=\mathrm{e}'\frac{dU}{dr}+\mathrm{d}'\frac{U}{r}+\mathrm{c}\frac{dW}{dz}.\\ \qquad\qquad p_{\varphi z}=0,\quad p_{zr}=0,\quad p_{r\varphi}=0. \end{array}\right.$$

La seconde des équations d'équilibre (9), en faisant abstraction des forces exterieures telles que la pesanteur, se trouve identiquement vérifiée; la troisième (comme le remarque M. Lamé) se réduit à

$$\frac{dp_{zz}}{dz}=0,\quad \text{d'où}\quad \frac{d^2W}{dz^2}=0;$$

d'où, γ étant une constante,

$$(13)\qquad \frac{dW}{dz}=\partial_z=\gamma,\quad W=\gamma z.$$

Enfin la première de ces équations (10), qui se réduit à

$$(14)\qquad \frac{dp_{rr}}{dr}+\frac{p_{rr}-p_{\varphi\varphi}}{r}=0,$$

prend la forme

$$(15)\qquad \mathrm{a}\frac{d^2U}{dr^2}+\frac{\mathrm{a}}{r}\frac{dU}{dr}-\mathrm{b}\frac{U}{r^2}+\frac{\mathrm{e}'-\mathrm{d}'}{\gamma}\cdot\frac{1}{r}=0.$$

On l'intègre en la changeant d'abord, par $U=ry$ (y étant une nouvelle inconnue), en

$$(16)\qquad r^2\frac{d^2y}{dr^2}+3r\frac{dy}{dr}+\frac{\mathrm{a}-\mathrm{b}}{\mathrm{a}}y+\frac{\mathrm{e}'-\mathrm{d}'}{\mathrm{a}}\gamma=0,$$

puis en posant, pour faire disparaître le dernier terme,

$$y+\frac{\mathrm{e}'-\mathrm{d}'}{\mathrm{a}-\mathrm{b}}\gamma=y',$$

ce qui la réduit à

$$(17)\qquad r^2\frac{d^2y'}{dr^2}+3r\frac{dy'}{dr}+\left(1-\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}\right)y'=0.$$

Celle-ci est homogène entre les variables y', r et leurs différentielles du premier et du second ordre. On ramène, comme on sait, une équation de ce genre à une du premier ordre entre deux nouvelles variables u, p, en y faisant $y' = ur$, $\frac{dy'}{dr} = p$, $\frac{d^2y'}{dr^2} = \frac{q}{r}$, ce qui donne de suite, en divisant par r, une expression $q = f(p, u)$, expression que l'on substitue dans l'équation $\frac{du}{p-u} = \frac{dp}{q}$, obtenue en égalant les deux valeurs de $\frac{dr}{r}$, tirées l'une de $pdr = d(ur)$, l'autre de $\frac{q}{r} = \frac{dp}{dr}$. Puis on sépare les variables de $\frac{du}{p-u} = \frac{dp}{f(p, u)}$ en faisant $p = tu$, qui donne à la fonction homogène $f(p, u)$ la forme $u\mathrm{F}(t)$, d'où l'on déduit l'équation, intégrable par quadratures,

$$(18) \qquad \frac{du}{u} = \frac{t-1}{\mathrm{F}(t) - t(t-1)}\, dt.$$

Mais, dans le cas actuel, comme dans tous ceux où cette dernière équation intégrée fournit une expression trop implicite, on ne peut pas songer à en tirer $t = pu$ en u pour le substituer dans $\frac{dr}{r} = \frac{du}{p-u}$, de manière à pouvoir opérer une deuxième intégration après y avoir remis $\frac{y'}{r}$ pour u et $\frac{r}{y'}\frac{dy'}{dr}$ pour t.

On lève heureusement cette difficulté en divisant par $t-1$ l'équation différentielle, ce qui, vu $\frac{du}{p-u} = \frac{dr}{r}$, en donne une seconde

$$(19) \qquad \frac{dr}{r} = \frac{dt}{\mathrm{F}(t) - t(t-1)}.$$

En sorte qu'on n'a plus qu'à éliminer la variable auxiliaire t entre son intégrale et celle de la précédente (18) pour avoir, avec deux constantes, la relation cherchée entre r et $u = \frac{y'}{r}$.

Appliquée à l'équation (17), écrite sous la forme

$$(20) \qquad r^2 \frac{d^2y'}{dr^2} + (1 + 2m)\, r\frac{dy'}{dr} + (m^2 - n^2)\, y' = 0,$$

cette méthode, avec cet artifice, donne

$$\frac{du}{u}+\frac{t-1}{(t+m)^2-n^2}dt=0 \quad \text{et} \quad \frac{dr}{r}+\frac{dt}{(t+m)^2-n^2}=0;$$

d'où, C_1 et C_2 étant deux constantes, et en passant des logarithmes aux nombres

$$\frac{(t+m-n)^{\frac{m+1-n}{2n}}}{(t+m+n)^{\frac{m+1+n}{2n}}}=C_1 u, \quad \frac{t+m-n}{t+m+n}r^{2n}=C_2.$$

De la seconde de ces deux intégrales, on tire $t+m=n\frac{r^{2n}+C_2}{r^{2n}-C_2}$ qui, substituée dans la première, donne, en remettant $\frac{y'}{r}$ pour u, C et C' étant d'autres constantes arbitraires,

$$(21) \qquad y'=Cr^{n-m}+C'r^{-n-m}.$$

D'où, pour l'intégrale cherchée de (17),

$$(22) \qquad y'=Cr^{-1+\sqrt{\frac{b}{a}}}+C'r^{-1-\sqrt{\frac{b}{a}}}.$$

On a donc, pour les déplacements, vu ce que représentent y et y',

$$(23) \qquad \left\{\begin{array}{l} U=Cr^{\sqrt{\frac{b}{a}}}+C'r^{-\sqrt{\frac{b}{a}}}+\frac{d'-e'}{a-b}\gamma r,\\ V=0, \quad W=\gamma z;\end{array}\right.$$

et, pour les dilatations (6) et les pressions (12),

$$(24) \qquad \left\{\begin{array}{l} \partial_r=\frac{dU}{dr}=\sqrt{\frac{b}{a}}Cr^{-1+\sqrt{\frac{b}{a}}}-\sqrt{\frac{b}{a}}C'r^{-1-\sqrt{\frac{b}{a}}}+\frac{d'-e'}{a-b}\gamma,\\ \partial_\varphi=\frac{U}{r}=Cr^{-1+\sqrt{\frac{b}{a}}}+C'r^{-1-\sqrt{\frac{b}{a}}}+\frac{d'-e'}{a-b}\gamma,\\ \partial_z=\frac{dW}{dz}=\gamma;\end{array}\right.$$

$$
(25)\begin{cases}
p_{rr} = \mathrm{C}\left(\sqrt{\mathrm{ab}}+\mathrm{f}'\right) r^{\sqrt{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}}-1} - \mathrm{C}'\left(\sqrt{\mathrm{ab}}-\mathrm{f}'\right) r^{-\sqrt{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}}-1} + \dfrac{(\mathrm{a}+\mathrm{f}')\,\mathrm{d}'-(\mathrm{b}+\mathrm{f}')\,\mathrm{e}'}{\mathrm{a}-\mathrm{b}}\gamma,\\
p_{\varphi\varphi} = \mathrm{C}\left(\mathrm{b}+\mathrm{f}'\sqrt{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}}\right) r^{\sqrt{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}}-1} + \mathrm{C}'\left(\mathrm{b}-\mathrm{f}'\sqrt{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}}\right) r^{-\sqrt{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}}-1} + \dfrac{(\mathrm{a}+\mathrm{f}')\,\mathrm{d}'-(\mathrm{b}+\mathrm{f}')\,\mathrm{e}'}{\mathrm{a}-\mathrm{b}}\gamma,\\
p_{zz} = \mathrm{C}\left(\mathrm{d}'+\mathrm{e}'\sqrt{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}}\right) r^{\sqrt{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}}-1} + \mathrm{C}'\left(\mathrm{d}'-\mathrm{e}'\sqrt{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}}\right) r^{-\sqrt{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}}-1} + \left(\dfrac{\mathrm{d}'^2-\mathrm{e}'^2}{\mathrm{a}-\mathrm{b}}+\mathrm{c}\right)\gamma.
\end{cases}
$$

On voit, quand les élasticités b et a, ou d′ et e′, sont inégales, que la traction longitudinale p_{zz} n'est pas constante, bien que la dilatation ∂_z le soit. Cette traction varie alors avec la distance r à l'axe, comme font toujours p_{rr} et $p_{\varphi\varphi}$, ainsi que les dilatations normale et tangentielle ∂_r, ∂_φ.

Les constantes C, C′, γ doivent être déterminées par les conditions à remplir aux surfaces, à savoir :

$$
(26)\quad \begin{cases} \text{qu'on ait } \; p_{rr} = -p_0 \quad \text{pour} \quad r = r_0,\\ \phantom{\text{qu'on ait }}\; p_{rr} = -p_1 \quad \text{pour} \quad r = r_1; \end{cases}
$$

et que les tractions p_{zz} s'exerçant longitudinalement dans l'étendue de l'épaisseur $r_1 - r_0$, sur toutes les couronnes élémentaires $2\pi r dr$ de la section transversale, fassent équilibre à la différence des pressions $-p_0$, $-p_1$, s'exerçant sur chaque couvercle à l'intérieur et à l'extérieur, c'est-à-dire qu'on ait

$$
(27)\qquad p_0 \pi r_0^2 - p_1 \pi r_1^2 = 2\pi \int_{r_0}^{r_1} p_{zz}\, r dr.
$$

Il en résulte

$$
(28)\begin{cases}
\left(\sqrt{\mathrm{ab}}+\mathrm{f}'\right) r_0^{-1+\sqrt{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}}}\mathrm{C} - \left(\sqrt{\mathrm{ab}}-\mathrm{f}'\right) r_0^{-1-\sqrt{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}}}\mathrm{C}' + \dfrac{(\mathrm{a}+\mathrm{f}')\,\mathrm{d}'-(\mathrm{b}+\mathrm{f}')\,\mathrm{e}'}{\mathrm{a}-\mathrm{b}}\gamma = -p_0,\\
\left(\sqrt{\mathrm{ab}}+\mathrm{f}'\right) r_1^{-1+\sqrt{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}}}\mathrm{C} - \left(\sqrt{\mathrm{ab}}-\mathrm{f}'\right) r_1^{-1-\sqrt{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}}}\mathrm{C}' + \dfrac{(\mathrm{a}+\mathrm{f}')\,\mathrm{d}'-(\mathrm{b}+\mathrm{f}')\,\mathrm{e}'}{\mathrm{a}-\mathrm{b}}\gamma = -p_1,\\
2\left(\mathrm{d}'+\mathrm{e}'\sqrt{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}}\right)\dfrac{r_1^{1+\sqrt{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}}} - r_0^{1+\sqrt{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}}}}{1+\sqrt{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}}}\mathrm{C} + 2\left(\mathrm{d}'-\mathrm{e}'\sqrt{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}}\right)\dfrac{r_1^{1-\sqrt{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}}} - r_0^{1-\sqrt{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}}}}{1-\sqrt{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}}}\mathrm{C}'\\
\qquad + \left(\dfrac{\mathrm{d}'^2-\mathrm{e}'^2}{\mathrm{a}-\mathrm{b}}+\mathrm{c}\right)(r_1^2-r_0^2)\,\gamma = p_0 r_0^2 - p_1 r_1^2,
\end{cases}
$$

équations du premier degré, d'où l'on tirera les valeurs de C, C' et $\gamma = \partial_z$, à mettre dans (23), (24), (25), et que l'on mettra aussi, si l'on veut avoir la proportion de l'augmentation de la capacité intérieure ou du volume de l'espace vide, dans l'expression de $2\partial_\varphi + \gamma$ pour $r = r_0$, qui est, U_0 exprimant U pour cette valeur de r,

$$(29)\quad 2\frac{U_0}{r_0} + \gamma = 2C r_0^{-1+\sqrt{\frac{b}{a}}} + 2C' r_0^{-1-\sqrt{\frac{b}{a}}} + \left(2\,\frac{d'-e'}{a-b} + 1\right)\gamma.$$

Les équations du premier degré (28) en C, C', γ se simplifient lorsqu'on suppose très-mince l'enveloppe cylindrique. Soient alors

$$\left\{\begin{array}{l} \varepsilon \text{ l'épaisseur} = r_1 - r_0, \quad \mathrm{r} \text{ le rayon moyen} = \dfrac{r_0 + r_1}{2}, \quad \sqrt{\dfrac{b}{a}} = n, \\ \text{d'où} \quad r_1^i = \mathrm{r}^i + \dfrac{i\varepsilon}{2}\mathrm{r}^{i-1}, \quad r_0^i = \mathrm{r}^i - \dfrac{i\varepsilon}{2}\mathrm{r}^{i-1}; \end{array}\right.$$

ces équations se réduisent, en ajoutant ensemble les deux premières, puis en les retranchant l'une de l'autre, à

$$(30)\left\{\begin{array}{l} (na + f')\mathrm{r}^{n-1}C - (na - f')\mathrm{r}^{-n-1}C' + \dfrac{(a+f')d' - (b+f')e'}{a-b}\gamma = -\dfrac{p_0 + p_1}{2}, \\ (n-1)(na + f')\mathrm{r}^{n-2}C + (n+1)(na - f')\mathrm{r}^{-n-2}C' = \dfrac{p_0 - p_1}{\varepsilon}, \\ (d' + ne')\mathrm{r}^n C + (d' - ne')\mathrm{r}^{-n}C' + \left(\dfrac{d'^2 - e'^2}{a-b} + c\right)\mathrm{r}\gamma = \dfrac{(p_0 - p_1)\mathrm{r}^2}{2\varepsilon} - \dfrac{(p_0 + p_1)\mathrm{r}}{2}. \end{array}\right.$$

Résolvant et substituant dans (25), (24) en négligeant ε^2, on obtient d'abord, toutes réductions faites, l'expression simple

$$(31)\qquad p_{\varphi\varphi} = \frac{(p_0 - p_1)\mathrm{r}}{\varepsilon}.$$

Elle revient, sauf ce qui résulte de la pression atmosphérique extérieure p_1, à celle qui a été donnée depuis longtemps par Mariotte [*] pour la traction *tangentielle* $p_{\varphi\varphi}\varepsilon$ de l'unité de longueur de la paroi d'un tuyau de conduite d'eau; expression qui est, comme on sait, facile à

---

[*] *Traité du mouvement des eaux*, Ve partie, 2e discours.

démontrer. Puis on trouve, pour les dilatations tangentielle et longitudinale, qui sont plus essentielles à connaître que les tractions lorsque l'on veut exprimer les conditions de résistance,

$$(32)\quad \begin{cases} \partial_\varphi = \dfrac{\mathrm{U}}{r} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{2\mathrm{ac} - \mathrm{ad}' + \mathrm{e}'\mathrm{f}' - 2\mathrm{e}'^2}{\mathrm{abc} - \mathrm{ad}'^2 - \mathrm{be}'^2 - \mathrm{cf}'^2 + 2\mathrm{d}'\mathrm{e}'\mathrm{f}'}\cdot\dfrac{(p_0 - p_1)\,\mathrm{r}}{\varepsilon}, \\[2ex] \partial_z = \gamma = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\mathrm{ab} - 2\mathrm{ad}' + 2\mathrm{e}'\mathrm{f}' - \mathrm{f}'^2}{\mathrm{abc} - \mathrm{ad}'^2 - \mathrm{be}'^2 - \mathrm{cf}'^2 + 2\mathrm{d}'\mathrm{e}'\mathrm{f}'}\cdot\dfrac{(p_0 - p_1)\,\mathrm{r}}{\varepsilon}. \end{cases}$$

Quand les rayons r sont des axes de symétrie de contexture, c'est-à-dire quand on a (n° 5)

$$\mathrm{b} = \mathrm{c} = 2\mathrm{d} + \mathrm{d}' \quad \text{ou} \quad = 3\mathrm{d}, \quad \mathrm{e}' = \mathrm{f}',$$

les expressions de C, C', γ à tirer de (28) pour des valeurs quelconques de l'épaisseur $r_1 - r_0$ ne se simplifient presque pas.

Mais elles se simplifient beaucoup si les axes de symétrie en chaque point sont les lignes parallèles à l'axe du tuyau, ou si, seulement, l'élasticité est la même dans le sens du rayon vecteur et dans le sens de la tangente à son cercle, ce qui aura lieu ordinairement pour les pièces forées; en sorte que

$$\mathrm{d}' = \mathrm{e}', \quad \mathrm{a} = \mathrm{b}, \quad \sqrt{\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}} = 1.$$

Alors une partie des termes des formules (23), (24), (25), (28) prend la forme $\frac{0}{0}$.

On peut éviter cette indétermination en faisant d'abord $\mathrm{d}' = \mathrm{e}'$, ce qui annule le dernier terme de la valeur (23) de U, qui, ensuite, en faisant $\mathrm{a} = \mathrm{b}$, se réduit à

$$\mathrm{U} = \mathrm{C}r + \frac{\mathrm{C}'}{r}.$$

La même chose se trouve en faisant $\mathrm{b} = \mathrm{a}$ en premier lieu, mais après avoir remplacé C par une autre constante $\mathrm{C}_1 - \dfrac{\mathrm{d}' - \mathrm{e}'}{\mathrm{a} - \mathrm{b}}\gamma$, d'où

$$\mathrm{U} = \mathrm{C}_1 r^{\sqrt{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}}} + \mathrm{C}' r^{-\sqrt{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}}} + (\mathrm{d}' - \mathrm{e}')\,\gamma\,\frac{r - r^{\sqrt{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}}}}{\mathrm{a} - \mathrm{b}},$$

qui, par $\mathrm{b} = \mathrm{a}$, devient

$$\mathrm{U} = \mathrm{C}_1 r + \frac{\mathrm{C}'}{r} + \frac{\mathrm{d}' - \mathrm{e}'}{2\mathrm{a}} \gamma . r \log r.$$

Cette intégrale de l'équation (15), pour le cas $\mathrm{b} = \mathrm{a}$, se réduit à ses deux premiers termes lorsqu'on a aussi $\mathrm{d}' = \mathrm{e}'$.

Mais on obtient la même chose en remontant à l'équation différentielle (16) elle-même; car, par $\mathrm{d}' = \mathrm{e}'$, $\mathrm{a} = \mathrm{b}$, elle se réduit à

$$(33) \qquad r^2 \frac{d^2 y}{dr^2} + 3r \frac{dy}{dr} = 0.$$

Et comme le premier membre, multiplié par r, est la dérivée de $r^3 \frac{dy}{dr}$, on a, $-2\mathrm{C}'_1$ et C_1 étant des constantes,

$$r^3 \frac{dy}{dr} = -2\mathrm{C}'_1, \quad \frac{dy}{dr} = -2\mathrm{C}'_1 r^{-3}, \quad y = -2\mathrm{C}'_1 \frac{r^{-2}}{-2} + \mathrm{C}_1,$$

ou

$$(34) \qquad \mathrm{U} = \mathrm{C}_1 r + \frac{\mathrm{C}'_1}{r}.$$

On en déduit

$$(35) \quad \left\{ \begin{aligned} p_{rr} &= \mathrm{a}\left(\mathrm{C}_1 - \frac{\mathrm{C}'_1}{r^2}\right) + \mathrm{f}'\left(\mathrm{C}_1 + \frac{\mathrm{C}'_1}{r^2}\right) + \mathrm{d}'\gamma, \\ p_{\varphi\varphi} &= \mathrm{f}'\left(\mathrm{C}_1 - \frac{\mathrm{C}'_1}{r^2}\right) + \mathrm{a}\left(\mathrm{C}_1 + \frac{\mathrm{C}'_1}{r^2}\right) + \mathrm{d}'\gamma, \\ p_{zz} &= 2\mathrm{d}'\mathrm{C}_1 + \mathrm{c}\gamma; \end{aligned} \right.$$

$$(36) \quad \left\{ \begin{aligned} -p_0 &= (\mathrm{a} + \mathrm{f}')\mathrm{C}_1 - \frac{\mathrm{a} - \mathrm{f}'}{r_0^2}\mathrm{C}'_1 + \mathrm{d}'\gamma, \\ -p_1 &= (\mathrm{a} + \mathrm{f}')\mathrm{C}_1 - \frac{\mathrm{a} - \mathrm{f}'}{r_1^2}\mathrm{C}'_1 + \mathrm{d}'\gamma, \\ p_0 r_0^2 - p_1 r_1^2 &= (2\mathrm{d}'\mathrm{C}_1 + \mathrm{c}\gamma)(r_1^2 - r_0^2); \end{aligned} \right.$$

dont on tire, quelle que soit l'épaisseur $r_1 - r_0$,

$$(37) \quad \left\{ \begin{aligned} &\gamma = \frac{\mathrm{a} + \mathrm{f}' - 2\mathrm{d}'}{\mathrm{c}(\mathrm{a} + \mathrm{f}') - 2\mathrm{d}'^2} \cdot \frac{p_0 r_0^2 - p_1 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2}, \\ &\mathrm{C}'_1 = \frac{(p_0 - p_1) r_0^2 r_1^2}{(\mathrm{a} - \mathrm{f}')(r_1^2 - r_0^2)}, \quad \mathrm{C}_1 = \frac{\mathrm{c} - \mathrm{e}'}{\mathrm{c}(\mathrm{a} + \mathrm{f}') - 2\mathrm{d}'^2} \frac{p_0 r_0^2 - p_1 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2}; \end{aligned} \right.$$

d'où

$$(38) \qquad U = \frac{c - e'}{c(a + f') - 2e'^2} \frac{p_0 r_0^2 - p_1 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} r + \frac{(p_0 - p_1) r_0^2 r_1^2}{(a - f')(r_1^2 - r_0^2)} \cdot \frac{1}{r}.$$

Les formules sont aussi simples, dans ce cas de contexture hétérotrope semi-polairement homogène, que dans le cas d'isotropie.

Elles se réduisent, dans ce dernier cas, pour lequel

$$a = c = 2f + f', \quad e' = f',$$

aux formules trouvées en 1828 par MM. Lamé et Clapeyron [*] et appliquées par M. Lamé à la détermination des augmentations de capacité des piézomètres cylindriques qui ont été employés par M. Regnault dans ses belles expériences sur la compressibilité des liquides [**].

En mettant pour U sa valeur (38) dans (6)

$$\partial_\varphi = \frac{U}{r},$$

on voit que les proportions des dilatations tangentielles des couches cylindriques de l'enveloppe solide diminuent sensiblement à mesure que l'on s'éloigne de l'axe. Celle de la paroi intérieure atteint presque le *double* de celle de la paroi extérieure quand l'épaisseur $r_1 - r_0$ est le sixième du diamètre extérieur $2r_1$, si la matière est isotrope.

On voit au reste, par notre analyse, que lorsque la matière des piézomètres cylindriques (la même chose pourra se conclure ci-après pour les piézomètres sphériques), au lieu d'être isotrope, n'est qu'homogène, les expressions des dilatations peuvent différer non-seulement par la valeur des constantes, mais, même, *par la forme*, des expressions relatives au cas rare d'isotropie. Cela explique suffisamment les différences qui ont pu être trouvées entre les résultats de diverses

---

[*] *Voyez* aussi *Leçons sur l'élasticité* de M. Lamé.

[**] *Relation des expériences, etc.* — *Voyez* aussi la nouvelle édition (1864) des *Leçons de Navier*, Appendice V, §§ 57 et 58.

expériences et ceux qu'on tirait des formules d'isotropie à un seul paramètre, de Navier, Poisson, etc. Il ne faut donc point conclure, de pareilles différences, que celles-ci soient défectueuses et qu'il faille y introduire deux paramètres dont le rapport varie avec la nature chimique de la substance isotrope, contrairement à ce qui résulte de la loi moléculaire dans ce qu'elle a de commun à toutes, et qu'il faut toujours invoquer. Les formules d'hétérotropie ci-dessus offrent, sans rien d'illogique, des paramètres en nombre encore plus grand, pour expliquer tous les résultats que l'expérience présente.

Voyons ce que deviennent les formules (23) à (25) du cas général d'élasticité inégale dans les trois sens lorsqu'on prend, pour les pressions, les formules (3) de distribution *ellipsoïdale* des élasticités directes, à trois paramètres d, e, f, expressions qui conviennent, avons-nous dit, pour les corps à cristallisation confuse, comme sont tous les matériaux de construction; c'est-à-dire lorsque l'on a, en effaçant les accents,

$$(39)\qquad \begin{cases} \mathrm{a} = 3\dfrac{\mathrm{ef}}{\mathrm{d}}, \quad \mathrm{b} = 3\dfrac{\mathrm{fd}}{\mathrm{e}}, \quad \mathrm{c} = 3\dfrac{\mathrm{de}}{\mathrm{f}}, \\ \sqrt{\dfrac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{e}} = n, \end{cases}$$

$$(40)\qquad \begin{cases} p_{rr} = 3\dfrac{\mathrm{ef}}{\mathrm{d}}\partial_r + \mathrm{f}\partial_\varphi + \mathrm{e}\partial_z, \\ p_{\varphi\varphi} = \mathrm{f}\partial_r + 3\dfrac{\mathrm{fd}}{\mathrm{e}}\partial_\varphi + \mathrm{d}\partial_z, \\ p_{zz} = \mathrm{e}\partial_r + \mathrm{d}\partial_\varphi + 3\dfrac{\mathrm{de}}{\mathrm{f}}\partial_z, \end{cases}$$

Les expressions et équations générales (30), (32) se réduisent à

$$(41)\qquad \begin{cases} \mathrm{U} = \mathrm{C}r^{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{e}}} + \mathrm{C}'r^{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{e}}} - \dfrac{\mathrm{d}}{3\mathrm{f}\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{e}}+1\right)}\gamma r, \\ \mathrm{V} = 0, \quad \mathrm{W} = \gamma z; \end{cases}$$

$$(42)\quad\left\{\begin{aligned}
p_{rr} &= 4\mathrm{f}\,\mathrm{C}r^{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{e}}-1} - 2\mathrm{f}\,\mathrm{C}'r^{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{e}}-1} + \frac{2\mathrm{d}}{3\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{e}}+1\right)}\gamma,\\
p_{\varphi\varphi} &= 4\mathrm{f}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{e}}\,\mathrm{C}r^{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{e}}-1} + 2\mathrm{f}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{e}}\,\mathrm{C}'r^{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{e}}-1} + \frac{2\mathrm{d}}{3\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{e}}+1\right)}\gamma,\\
p_{zz} &= 2\mathrm{d}\,\mathrm{C}r^{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{e}}-1} + \frac{8}{3}\mathrm{d}\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{f}}\gamma;
\end{aligned}\right.$$

$$(43)\quad\left\{\begin{aligned}
&2r_0^{n-1}\mathrm{C} - r_0^{-n-1}\mathrm{C}' + \frac{1}{n+1}\frac{\mathrm{d}}{3\mathrm{f}}\gamma = -\frac{p_0}{2\mathrm{f}},\\
&2r_1^{n-1}\mathrm{C} - r_1^{-n-1}\mathrm{C}' + \frac{1}{n+1}\frac{\mathrm{d}}{3\mathrm{f}}\gamma = -\frac{p_1}{2\mathrm{f}},\\
&\frac{r_1^{n+1} - r_0^{n+1}}{n+1}\mathrm{C} + \frac{2\mathrm{d}}{3n\mathrm{f}}(r_1^2 - r_0^2)\gamma = \frac{p_0 r_0^2 - p_1 r_1^2}{4\mathrm{d}}.
\end{aligned}\right.$$

On tire, de celles-ci, les suivantes

$$(44)\quad\left\{\begin{aligned}
\gamma &= \frac{3(n+1)}{2\mathrm{d}}\,\frac{(r_1^{n+1}-r_0^{n+1})(p_0 r_0^{n+1} - p_1 r_1^{n+1}) - (n+1)\frac{\mathrm{f}}{\mathrm{d}}(r_1^{2n}-r_0^{2n})}{(r_1^{n+1}-r_0^{n+1})^2 - 4\frac{(n+1)^2}{n}(r_1^2-r_0^2)(r_1^{2n}-r_0^{2n})},\\
\mathrm{C} &= \frac{n+1}{r_1^{n+1}-r_0^{n+1}}\left(\frac{p_0 r_0^2 - p_1 r_1^2}{4\mathrm{d}} - 2\mathrm{d}\frac{r_1^2-r_0^2}{3n\mathrm{f}}\gamma\right),\\
\mathrm{C}' &= 2r_0^{2n}\mathrm{C} + r_0^{n+1}\left(\frac{p_0}{2\mathrm{f}} + \frac{1}{n+1}\frac{\mathrm{d}}{3\mathrm{f}}\gamma\right),
\end{aligned}\right.$$

qui se simplifient en effaçant p_1, ordinairement la pression de l'atmosphère; et qui se réduisent, quand l'enveloppe est mince ou quand r_1 et $r_0 = \mathrm{r} \pm$ la très-petite demi-épaisseur $\frac{1}{2}\varepsilon$, à

$$(45)\quad\left\{\begin{aligned}
&\mathrm{C} = \frac{8\mathrm{e}-\mathrm{f}}{60\mathrm{fd}}\frac{(p_0-p_1)\mathrm{r}^{2-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{e}}}}{\varepsilon},\quad \mathrm{C}' = \frac{7\mathrm{d}+8\mathrm{e}+\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{e}}-1\right)\mathrm{f}}{30\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{e}}+1\right)\mathrm{f}}\frac{(p_0-p_1)\mathrm{r}^{2+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{e}}}}{\varepsilon},\\
&\gamma = \partial_z = \frac{2\mathrm{f}-\mathrm{e}}{10\mathrm{de}}\frac{(p_0-p_1)\mathrm{r}}{\varepsilon},\quad \partial_\varphi = \frac{\mathrm{U}}{r} = \frac{8\mathrm{e}-\mathrm{f}}{20\mathrm{fd}}\frac{(p_0-p_1)\mathrm{r}}{\varepsilon}.
\end{aligned}\right.$$

Bien que ces formules aient été tirées de celles (23) à (28), elles ne donnent plus de $\frac{0}{0}$ lorsqu'on y suppose que $n=1$ ou $d=e$, $a=b$, ou lorsque les rayons r sont des axes de symétrie. En effet, les relations ellipsoïdales $a=3\frac{ef}{d}$, $b=3\frac{fd}{e}$, $c=3\frac{de}{f}$ mettent en évidence et permettent de supprimer un facteur commun aux deux termes de fonctions telles que $\frac{d-e}{a-b}$. Avec ce mode de distribution des élasticités généralement inégales en trois sens, on n'a donc pas besoin de recommencer l'intégration quand on vient ensuite à supposer égale élasticité en deux des sens.

8. *Dilatations d'un cylindre creux hétérotrope exprimées en fonction des modules d'élasticité de traction en divers sens.* — Les élasticités *latérales* d', e', f' sont difficiles à mesurer, même par des expériences de torsion, en admettant avec nous leur égalité aux élasticités tangentielles d, e, f (n° **2**); car, exécutées sur le cylindre entier, ces expériences ne peuvent donner que la première d. Le mesurage direct des élasticités dites *directes* a, b, c est à peu près impossible.

Mais, comme on sait, l'on mesure facilement, tant sur une pièce entière que sur de petits prismes qu'on en extrait en plusieurs sens, pourvu qu'ils aient une certaine longueur, les *modules d'élasticité de traction* de Young et Navier, ou les rapports de la traction longitudinale qu'on y exerce, à l'allongement qu'elle produit par unité de longueur. Appelons

$$E_x \text{ ou } E_r,\quad E_y \text{ ou } E_\varphi,\quad E_z$$

les modules d'élasticité de prismes extraits dans les trois sens que les sous-lettres indiquent. Les trois premières formules de composantes (2), en faisant $p_{yy}=0$, $p_{zz}=0$ pour exprimer qu'il n'y a aucune pression sur les faces latérales d'un petit prisme dont les arêtes sont parallèles aux x, et en éliminant les contractions latérales ∂_x, ∂_z, donnent la valeur de $E_x=\frac{p_{xx}}{\partial_x}$; et comme on obtient de la même manière les modules des deux autres sens, l'on a

$$(46)\quad E_x=\frac{abc-ad'^2-be'^2-cf'^2+2d'e'f'}{bc-d'^2},\quad E_y=\frac{\text{même num}^r}{ca-e'^2},\quad E_z=\frac{\text{même num}^r}{ab-f'^2}.$$

On ne peut pas, comme on voit, exprimer les six coefficients a, b,..., f' entrant dans les formules (2) ou dans celles (23) à (28) du cylindre creux, au moyen de ces trois modules d'élasticité de traction; il faudrait, pour y arriver, poser trois autres équations, en mesurant encore trois modules sur des prismes extraits dans des directions obliques à x, y, z ou à r, $r\varphi$, z, par exemple dans les directions bissectrices des trois angles yz, zx, xy.

Mais toutes les formules d'élasticité symétrique en chaque point par rapport à trois plans, et par conséquent, comme nous avons dit (n° **3**), toutes celles qui sont relatives aux matériaux et autres solides amorphes ou à pâte cristalline confuse, peuvent être exprimées au moyen de trois modules de traction seulement, si l'on admet avec nous la distribution ellipsoïdale des élasticités directes autour de chaque point (même n° **3**), car

$$(47)\left\{\begin{array}{l} \mathrm{a}=3\,\frac{\mathrm{ef}}{\mathrm{d}},\ \mathrm{b}=3\,\frac{\mathrm{fd}}{\mathrm{e}},\ \mathrm{c}=3\,\frac{\mathrm{de}}{\mathrm{f}},\ \text{ou}\ 3\mathrm{d}=\sqrt{\mathrm{bc}},\ 3\mathrm{e}=\sqrt{\mathrm{ca}},\ 3\mathrm{f}=\sqrt{\mathrm{ab}},\\ \text{donnent}\ \mathrm{E_x}=\frac{20\,\mathrm{def}}{8\mathrm{d}^2}=\frac{5}{2}\frac{\mathrm{ef}}{\mathrm{d}}=\frac{5}{6}\mathrm{a},\ \mathrm{E_y}=\frac{5}{2}\frac{\mathrm{fd}}{\mathrm{e}}=\frac{5}{6}\mathrm{b},\ \mathrm{E_z}=\frac{5}{2}\frac{\mathrm{de}}{\mathrm{f}}=\frac{5}{6}\mathrm{c}. \end{array}\right.$$

En faisant donc, dans les formules (41) à (45),

$$(48)\quad \mathrm{d}=\frac{2}{5}\sqrt{\mathrm{E}_\varphi\mathrm{E}_z},\quad \mathrm{e}=\frac{2}{5}\sqrt{\mathrm{E}_z\mathrm{E}_r},\quad \mathrm{f}=\frac{2}{5}\sqrt{\mathrm{E}_r\mathrm{E}_\varphi},\quad n=\sqrt{\frac{\mathrm{E}_\varphi}{\mathrm{E}_r}},$$

tout se trouvera exprimé en fonction de trois modules de traction E.

On aura, par exemple [expressions (41), (42)], pour le cylindre creux d'une épaisseur quelconque,

$$(49)\left\{\begin{array}{l} \mathrm{U}=\mathrm{C}r^{\sqrt{\frac{\mathrm{E}_\varphi}{\mathrm{E}_r}}}+\mathrm{C}'r^{-\sqrt{\frac{\mathrm{E}_\varphi}{\mathrm{E}_r}}}-\frac{1}{3}\frac{\sqrt{\mathrm{E}_z}}{\sqrt{\mathrm{E}_r}+\sqrt{\mathrm{E}_\varphi}},\\ p_{\varphi\varphi}=\frac{8}{5}\mathrm{E}_\varphi\mathrm{C}r^{\sqrt{\frac{\mathrm{E}_\varphi}{\mathrm{E}_r}}-1}+\frac{4}{5}\mathrm{E}_\varphi\mathrm{C}'r^{-\sqrt{\frac{\mathrm{E}_\varphi}{\mathrm{E}_r}}-1}+\frac{4}{15}\frac{\sqrt{\mathrm{E}_r\mathrm{E}_\varphi\mathrm{E}_z}}{\sqrt{\mathrm{E}_r}+\sqrt{\mathrm{E}_\varphi}}\gamma\ [*]. \end{array}\right.$$

---

[*] Les formules (30) à (35) ci-dessus, dont se déduisent toutes les suivantes, reviennent à celles qu'on voit à l'extrait de mon Mémoire du 21 mai 1860, publié aux

Et, pour un cylindre mince [expressions (45)],

$$(50)\quad \partial_z = \gamma = \frac{1}{4}\,\frac{2\sqrt{E_\varphi}-\sqrt{E_z}}{E_z\sqrt{E_\varphi}}\,\frac{p_0-p_1}{\varepsilon}\,r,\quad \partial_\varphi = \frac{1}{8}\,\frac{8\sqrt{E_z}-\sqrt{E_\varphi}}{E_\varphi\sqrt{E_z}}\,\frac{p_0-p_1}{\varepsilon}\,r.$$

Comptes rendus, t. L, p. 932. Je disais explicitement, à ma lecture, ainsi qu'à un article imprimé au *Cosmos* de la même semaine, que les *coefficients* des élasticités inégales en divers sens *passaient en exposants* des rayons vecteurs, ce qui ressort du reste de ces formules.

M. S. Virgile, dans une Note récente (8 mai 1865, *id.*, t. LX, p. 962) *sur le frettage des bouches à feu*, a donné également, de la *force de tension des fibres circulaires*, ou de ce qui est appelé ici $p_{\varphi\varphi}$, des expressions où les modules E_φ, E_r des élasticités tangentielle et normale à ces fibres figurent aussi, pour la racine carrée de leur rapport mutuel, en exposants des rayons. Mais ces expressions diffèrent essentiellement de celles que je viens de donner. Cela vient de ce que leur auteur, voulant éviter l'emploi des formules de la théorie générale de l'élasticité, assimile, comme il le croit permis, les effets des tensions ou pressions qui s'exercent à l'intérieur d'un corps, à ceux de la traction d'une fibre isolée, ou d'un petit prisme dont les faces latérales sont libres. Cela reviendrait à supposer qu'on a les formules monômes

$$p_{rr} = E_r\partial_r,\quad p_{\varphi\varphi} = E_\varphi\partial_\varphi$$

au lieu des deux premières formules trinômes

$$(10)\ \text{ou}\ (40)\quad p_{rr} = a\partial_r + f'\partial_\varphi + e'\partial_z = 3\,\frac{ef}{d}\,\partial_r + \ldots,\quad p_{\varphi\varphi} = f'\partial_r + b\partial_\varphi + d'\partial_z = \ldots,$$

ou, en substituant (48),

$$(40\ bis)\quad p_{rr} = \frac{6}{5}\,E_r\partial_r + \frac{2}{5}\sqrt{E_rE_\varphi}\,\partial_\varphi + \frac{2}{5}\sqrt{E_rE_z}\,\partial_z,\quad p_{\varphi\varphi} = \frac{2}{5}\sqrt{E_\varphi E_r}\,\partial_r + \frac{6}{5}E_\varphi\partial_\varphi + \frac{2}{5}\sqrt{E_\varphi E_z}\,\partial_z.$$

Cette supposition conduit, en effet, aux expressions que donne M. Virgile pour ses forces dites du *groupe principal* $\left(\text{sauf le rapport } \frac{r_1}{r_0} \text{ des rayons au lieu du rapport } \frac{r_1^2}{r_0^2} \text{ de leurs carrés, qui entrent dans ses deux premières formules}\right)$.

Il pose, il est vrai, à côté de ces expressions, d'autres expressions qui sont relatives à ce qu'il appelle les forces du *groupe secondaire*, et qui sont les tensions ou pressions tangentielles *engendrées* par les tensions ou pressions normales, ou réciproquement, lorsqu'un petit prisme de même matière soumis aux unes est *assujetti* ou *contenu* dans le sens des autres, c'est-à-dire lorsqu'il est astreint à conserver ses dimensions dans ces derniers sens, au lieu d'être libre de s'enfler ou de se rétrécir perpendiculairement à ceux de sollicitation. M. Virgile dit que ces deux groupes de forces se super-

9. *Application aux homogénéités polaires, ou du genre sphériconique et du sous-genre sphérique. Établissement simple des formules.* — Prenons, avec M. Lamé, pour coordonnées du point m d'un corps :

r, rayon vecteur Om de ce point, à partir d'un point central fixe O;

φ, sa latitude, ou l'angle que fait r avec un plan fixe ou *équateur* passant par O;

ψ, sa longitude, angle que le méridien de m, c'est-à-dire le plan mené par r perpendiculairement à l'équateur, fait avec un méridien fixe;

en sorte que les surfaces orthogonales coordonnées sont des sphères de rayon r, des *cônes de latitude* ayant pour axe l'intersection commune des méridiens et des bases circulaires de rayons $r\cos\varphi$ pour des côtés r; enfin des plans méridiens.

En sorte que :

U, V, W seront les projections du petit déplacement éprouvé par le point m, sur le prolongement de r, sur l'élément $rd\varphi$ de son cercle méridien, du côté de sa rencontre avec la moitié positive de l'axe polaire fixe; enfin sur l'élement $r\cos\varphi\, d\varphi$ de son *cercle de latitude* parallèle à l'équateur et ayant son centre sur l'axe, en comptant W positif du côté opposé au méridien fixe;

p_{rr}, $p_{\varphi\varphi}$, $p_{\psi\psi}$, $p_{\varphi\psi}$, $p_{\psi r}$, $p_{r\varphi}$ seront les composantes de pression, en m, sur l'unité superficielle des éléments des trois surfaces orthogonales conjuguées.

---

posent et confondent leurs effets. Mais, bien qu'il présente une évaluation des forces du second groupe, en donnant à leurs expressions la même forme qu'à celles des forces du premier, il ne les combine point ensemble, ou il n'en compose pas l'effet résultant ou total. Il dit au contraire que le premier groupe intéresse seul le plus souvent les solutions, et qu'on peut abstraire l'autre. Il fait aussi abstraction de la pression ou traction longitudinale, et des pressions transversales qu'elle *engendre* nécessairement de la même manière, dans le sens φ comme dans le sens r.

Notre solution n'oblige pas à ces suppressions que rien n'autorise, et dispense de faire de pareilles divisions et distinctions; car les formules générales de l'élasticité (1) ou (2), ou (10), (40), tiennent compte simultanément de tous les effets, directs ou latéraux, de chaque pression composante, ou autre force donnée. Je présente comme seules vraies les expressions $\frac{U}{r}$ [de (41)], et (42) ou (49), qu'elle donne pour ∂_φ et $p_{\varphi\varphi}$.

Et nous appellerons :

R, Φ, Ψ les composantes, suivant les mêmes trois directions (de r prolongé et des tangentes au *méridien* et au *parallèle* de m), de la force extérieure qui agit à la manière de la pesanteur sur les particules de l'unité de volume d'un petit élément solide dont m fait partie.

Posons directement, comme nous avons fait au n° 5 avec les coordonnées semi-polaires, l'équation de l'équilibre de translation, dans les sens r, φ, ψ où s'estiment U, V, W, d'un élément de volume terminé par deux sphères distantes de Δr, deux cônes ayant des demi-angles au centre différant de $\Delta\varphi$, et deux méridiens distants angulairement de $\Delta\psi$. Pour cela plaçons (n° 5) le point m à son milieu, ou à l'intersection des trois surfaces moyennes entre celles-là, et appelons

$$(51)\quad A_r = r\Delta\varphi . r\cos\varphi\Delta\psi, \quad A_\varphi = r\cos\varphi\Delta\psi . \Delta r, \quad A_\psi = r\Delta\varphi . \Delta r$$

les portions de leurs trois aires interceptées par les faces de l'élément. Nous aurons d'abord (même n° 5) les sommes suivantes de composantes de pressions

$$(52)\quad \left\{\begin{array}{lll} \text{dans le sens } r, & \dfrac{d.A_r p_{rr}}{dr}\Delta r + \dfrac{d.A_\varphi p_{\varphi r}}{d\varphi}\Delta\varphi + \dfrac{d.A_\psi p_{\psi r}}{d\psi}\Delta\psi, \\ \quad\text{»} & \varphi, \dfrac{d.A_r p_{r\varphi}}{dr}\Delta r + \dfrac{d.A_\varphi p_{\varphi\varphi}}{d\varphi}\Delta\varphi + \dfrac{d.A_\psi p_{\psi\varphi}}{d\psi}\Delta\psi, \\ \quad\text{»} & \psi, \dfrac{d.A_r p_{r\psi}}{dr}\Delta r + \dfrac{d.A_\varphi p_{\varphi\psi}}{d\varphi}\Delta\varphi + \dfrac{d.A_\psi p_{\psi\psi}}{d\psi}\Delta\psi. \end{array}\right.$$

Il faut y ajouter les composantes provenant du défaut de parallélisme ou de perpendicularité, aux trois directions r, φ, ψ qui sont relatives au centre m de l'élément, des six directions de même nom qui sont relatives aux centres de ses six faces.

Pour cela, appelons respectivement

$$r', \quad \varphi', \quad \psi'$$

celles qui partent du centre de la face antérieure, quasi-parallèle à A_φ, et

$$r'', \quad \varphi'', \quad \psi''$$

celles qui partent du centre de la face quasi-parallèle à A_ψ, et aussi *antérieure*, ou ayant pour troisième coordonnée $\psi + \frac{1}{2}\Delta\psi$ et non $-\frac{1}{2}\Delta\psi$. Nous aurons

$$(53)\quad \begin{cases} \cos(\varphi', r) = -\frac{\Delta\varphi}{2}, \quad \cos(r', \varphi) = \frac{\Delta\varphi}{2}; \\ \text{car l'angle } (\varphi', r) = \frac{\pi}{2} + \frac{\Delta\varphi}{2}, \quad \text{et} \quad (r', \varphi) \text{ en est le supplément.} \end{cases}$$

Nous aurons aussi

$$(54)\quad \begin{cases} \cos(\psi'', r) = -\frac{\Delta\psi}{2}\cos\varphi, \quad \cos(\psi'', \varphi) = \frac{\Delta\psi}{2}\sin\varphi, \\ \cos(r'', \psi) = \frac{\Delta\psi}{2}\cos\varphi, \quad \cos(\varphi'', \psi) = -\frac{\Delta\psi}{2}\sin\varphi; \end{cases}$$

car, à l'égard des deux premiers de ces quatre angles, si l'on nomme r_1 la direction de la projection du rayon r sur le plan du parallèle de m, comme l'angle (ψ'', r_1) est $= \frac{\pi}{2} + \frac{\Delta\psi}{2}$, une longueur $= 1$ portée sur la tangente ψ'' à ce cercle de latitude donne, sur r_1, une projection $-\frac{\Delta\psi}{2}$; et cette projection, à son tour, donne $-\frac{\Delta\psi}{2}\cos\varphi$ et $-\frac{\Delta\psi}{2}(-\sin\varphi)$ en la projetant sur les directions r et φ. Or ce sont bien là les projections de cette longueur $r = 1$ elle-même sur ces dernières directions, puisque sa projection sur la direction ψ ne fournit rien, ni projetée sur r, ni projetée sur φ, auxquels ψ est perpendiculaire. Quant aux deux derniers angles (54), ils sont suppléments des deux premiers.

On trouve, au reste, ces mêmes expressions (53) et (54) en composant chaque cosinus de l'angle de deux directions au moyen des six cosinus (58), ci-après, des angles qu'elles font avec trois axes fixes x, y, z.

En multipliant par ces six cosinus (53), (54) les pressions sur les faces moyennes, savoir

$$(55)\quad A_\varphi p_{\varphi\varphi}, \quad A_\varphi p_{\varphi r}, \quad A_\psi p_{\psi\psi}, \quad A_\psi p_{\psi\psi}, \quad A_\psi p_{\psi r}, \quad A_\psi p_{\psi\varphi},$$

il suffit de doubler les produits pour avoir, à cela près de quantités négligeables du troisième ordre, ce qui vient à la fois des faces antérieures et des faces postérieures, où les forces correspondantes agissent en sens inverse, mais pour lesquelles, par compensation, les cosinus ont des valeurs de signe contraire. On a ainsi, pour les forces à ajouter à (52),

$$(56)\quad \left\{\begin{array}{lll} \text{dans le sens } r, & -\mathrm{A}_\varphi p_{\varphi\varphi}\Delta\varphi - \mathrm{A}_\psi p_{\psi\psi}\cos\varphi\,\Delta\psi, \\ \quad\text{»} \qquad\quad \varphi, & \mathrm{A}_\varphi p_{\varphi r}\Delta\varphi + \mathrm{A}_\psi p_{\psi\psi}\sin\varphi\,\Delta\psi, \\ \quad\text{»} \qquad\quad \psi, & \mathrm{A}_\psi p_{\psi r}\cos\varphi\,\Delta\psi - \mathrm{A}_\psi p_{\psi\varphi}\sin\varphi\,\Delta\psi. \end{array}\right.$$

Substituant les valeurs (51) de A_r, A_φ, A_ψ, et effectuant, puis égalant à zéro après avoir divisé par le volume de l'élément qui est

$$\Delta r . r\Delta\varphi . r\cos\varphi\,\Delta\psi,$$

et ajoutant les forces extérieures qui agissent dans les mêmes trois sens sur l'unité de volume, on obtient les équations d'équilibre suivantes, dont cette démonstration motive bien la composition,

$$(57)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{dp_{rr}}{dr} + \dfrac{1}{r\cos\varphi}\dfrac{d(p_{r\varphi}\cos\varphi)}{d\varphi} + \dfrac{1}{r\cos\varphi}\dfrac{dp_{\psi r}}{dr} + \dfrac{2p_{rr} - p_{\varphi\varphi} - p_{\psi\psi}}{r} + \mathrm{R} = 0, \\ \dfrac{dp_{r\varphi}}{dr} + \dfrac{1}{r\cos\varphi}\dfrac{d(p_{\varphi\varphi}\cos\varphi)}{d\varphi} + \dfrac{1}{r\cos\varphi}\dfrac{dp_{\varphi\psi}}{dr} + \dfrac{3p_{r\varphi} + p_{\psi\psi}\,\mathrm{tang}\,\varphi}{r} + \Phi = 0, \\ \dfrac{dp_{\psi r}}{dr} + \dfrac{1}{r\cos\varphi}\dfrac{d(p_{\varphi\psi}\cos\varphi)}{d\varphi} + \dfrac{1}{r\cos\varphi}\dfrac{dp_{\psi\psi}}{d\psi} + \dfrac{3p_{\psi r} - p_{\varphi\psi}\,\mathrm{tang}\,\varphi}{r} + \Psi = 0. \end{array}\right.$$

Ces équations sont identiques à celles que M. Lamé a déduites de trois autres équations de vingt-trois, de vingt-deux et de quatorze termes, obtenues par le procédé mixte (n° 5). Pour les en déduire il les ajoute trois fois entre elles, après multiplication par les trois premières, les trois qui suivent et les trois dernières des expressions suivantes des cosinus des angles que font les directions r, φ, ψ avec trois axes rectangulaires fixes des x, des y, des z; le troisième de ces axes fixes est celui du système sphériconique, et le premier est l'intersection du plan méridien fixe zx avec l'équateur xy :

$$(58)\left\{\begin{array}{lll}\cos(r,x)=\cos\varphi\cos\psi, & \cos(r,y)=\cos\varphi\sin\psi, & \cos(r,z)=\sin\varphi,\\ \cos(\varphi,x)=-\sin\varphi\cos\psi, & \cos(\varphi,y)=-\sin\varphi\sin\psi, & \cos(\varphi,z)=\cos\varphi,\\ \cos(\psi,x)=-\sin\psi, & \cos(\psi,y)=\cos\psi, & \cos(\psi,z)=0.\end{array}\right.$$

En effet, les trois équations, plus compliquées que (57), dont nous parlons, expriment (nº 5) l'équilibre de translation de l'élément dans les directions de ces coordonnées x, y, z.

Pour l'établissement des expressions des dilatations et glissements en fonction des coordonnées sphériques, servons-nous du procédé analytique (nº 5) en montrant comment on peut en diminuer considérablement les calculs. Si nous adoptons avec M. Lamé les abréviations

$$(59)\qquad \cos\varphi=\mathrm{c},\quad \sin\varphi=\mathrm{s},\quad \cos\psi=\mathrm{c}',\quad \sin\psi=\mathrm{s}',$$

nous obtenons, comme particularisation des relations indiquées par (c) et (e) d'une manière générale au nº 5 ci-dessus, entre les coordonnées polaires et les coordonnées rectangles x, y, z qui viennent d'être désignées, ainsi qu'entre U, V, W et les déplacements u, v, w dans les sens de celles-ci,

$$(60)\quad u=\mathrm{cc}'\mathrm{U}-\mathrm{sc}'\mathrm{V}-\mathrm{s}'\mathrm{W},\quad v=\mathrm{cs}'\mathrm{U}-\mathrm{ss}'\mathrm{V}+\mathrm{c}'\mathrm{W},\quad w=\mathrm{sU}+\mathrm{cV};$$

$$(61)\quad\left\{\begin{array}{lll} x=r\mathrm{cc}', & y=r\mathrm{cs}', & z=r\mathrm{s},\\ r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}, & \operatorname{tang}\varphi=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \operatorname{tang}\psi=\dfrac{y}{x}.\end{array}\right.$$

Différentions; mais après et à mesure que les différentiations sont effectuées, faisons

$$(62)\qquad \psi=0,\quad \text{d'où}\quad \mathrm{c}'=1,\quad \mathrm{s}'=0;$$

ce qui revient à prendre le méridien du point m pour le méridien fixe auquel on rapporte les points environnant m; et ce qui ne restreindra aucunement la généralité des résultats finaux, puisque tout est symétrique autour de l'axe du système. Nous aurons ainsi pour les formules désignées par (f) au n° 5 :

$$(63)\quad \begin{cases} \dfrac{dr}{dx}=\mathrm{c}, & \dfrac{dr}{dy}=0, \quad \dfrac{dr}{dz}=\mathrm{s},\\ \dfrac{d\varphi}{dx}=-\dfrac{\mathrm{s}}{r}, & \dfrac{d\varphi}{dy}=0, \quad \dfrac{d\varphi}{dz}=\dfrac{\mathrm{c}}{r},\\ \dfrac{d\psi}{dx}=0, & \dfrac{d\psi}{dy}=\dfrac{1}{r\mathrm{c}}, \quad \dfrac{d\psi}{dz}=0; \end{cases}$$

et, pour les formules (g) de changement de variables,

$$(64)\qquad \frac{d.}{dx}=\mathrm{c}\frac{d.}{dr}-\frac{\mathrm{s}}{r}\frac{d.}{d\varphi},\quad \frac{d.}{dy}=\frac{1}{r\mathrm{c}}\frac{d.}{d\psi},\quad \frac{d.}{dz}=\mathrm{s}\frac{d.}{dr}+\frac{\mathrm{c}}{r}\frac{d.}{d\varphi}.$$

En mettant successivement les expressions (60) de u, v, w à la place du point symbolique, et en faisant toujours $\psi=0$ aussitôt et à mesure que les différentiations sont opérées, on obtient les valeurs des neuf dérivées de u, v, w, qui, substituées dans

$$\partial_x=\frac{du}{dx},\ldots,\quad g_{yz}=\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy},\ldots,$$

donnent six expressions [(h) du n° 5] affectées du monôme $\dfrac{d\mathrm{U}}{dr}$, du binôme $\dfrac{d\mathrm{V}}{rd\varphi}+\dfrac{\mathrm{U}}{r}$, et de quatre certains trinômes ; et qui sont, en appelant provisoirement ∂, ∂', ∂'', g, g', g'' ces fonctions monômes, binômes, trinômes de U, V, W (que nous écrirons tout à l'heure),

$$(65)\ \begin{cases} \partial_x=\mathrm{c}^2\partial+\mathrm{s}^2\partial'-2\mathrm{cs}g'', \quad \partial_y=\partial', \quad \partial_z=\mathrm{s}^2\partial+\mathrm{c}^2\partial'+2\mathrm{cs}g'',\\ g_{yz}=\mathrm{s}g'+\mathrm{c}g, \quad g_{zx}=2\mathrm{cs}(\partial-\partial')+(\mathrm{c}^2-\mathrm{s}^2)g', \quad g_{xy}=\mathrm{c}g'-\mathrm{s}g. \end{cases}$$

Or ces expressions étant mises, à leur tour, dans les suivantes, qui particularisent les (i) du n° 5,

$$(66)\ \begin{cases} \partial_r=\partial_x\mathrm{c}^2+\partial_z\mathrm{s}^2+g_{zx}\mathrm{cs}, \quad \partial_\varphi=\partial_x\mathrm{s}^2+\partial_z\mathrm{c}^2-g_{zx}\mathrm{cs}, \quad \partial_\psi=\partial_y,\\ g_{\varphi\psi}=g_{yz}\mathrm{c}-g_{xy}\mathrm{s}, \quad g_{\psi r}=g_{yz}\mathrm{s}+g_{xy}\mathrm{c}, \quad g_{r\varphi}=-2\partial_x\mathrm{cs}+2\partial_z\mathrm{cs}+g_{zx}(\mathrm{c}^2-\mathrm{s}^2), \end{cases}$$

rendent celles-ci précisément égales à ∂, ∂', ∂'', g, g', g''. Écrivons donc les fonctions que représentent ces six lettres, et égalons-les à $\partial_r,\ldots,g_{r\varphi}$, nous avons [pour ($k$) du n° 5]

$$(67)\left\{\begin{aligned}&\partial_r=\frac{dU}{dr},\quad \partial_\varphi=\frac{1}{r}\frac{dV}{d\varphi}+\frac{U}{r},\quad \partial_\psi=\frac{1}{r\cos\varphi}\frac{dW}{d\psi}+\frac{U}{r}-\frac{V}{r}\tang\varphi,\\ &g_{\varphi\psi}=\frac{1}{r\cos\varphi}\frac{dV}{d\psi}+\frac{1}{r}\frac{dW}{d\varphi}+\frac{W}{r}\tang\varphi,\quad g_{\psi r}=\frac{dW}{dr}+\frac{1}{r\cos\varphi}\frac{dU}{d\psi}-\frac{W}{r},\quad g_{r\varphi}=\frac{1}{r}\frac{dU}{d\varphi}+\frac{dV}{dr}-\frac{V}{r};\end{aligned}\right.$$

formules qui concordent avec celles que M. Lamé a trouvées pour les pressions dans un corps isotrope.

On n'y arrive qu'après des calculs démesurés lorsqu'on laisse arbitraire ψ, qui doit disparaître de toute manière et ne pas se trouver dans les résultats.

10. *Sphère creuse, douée de l'homogénéité sphériconique.* — Supposons que sa matière soit douée aussi en chaque point de la symétrie de contexture (n° 2) par rapport à trois plans, qui est définie par les formules dérivées de (2) et déjà employées pour le cylindre,

$$(68)\qquad \left\{\begin{aligned}&p_{rr}=\mathrm{a}\partial_r+\mathrm{f}'\partial_\varphi+\mathrm{e}'\partial_\psi, && p_{\varphi\psi}=\mathrm{d}g_{\varphi\psi},\\ &p_{\psi\varphi}=\mathrm{f}'\partial_r+\mathrm{b}\partial_\varphi+\mathrm{d}'\partial_\psi, \quad\text{et} && p_{\psi r}=\mathrm{e}g_{\psi r},\\ &p_{\psi\psi}=\mathrm{e}'\partial_r+\mathrm{d}'\partial_\varphi+\mathrm{c}\partial_\psi, && p_{r\varphi}=\mathrm{f}g_{r\varphi};\end{aligned}\right.$$

et prenons pour données, avec M. Lamé, des pressions normales et constantes

$$-p_0,\quad -p_1$$

sollicitant respectivement les surfaces sphériques intérieure et extérieure, dont les rayons sont

$$r_0,\quad r_1.$$

Vu que tout est symétrique autour du rayon servant d'axe au système, les points appartenant à ce rayon particulier ne pourront se déplacer que dans sa direction. Voyons à quelles conditions, ou pour quelles relations entre les données, il en sera de même pour tous les autres rayons vecteurs, en sorte qu'on ait partout

$$(69)\qquad V=0,\quad W=0.$$

Si l'on introduit cette supposition dans (67), puis dans (68), en faisant de plus, vu la symétrie parfaite autour de l'axe polaire,

$$\frac{dU}{d\varphi}=0, \tag{70}$$

on a

$$\left\{\begin{aligned}
&\partial_r=\frac{dU}{dr},\quad \partial_\varphi=\partial_\psi=\frac{U}{r},\quad g_{\varphi\psi}=0,\quad g_{\psi r}=\frac{1}{r\cos\varphi}\frac{dU}{d\psi},\quad g_{r\varphi}=0,\\
&p_{rr}=a\frac{dU}{dr}+(e'+f')\frac{U}{r},\qquad p_{\varphi\psi}=0,\\
&p_{\varphi\varphi}=f'\frac{dU}{dr}+(b+d')\frac{U}{r},\quad \text{et}\quad p_{\psi r}=\frac{e}{r\cos\varphi}\frac{dU}{d\psi},\\
&p_{\psi\psi}=e'\frac{dU}{dr}+(c+d')\frac{U}{r},\qquad p_{r\varphi}=0.
\end{aligned}\right. \tag{71}$$

Et les trois équations d'équilibre (57), dont la seconde se réduit à $-p_{\varphi\varphi}+p_{\psi\psi}=0$, deviennent

$$\left\{\begin{aligned}
&a\frac{d^2U}{dr^2}+2a\frac{1}{r}\frac{dU}{dr}-(b+c+2d'-e'-f')\frac{U}{r^2}+\frac{e}{r^2\cos^2\varphi}\frac{d}{d\psi}\left(\frac{dU}{dr}-\frac{U}{r}\right)=0,\\
&(e'-f')\frac{dU}{dr}+(c-b)\frac{U}{r}=0,\\
&\frac{e}{r\cos\varphi}\frac{d}{d\psi}\left(\frac{dU}{dr}+2\frac{U}{r}\right)=0.
\end{aligned}\right. \tag{72}$$

Elles doivent être satisfaites toutes trois par la même valeur de U.

Or, on tire de la seconde, C'' étant une constante,

$$U=C''r^{\frac{b-c}{e'-f'}}. \tag{73}$$

Cette valeur satisfait identiquement à la troisième; et si on la substitue dans la première, on peut tout diviser par $Cr^{\frac{b-c}{e'-f'}-2}$, ce qui donne, comme condition pour que l'on puisse avoir (69) $V=0$, $W=0$, la relation suivante entre les coefficients

$$\left(\frac{b-c}{e'-f'}\right)^2+\frac{b-c}{e'-f'}=\frac{b+c+2d'-e'-f'}{a}. \tag{74}$$

On aurait la même chose, si l'on supposait *à priori* que U est fonction de r seul, en résolvant d'abord la première équation (72) débarrassée ainsi de son dernier terme, car si on l'assimile à l'équation différentielle générale (20) du n° 7, en faisant ses paramètres $m = \frac{1}{2}$ et

$$n = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{b + c + 2d' - e' - f'}{a}},$$

l'intégrale (21) de celle-ci donne, C et C' étant deux constantes,

$$(75) \qquad U = Cr^{n-\frac{1}{2}} + C'r^{-n-\frac{1}{2}}.$$

Substituant dans la seconde équation différentielle (72), on a

$$\left[(e'-f')\left(n-\frac{1}{2}\right)+c-b\right]Cr^{2n}+\left[-(e'-f')\left(n+\frac{1}{2}\right)+c-b\right]C'=0,$$

condition qui ne peut être satisfaite quel que soit r que si les deux quantités entre crochets s'annulent, ou au moins l'une des deux avec la constante qui affecte l'autre. Or ces deux quantités égalées à zéro donnent pour n les deux valeurs

$$(76) \qquad n = \pm\left(\frac{1}{2} + \frac{b-c}{e'-f'}\right),$$

qui, égalées à ce que représente n, redonnent bien la condition ou relation obligée (74).

Si cette condition (74) est remplie, et si l'on n'a pas $e' = f'$, le déplacement U est donné par l'expression exponentielle monôme (73), à laquelle on ramène même l'expression binôme (75) quand on met pour n, dans celle-ci, les deux valeurs (76).

Les composantes de pressions, variables, comme on voit, avec la distance au centre, ont pour valeurs (71)

$$(77) \qquad \left\{\begin{aligned} p_{rr} &= \left(a\frac{b-c}{e'-f'} + e' + f'\right)C''r^{\frac{b-c}{e'-f'}-1},\\ p_{\varphi\varphi} = p_{\psi\psi} &= \frac{(b+d')e' - (c+d')f'}{e'-f'}C''r^{\frac{b-c}{e'-f'}-1}.\end{aligned}\right.$$

Mais il faut encore que celle de p_{rr} qui n'a, comme U, qu'une constante, puisse satisfaire à la fois aux deux conditions aux limites

$$(78)\qquad \begin{cases} p_{rr} = -p_0 & \text{pour} \quad r = r_0, \\ p_{rr} = -p_1 & \text{pour} \quad r = r_1. \end{cases}$$

Cela exige qu'il y ait, entre les deux pressions sur les parois intérieure et extérieure, un rapport déterminé par celui des rayons de ces parois, et qui est donné par

$$(79)\qquad \frac{p_0}{p_1} = \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{\frac{\mathrm{b}-\mathrm{c}}{\mathrm{e}'-\mathrm{f}'}-1}.$$

Il n'y aurait pas lieu à poser cette deuxième condition si la sphère était pleine.

11. *Même sphère douée de l'homogénéité simplement sphérique.* — Mais le rapport des deux pressions données p_0 et p_1 peut être absolument quelconque si le numérateur et le dénominateur de l'exposant de r dans la valeur (73) de U s'annulent à la fois, ou si l'on a, entre les coefficients qui déterminent l'élasticité, ces deux relations au lieu d'une seule (74) :

$$(80)\qquad \mathrm{e}' = \mathrm{f}', \quad \mathrm{b} = \mathrm{c}.$$

C'est ce qui a lieu, par exemple, *lorsque tous les rayons de la sphère sont des axes de symétrie de contexture,* ce qui entraîne, en outre (nº **3**), $\mathrm{b} = 2\mathrm{e} + \mathrm{e}' = 2\mathrm{f} + \mathrm{f}'$.

Alors il n'y a plus de rayon particulier dont tous les points sont ombilicaux ou exceptionnels (nº **1**). Le seul point ombilical est le centre, en ce que, quand la sphère est pleine, il faut s'écarter légèrement de ce point pour trouver des éléments qui soient identiques à tous les autres éléments du même corps. Tout rayon peut être pris pour axe du système, et la matière jouit du *sous-genre* d'homogénéité (nº **3**) qui peut être appelé *sphérique*.

Les déplacements causés par des pressions constantes et normales aux parois ne peuvent se faire que suivant les rayons, et être fonctions que de r seul; en sorte que les égalités supposées (69) $V = 0$, $W = 0$ sont ici obligées, ainsi que (70) $\frac{dU}{d\varphi} = 0$, et aussi

$$\frac{dU}{d\psi} = 0.$$

Il n'y a plus lieu de prendre la solution monôme (73) tirée de la deuxième équation (72), même quand il y aurait eu, entre les coefficients, des relations telles que $\frac{b - c}{e' - f'}$ ne donne plus $\frac{0}{0}$ en faisant $e' = f'$, par exemple les relations de distribution ellipsoïdale $b = 3\,\frac{f'd'}{e'}$, $c = 3\,\frac{d'e'}{f'}$, d'où $\frac{b - c}{e' - f'} = \frac{3d'(e' + f')}{e'f'}$; en effet, cela n'empêche pas la deuxième équation (72), dont les deux termes sont alors affectés de $e' - f'$, d'être identiquement satisfaite, et l'on ne peut pas s'en servir pour obtenir U.

Il faut donc tirer la solution de la première équation d'équilibre (72), seule subsistante, et dont on doit effacer le dernier terme, vu que $\frac{dU}{d\psi} = 0$.

Si l'on fait

$$\text{(81)} \qquad n = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 8\,\frac{b + d' - e'}{a}},$$

cette équation donne

$$\text{(82)} \qquad U = Cr^{n-\frac{1}{2}} + C'r^{-n-\frac{1}{2}}.$$

Il en résulte

$$\text{(83)} \qquad \begin{cases} \partial_r = \dfrac{dU}{dr} = \left(n - \frac{1}{2}\right) Cr^{n-\frac{3}{2}} - \left(n + \frac{1}{2}\right) C'r^{-n-\frac{3}{2}}, \\ \partial_\varphi = \partial_\psi = \dfrac{U}{r} = Cr^{n-\frac{3}{2}} + C'r^{-n-\frac{3}{2}}; \end{cases}$$

$$\text{(84)} \qquad \begin{cases} p_{rr} = \left[\left(n - \frac{1}{2}\right) a + 2e'\right] Cr^{n-\frac{3}{2}} - \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) a - 2e'\right] C'r^{-n-\frac{3}{2}}, \\ p_{\varphi\varphi} = p_{\psi\psi} = \left[b + d' + \left(n - \frac{1}{2}\right) e'\right] Cr^{n-\frac{3}{2}} + \left[b + d' - \left(n + \frac{1}{2}\right) e'\right] C'r^{-n-\frac{3}{2}}. \end{cases}$$

Et les conditions aux superficies, résultant de la substitution, à p_{rr} et r, de $-p_0$ et r_0, $-p_1$ et r_1 successivement, dans la première de ces équations (84), fournissent pour les constantes

$$(85)\quad \begin{cases} C = \dfrac{p_0 r_0^{n+\frac{3}{2}} - p_1 r_1^{n+\frac{3}{2}}}{\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)a + 2e'\right](r_1^{2n} - r_0^{2n})}, \\[2ex] C' = \dfrac{\left(p_0 r_0^{\frac{3}{2}-n} - p_1 r_1^{\frac{3}{2}-n}\right)(r_0 r_1)^{2n}}{\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)a - 2e'\right](r_1^{2n} - r_0^{2n})}. \end{cases}$$

En les substituant dans (82), on a

$$(86)\; U = \frac{1}{r_1^{2n} - r_0^{2n}} \left[\frac{p_0 r_0^{n+\frac{3}{2}} - p_1 r_1^{n+\frac{3}{2}}}{\left(n-\frac{1}{2}\right)a + 2e'} r^{n-\frac{1}{2}} + \frac{p_0 r_0^{\frac{3}{2}-n} - p_1 r_1^{\frac{3}{2}-n}}{\left(n+\frac{1}{2}\right)a - 2e'} (r_0 r_1)^{2n} r^{-n-\frac{1}{2}} \right]$$

qui, divisé par r, donne les dilatations tangentielles

$$\partial_\varphi = \partial_\psi = \frac{U}{r},$$

variables, comme on voit, avec la distance au centre.

D'où aussi, U_0 étant U pour $r = r_0$, la valeur suivante de la proportion de la dilatation cubique de la cavité sphérique :

$$(87)\qquad \frac{3U_0}{r} = \frac{3 r_0^{n-\frac{3}{2}}}{r_1^{2n} - r_0^{2n}} \left[\frac{p_0 r_0^{n+\frac{3}{2}} - p_1 r_1^{n+\frac{3}{2}}}{\left(n-\frac{1}{2}\right)a + 2e'} + \frac{p_0 r_0^{\frac{3}{2}-n} - p_1 r_1^{\frac{3}{2}-n}}{\left(n+\frac{1}{2}\right)a - 2e'} r_1^{2n} \right].$$

Dans le cas particulier de l'isotropie, où

$$d' = e', \quad b = a, \quad n = \frac{3}{2},$$

ces formules se réduisent, en faisant $e' = A$, $a = 3A$, à ce qui a été trouvé pour une sphère isotrope, au moyen des coordonnées rectilignes ordinaires, par MM. Lamé et Clapeyron en 1828 [*], et à peu près en même temps par M. Poisson [**]. Et, en remplaçant

$$a \text{ par } \lambda + 2\mu, \quad e' \text{ par } \lambda,$$

elles sont aussi conformes à ce qui a été trouvé en 1852 par M. Lamé, au moyen des coordonnées sphériques.

Mais on voit, ici comme pour le cylindre creux (n° **7**), que lorsque l'élasticité de la matière de la sphère, dans le sens de l'épaisseur de son enveloppe, n'a pas la même grandeur que les élasticités dans les sens tangentiels à ses couches, ce qui sera sans doute très-fréquent, les formules, malgré le passage en exposants des coefficients qui mesurent l'élasticité, sont à peu près aussi simples que les formules supposant l'isotropie.

On dispose alors, pour interpréter les faits, de trois constantes, a, e' ou e, et $n = \frac{d}{e}$; ou tout au moins de deux d, e en faisant

$$a = 3\frac{ef}{d} = 3\frac{e^2}{d}, \quad b = 3\frac{fd}{e} = 3d,$$

relations voulues pour la distribution ellipsoïdale des élasticités (n° **3**). On voit donc que pour expliquer ceux des faits qui ne s'accordent pas avec les formules d'isotropie à un seul coefficient, il n'est nullement nécessaire d'admettre et d'employer des formules d'isotropie à deux coefficients, que je maintiens être fautives.

Supposons que l'enveloppe soit d'une faible épaisseur ε.

En faisant dans les expressions (85) de C et C' :

$$(88) \qquad r_0 = r - \frac{1}{2}\varepsilon, \quad r_1 = r + \frac{1}{2}\varepsilon,$$

---

[*] Sur l'équilibre intérieur des solides homogènes (*Savants étrangers*, t. IV, n^os 57 à 60).

[**] *Annales de Chimie et de Physique*, 1828, 2^e série, t. XXXVIII, p. 330.

et négligeant ε^2, elles deviennent

$$(89)\quad C = \frac{(p_0 - p_1)\, r^{\frac{5}{2}-n}}{\left[\left(n - \frac{1}{2}\right) a + 2e'\right] . 2n\varepsilon}, \quad C' = \frac{(p_0 - p_1)\, r^{\frac{5}{2}+n}}{\left[\left(n + \frac{1}{2}\right) a - 2e'\right] . 2n\varepsilon};$$

d'où, en substituant dans (84), et remettant pour n^2 sa valeur $\frac{1}{4} + 2\,\frac{b + d' - e'}{a}$:

$$(90)\qquad p_{\varphi\varphi} = p_{\psi\psi} = \frac{(p_0 - p_1)\, r}{2\varepsilon}.$$

Cette expression, analogue à celle (31) de Mariotte relative au cylindre, de la traction éprouvée par la paroi d'une sphère mince pressée intérieurement et extérieurement, a été trouvée par Navier [*]. Elle est facile à démontrer directement, car la pression que chaque moitié de la sphère éprouve a la même résultante $(p_0 - p_1)\pi r^2$ que celle qu'éprouverait le grand cercle diamétral s'il servait de couvercle à l'autre moitié; et elle doit, pour l'équilibre, être égale à la traction $p_{\varphi\varphi} . 2\pi r\varepsilon$ supportée par la couronne suivant laquelle le plan de ce grand cercle coupe l'enveloppe sphérique.

En substituant de même les valeurs (89) de C et C' dans (83), nous trouvons

$$(91)\qquad \partial_\varphi = \partial_\psi = \frac{a}{a(b + d') - 2e'^2}\,\frac{(p_0 - p_1)\, r}{2\varepsilon}$$

pour la dilatation tangentielle à laquelle il faut imposer une limite, relative à chaque matière, pour établir la condition de *résistance*, ou de stabilité de la cohésion.

Le quotient

$$(92)\qquad \frac{p_{\varphi\varphi}}{\partial_\varphi} = b + d' - \frac{2e'^2}{a}$$

n'est point égal au module d'élasticité E de Navier et de Young, qui

---

[*] *Résumé des Leçons à l'École des Ponts et Chaussées*, 1833, n° 670.

est le rapport de la traction à la dilatation longitudinale d'un prisme de même matière. Quand il y a isotropie, ou quand $b = a = 3d = 3e$, et même seulement quand il y a distribution ellipsoïdale des élasticités, on a $b = \frac{3fd}{e} = 3d$, $a = 3\frac{ef}{d} = 3\frac{e^2}{d}$, vu l'égalité déjà supposée (80) $e = f$. Donc, alors

$$(93) \qquad \partial_\varphi = \partial_\psi = \frac{3}{20d} \cdot \frac{(p_0 - p_1)r}{\varepsilon}, \quad \frac{p_{\varphi\varphi}}{\partial_\varphi} = \frac{10}{3} d;$$

en sorte que ce quotient $\frac{p_{\varphi\varphi}}{\partial_\varphi}$ est les $\frac{4}{3}$ du module connu $E = \frac{5}{2}d$.

12. *Vase cylindrique terminé par deux calottes sphériques.* — Parmi les aperçus ingénieusement pratiques dus à l'esprit initiateur de M. Lamé, on doit remarquer ce qui se trouve consigné aux *Comptes rendus de l'Académie*, dans une simple Note de 1850 intitulée: *Sur les épaisseurs et les courbures des appareils à vapeur* [*]. L'excellent géomètre y recherche à quelle condition une chaudière cylindrique, terminée par deux portions de sphère, et soumise intérieurement à une forte pression, éprouvera la même modification, dans la partie cylindrique, que si le cylindre était de longueur indéfinie, et, dans les calottes sphériques, que si elles appartenaient à des sphères creuses entières, en sorte que chaque partie agisse sur l'autre, à la jonction, comme feraient les portions manquant à chacune. C'est bien la condition pour que l'enveloppe se dilate partout sans flexion ou altération de forme, et résiste ainsi avec le plus grand avantage. Par les chiffres que M. Lamé donne comme règle, et que l'on reconnaît être déduits du Mémoire présenté par lui et par M. Clapeyron en 1828 en se servant des formules d'isotropie à un seul coefficient, on voit qu'il exprime, pour cela, que la dilatation tangentielle soit la même dans les deux sortes de surfaces, ou que les cercles de jonction s'étendent autant comme faisant partie du cylindre que comme faisant partie des sphères.

Nous pouvons, à l'aide de nos formules ci-dessus, donner des règles plus générales, et applicables non-seulement quand la matière des

[*] 18 février, t. XXX, p. 157.

tôles n'est pas isotrope, mais même quand celle des parties sphériques est d'une variété de métal différente de celle de la partie cylindrique.

Désignons par l'indice 1 les dilatations et les coefficients d'élasticité relatifs aux parties sphériques, en réservant pour la partie cylindrique les lettres sans indices. La condition d'égalité des dilatations pour les cercles de raccordement sera

$$(94) \qquad \partial_\varphi = \partial_{\varphi_1};$$

ou, en mettant pour ∂_φ, ∂_{φ_1} les valeurs (32), (91) relatives à des matières homogènes, l'une *cylindriquement*, l'autre *sphériquement* (n^{os} **7**, **11**), et en divisant les deux membres par $p_0 - p_1$,

$$(95) \qquad \frac{1}{2}\,\frac{2ac - ad' + e'f' - 2e'^2}{abc - ad'^2 - be'^2 - cf'^2 + 2d'e'f'}\cdot\frac{r}{\varepsilon} = \frac{a_1}{2a_1(b_1 + d'_1) - 4e'^2_1}\,\frac{r_1}{\varepsilon_1};$$

formule qui fournira le rapport $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}$ à donner aux épaisseurs quand le rapport $\frac{r_1}{r}$ des rayons sera donné, et réciproquement.

Au lieu de laisser les rapports mutuels des nombreux coefficients d'élasticité que cette formule contient pour chaque métal, dans un arbitraire qu'il n'est guère possible de faire cesser au moyen de résultats d'expériences, si l'on met pour les coefficients a, b, c, a_1, b_1, les valeurs $3\frac{ef}{d}$, $3\frac{fd}{e}$, $3\frac{de}{f}$, $3\frac{e_1^2}{d_1}$, $3d_1$, relatives à la distribution ellipsoïdale des élasticités directes (n° **3**) qui convient aux métaux comme à toute matière qui n'est pas en cristaux réguliers, ou si l'on prend pour ∂_φ, ∂_{φ_1} les expressions (45), (93), cette condition devient

$$(96) \qquad \frac{8e - f}{fd}\cdot\frac{r}{\varepsilon} = \frac{3}{d_1}\,\frac{r_1}{\varepsilon_1},$$

ou, et vu que (n° **8**) $d = \frac{2}{5}\sqrt{E_\varphi E_z}$, $e = \frac{2}{5}\sqrt{E_z E_r}$, $f = \frac{2}{5}\sqrt{E_r E_\varphi}$, $d_1 = \frac{2}{5}E_{\varphi_1}$,

$$(97) \qquad \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} = \frac{r}{r_1}\cdot\frac{8\frac{e}{f} - 1}{3}\,\frac{d_1}{d} = \frac{r}{r_1}\,\frac{8\sqrt{\frac{E_z}{E_\varphi}} - 1}{3}\,\frac{E_{\varphi_1}}{\sqrt{E_\varphi E_z}};$$

en sorte que les épaisseurs ε, ε_1 de la partie cylindrique et des parties sphériques devront être comme leurs rayons r, r_1 multipliés respectivement par les fonctions

$$\frac{8\frac{e}{f}-1}{d} \text{ et } \frac{3}{d_1}; \quad \text{ou bien} \quad \frac{8-\sqrt{\frac{E_\rho}{E_z}}}{E_\rho} \text{ et } \frac{3}{E_{\rho_1}}$$

des élasticités de leurs matières.

S'il y a isotropie, et même matière dans les deux parties, ou si

$$d=e=f=d_1, \quad E_\rho=E_z=E_{\rho_1},$$

l'on a pour la condition (97)

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}=\frac{7r}{3r_1};$$

ou que les épaisseurs soient comme sept fois et trois fois les rayons, en sorte que si les épaisseurs sont les mêmes, les rayons du cylindre et des portions de sphère soient entre eux comme 3 est à 7, ce qui est la règle indiquée par M. Lamé pour les *fonds sphériques compensateurs*, élevant en quelque sorte, dit-il, le système des chaudières cylindriques au rang des formes naturelles, ou des solides d'égale résistance.