JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

DE SAINT-VENANT

Mémoire sur la distribution des élasticités autour de chaque point d'un solide ou d'un milieu de contexture quelconque, particulièrement lorsqu'il est amorphe sans être isotrope

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 8 (1863), p. 257-295.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1863_2_8__257_0>

MÉMOIRE

Sur la distribution des élasticités autour de chaque point d'un solide ou d'un milieu de contexture quelconque, particulièrement lorsqu'il est amorphe sans être isotrope;

PAR M. DE SAINT-VENANT.

Présenté à l'Académie des Sciences le 16 mars 1863 [*].

PREMIER ARTICLE.

§ I^er. — *Objet.*

1. *Exposition.* — L'élasticité d'un corps solide, ou l'intensité plus ou moins grande de la résistance qu'il oppose à la continuation des dilatations ou déformations supposées très-petites qu'on lui fait subir en divers sens à partir de son état dit *naturel* (où il n'y a encore aucune *pression* à son intérieur ni sur sa surface), dépend, en chaque point, d'un certain nombre de constantes ou de *coefficients* qu'un raisonnement péremptoire de George Green a réduit de trente-six à *vingt et un* inégaux au plus, en montrant qu'il y a entre eux nécessairement *quinze égalités;* sans quoi l'on pourrait, observe-t-il, à l'aide d'un corps élastique dilaté ou déformé, puis ramené à son premier état, créer de toutes pièces du travail mécanique, ou produire le mouvement perpétuel sans consommation de moteur ni de chaleur [**].

---

[*] *Comptes rendus des séances*, t. LVI, p. 475.

[**] *On Propagation of Light in crystallised Media*, 1839 (*Transactions of the Cambridge Society*, vol. VII, part II, p. 122), ou *Sur le Nombre des coefficients inégaux, etc.*, Note insérée aux *Comptes rendus*, 16 décembre 1861, t. LIII, p. 1107. *Voyez*, aussi, n° 2 ci-après, p. 265.

Nous disons : à vingt et un *au plus*, car la plus simple considération des accroissements que les déformations doivent nécessairement faire subir aux actions moléculaires réciproques dont l'élasticité dépend, et qui dépendent elles-mêmes des distances entre les molécules, ou plutôt, et nécessairement, entre leurs *points* élémentaires, conduit très-facilement (dernière note du n° **2** ci-après) à *six* autres égalités des mêmes coefficients deux à deux, ou à leur réduction à *quinze*, ce que ne contredisent nullement les expériences convenablement interprétées. Mais comme ce point est encore controversé, nous en rendrons indépendants la plupart de nos calculs, dont plusieurs conséquences seront, au reste, de nature à l'éclaircir et à le résoudre, nous le pensons, dans un sens opposé à l'opinion qui s'est formée le plus généralement depuis peu à son sujet.

Or, les grandeurs de ces coefficients dépendent des directions choisies dans le corps pour celles des coordonnées, ordinairement rectangles, entrant dans les formules qu'ils affectent. Trois d'entre eux, en effet, dits d'élasticité *directe*, représentent les nombres par lesquels il faut multiplier les proportions des petites dilatations ou contractions opérées dans ces directions, pour avoir les intensités des pressions ou tensions qu'elles développent, suivant leurs sens, à travers les plans qui leur sont normaux; et les dix-huit autres, appelés d'élasticité *tangentielle*, *latérale*, etc., ont des significations plus ou moins analogues, que les formules de composantes de pression ci-après font ressortir.

Qu'on change les axes coordonnés, les coefficients prennent des grandeurs différentes.

Nous nous proposons principalement :

1° D'établir (après un préambule nécessaire où l'on tient compte d'éléments ordinairement omis dans la théorie de l'élasticité) des formules, ou plutôt *une formule générale symbolique* très-simple, servant à déterminer les divers coefficients d'élasticité pour un système nouveau d'axes coordonnés x', y', z', étant donnés les mêmes coefficients pour un premier système d'axes x, y, z, et les angles des axes nouveaux avec les anciens; formule donnant même plus généralement les coefficients de l'expression d'une composante oblique quelconque de pression.

2° De représenter par une surface courbe la loi de variation des principaux de ces coefficients.

3° De considérer en particulier le cas d'une distribution en quelque sorte *ellipsoïdale* des élasticités directes; de montrer que ce cas doit être, au moins très-approximativement, celui des corps amorphes ou à cristallisation confuse, ou des milieux occupés par une matière primitivement isotrope qui a été comprimée ou dilatée inégalement en différents sens, et de faire voir que lorsqu'il a lieu, les équations de l'équilibre intérieur sont aussi facilement intégrables que lorsqu'il y a égale élasticité en tous sens.

4° De déduire des formules ainsi obtenues, ainsi que des équations de l'équilibre d'élasticité complétées en ce qui regarde les pressions *antérieures aux déplacements*, des conséquences qui paraissent importantes, concernant certaines conditions, au nombre de quatorze, auxquelles l'illustre Green a proposé d'assujettir les coefficients dans la vue d'accommoder *exactement* les résultats de l'analyse des vibrations lumineuses avec l'hypothèse de Fresnel relative à la direction qu'elles suivent, selon lui, jusque dans l'intérieur des milieux biréfringents; de montrer qu'il suffit, pour avoir la surface d'onde du physicien français, d'admettre dans le milieu éthéré le mode de distribution des élasticités dont on vient de parler (3°) et qui est extrêmement probable; et de présenter à ce sujet des considérations pouvant intéresser l'avenir de la théorie de la lumière, comme elles intéressent la solution d'un point litigieux de la théorie de l'élasticité.

5° De faire voir que les coefficients ou *modules* d'élasticité, définis, à la manière de Young et de Navier, par les résistances à la traction de petits prismes extraits d'un corps dans diverses directions, se distribuent aussi ellipsoïdalement dans le cas d'intégrabilité ci-dessus, cas qui intéresse particulièrement la pratique, puisque ce sont des solides irrégulièrement cristallisés, mais non toujours isotropes, qui sont employés généralement comme matériaux dans les constructions [*].

---

[*] Un résumé plus complet est à la fin, § VI ou n° 30.

§ II. — *Formules diverses où entrent les coefficients dont l'élasticité dépend. — Établissement, de plusieurs manières, d'une partie souvent omise, où figurent six constantes complémentaires, qui sont les composantes des pressions pouvant exister antérieurement aux déplacements des points.*

2. *Formules des composantes de pression, et du* potentiel *des actions intérieures.* — Lorsqu'un corps élastique est *déformé,* c'est-à-dire dilaté, fléchi, etc., ou que ses parties sont *déplacées* les unes par rapport aux autres, mais de manière que les distances entre celles qui sont fort proches n'augmentent ou ne diminuent que dans de très-faibles proportions, les trois côtés adjacents, supposés primitivement parallèles à des coordonnées rectangles x, y, z, d'un quelconque de ses éléments de forme parallélipipède, changent légèrement de *longueur* et aussi d'*inclinaison mutuelle.* Appelons, suivant une notation que nous avons souvent employée, et que Cauchy a fini par adopter à peu de chose près,

$$\partial_x, \quad \partial_y, \quad \partial_z$$

les trois *dilatations,* ou les proportions *supposées très-petites* des allongements positifs ou négatifs de ces côtés de l'élément, et

$$g_{yz}, \quad g_{zx}, \quad g_{xy}$$

les trois *glissements,* c'est-à-dire les cosinus, *aussi très-petits*, de leurs angles (y, z), (z, x), (x, y) devenus un peu aigus, ou bien ce dont ces angles primitivement droits ont diminué, ce qui revient bien aux quantités dont les côtés opposés deux à deux des trois faces adjacentes ont *glissé* les uns devant les autres pour l'unité de leur distance.

Soient, de plus, en nous servant d'une notation qui nous a été conseillée par Coriolis, et que Cauchy a aussi employée finalement (*),

$$p_{xx}, \quad p_{yy}, \quad p_{zz}, \quad p_{yz} = p_{zy}, \quad p_{zx} = p_{xz}, \quad p_{xy} = p_{yx}$$

---

[*] *Comptes rendus*, 20 février 1854, t. XXXVIII, p. 329.

les composantes, dans les sens x, y, z, des pressions, ou plutôt des tensions ou tractions sur l'unité superficielle de trois faces perpendiculaires à ces coordonnées, la première sous-lettre désignant la face par sa normale, et la seconde le sens de décomposition, pressions qui ne sont autre chose que les résultantes des actions s'exerçant à travers ces faces. Tout le monde admet que si les pressions ou tensions *sont produites seulement par les déformations éprouvées*, c'est-à-dire si, antérieurement, le corps se trouvait dans l'état dit *naturel,* où aucune pression intérieure ni extérieure ne s'y exerçait, cas pour lequel nous les distinguons par un indice supérieur 1, ou par

$$p^1_{xx},\quad p^1_{yy},\quad p^1_{zz},\quad p^1_{yz},\quad p^1_{zx},\quad p^1_{xy},$$

ces six forces sont fonctions *linéaires* des six *déformations élémentaires* $\partial_x, \ldots, g_{xy}$, en sorte que si l'on désigne par

$$\mathfrak{a}_{xxxx},\quad \mathfrak{a}_{xxyy},\ \ldots,\quad \mathfrak{a}_{xyxy}$$

des coefficients qui dépendent de la nature et de la contexture du corps, et qui sont constants dans tous ses points s'il est homogène [*], mais fonctions des coordonnées s'il est hétérogène, on a les formules suivantes :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
p^1_{xx} &= \mathfrak{a}_{xxxx}\partial_x + \mathfrak{a}_{xxyy}\partial_y + \mathfrak{a}_{xxzz}\partial_z + \mathfrak{a}_{xxyz}g_{yz} + \mathfrak{a}_{xxzx}g_{zx} + \mathfrak{a}_{xxxy}g_{xy},\\
p^1_{yy} &= \mathfrak{a}_{yyxx}\partial_x + \mathfrak{a}_{yyyy}\partial_y + \mathfrak{a}_{yyzz}\partial_z + \mathfrak{a}_{yyyz}g_{yz} + \mathfrak{a}_{yyzx}g_{zx} + \mathfrak{a}_{yyxy}g_{xy},\\
p^1_{zz} &= \mathfrak{a}_{zzxx}\partial_x + \mathfrak{a}_{zzyy}\partial_y + \mathfrak{a}_{zzzz}\partial_z + \mathfrak{a}_{zzyz}g_{yz} + \mathfrak{a}_{zzzx}g_{zx} + \mathfrak{a}_{zzxy}g_{xy},\\
p^1_{yz} &= \mathfrak{a}_{yzxx}\partial_x + \mathfrak{a}_{yzyy}\partial_y + \mathfrak{a}_{yzzz}\partial_z + \mathfrak{a}_{yzyz}g_{yz} + \mathfrak{a}_{yzzx}g_{zx} + \mathfrak{a}_{yzxy}g_{xy},\\
p^1_{zx} &= \mathfrak{a}_{zxxx}\partial_x + \mathfrak{a}_{zxyy}\partial_y + \mathfrak{a}_{zxzz}\partial_z + \mathfrak{a}_{zxyz}g_{yz} + \mathfrak{a}_{zxzx}g_{zx} + \mathfrak{a}_{zxxy}g_{xy},\\
p^1_{xy} &= \mathfrak{a}_{xyxx}\partial_x + \mathfrak{a}_{xyyy}\partial_y + \mathfrak{a}_{xyzz}\partial_z + \mathfrak{a}_{xyyz}g_{yx} + \mathfrak{a}_{xyzx}g_{zx} + \mathfrak{a}_{xyxy}g_{xy},
\end{aligned}\right.$$

[*] Ou, plus exactement, s'il jouit de l'homogénéité ordinaire qu'on peut appeler *parallèle* ou *rectiligne,* qui fait place à une homogénéité *curviligne* (ou semi-polaire, polaire, etc.) si l'on vient à courber en anneau, en tuyau ou en sphère creuse une lame du corps possédant cette homogénéité ordinaire que nous considérerons seule dans ce qui va suivre, et qui est celle des cristaux ou au moins de la plupart d'entre eux (voyez *Comptes rendus,* 21 mai 1860, t. L, p. 930).

qui sont généralement admises, disons-nous, mais par des raisons diverses; car beaucoup de géomètres les posent en quelque sorte à priori, regardant leur forme linéaire comme une conséquence obligée *de la petitesse des six variables* ∂, g, ou des déplacements relatifs des points du corps; et d'autres les déduisent, plus rationnellement, des faits et de la grande loi physique qu'ils révèlent, en vertu de laquelle les actions entre les points matériels sont fonctions continues de leurs distances mutuelles, et dirigées suivant leurs lignes de jonction deux à deux, en sorte que toute dilatation et tout glissement très-petit, qui change extrêmement peu les distances, développe des forces proportionnelles aux *premières puissances* de leurs petits changements et par conséquent de ce glissement et de cette dilatation; raisonnement dont la traduction analytique complète trouvera sa place plus loin (2e note du n° 3).

On sait aussi que si l'on appelle

$$u,\quad v,\quad w$$

les projections sur les x, y, z du déplacement, dans l'espace, du point dont x, y, z étaient les coordonnées primitives, devenues ainsi $x+u$, $y+v$, $z+w$, et si ces projections sont *très-petites* pour les points de la petite portion de corps que l'on considère, on a

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} \partial_x = \dfrac{du}{dx},\quad \partial_y = \dfrac{dv}{dy}\quad \partial_z = \dfrac{dw}{dz},\\[2mm] g_{yz} = \dfrac{dv}{dz} + \dfrac{dw}{dy},\quad g_{zx} = \dfrac{dw}{dx} + \dfrac{du}{dz},\quad g_{xy} = \dfrac{du}{dy} + \dfrac{dv}{dx}. \end{array}\right.$$

Mais nous serons dans le cas d'employer des expressions plus générales, pour lesquelles les déplacements absolus u, v, w dans l'espace *sont aussi grands qu'on veut*, et les déplacements, même relatifs, de deux points du même corps à une distance sensible l'un de l'autre, peuvent être considérables [*], mais sont supposés tels, toutefois, que

[*] Comme il arrive, par exemple, quand on ploie en cercle une lame mince de manière que les deux bouts se touchent, ce qui peut avoir lieu sans lui faire perdre la faculté de revenir d'elle-même à son premier état et sans que les formules cessent d'être applicables à sa flexion (*Comptes rendus*, 22 février 1847, t. XXIV, p. 260).

la condition énoncée de proportion très-petite des changements de distance entre points très-proches soit remplie; ce qui revient à ce que *les dilatations et les glissements restent très-petits partout*. Alors on a pour ces quantités les expressions suivantes :

$$(3)\quad \begin{cases} \partial_x = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{du}{dx}\right)^2 + \left(\dfrac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\dfrac{dw}{dc}\right)^2\right], \\ \partial_y = \dfrac{dv}{dy} + \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{du}{dy}\right)^2 + \left(\dfrac{dv}{dy}\right)^2 + \left(\dfrac{dw}{dy}\right)^2\right], \\ \partial_z = \dfrac{dw}{dz} + \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{du}{dz}\right)^2 + \left(\dfrac{dv}{dz}\right)^2 + \left(\dfrac{dw}{dz}\right)^2\right], \\ g_{yz} = \dfrac{dv}{dz} + \dfrac{dw}{dy} + \dfrac{du}{dy}\dfrac{du}{dz} + \dfrac{dv}{dy}\dfrac{dv}{dz} + \dfrac{dw}{dy}\dfrac{dw}{dz}, \\ g_{zx} = \dfrac{dw}{dx} + \dfrac{du}{dz} + \dfrac{du}{dz}\dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dz}\dfrac{dv}{dx} + \dfrac{dw}{dz}\dfrac{dw}{dx}, \\ g_{xy} = \dfrac{du}{dy} + \dfrac{dv}{dx} + \dfrac{du}{dx}\dfrac{du}{dy} + \dfrac{dv}{dx}\dfrac{dv}{dy} + \dfrac{dw}{dx}\dfrac{dw}{dy}\ [*]. \end{cases}$$

[*] En effet, si

$$x_1 = x + u,\quad y_1 = y + v,\quad z_1 = z + w$$

désignent les coordonnées nouvelles du point (x, y, z) supposé placé à un angle du parallélipipède élémentaire dont les côtés adjacents primitifs très-petits sont x, y, z parallèlement aux x, y, z, l'on a

$$x_1 + \frac{dx_1}{dx}\mathrm{x},\quad y_1 + \frac{dy_1}{dx}\mathrm{x},\quad z_1 + \frac{dz_1}{dx}\mathrm{x}$$

pour les coordonnées nouvelles de la seconde extrémité du côté x, ce qui donne :

1° Pour la longueur nouvelle de ce côté,

$$\mathrm{x}(1 + \partial_x) = \mathrm{x}\sqrt{\left(\frac{dx_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{dx}\right)^2},$$

d'où

$$\partial_x = \sqrt{\left(1 + \frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2} - 1;$$

2° Pour les cosinus des angles qu'il fait maintenant avec les axes fixes x, y, z,

$$\frac{\dfrac{dx_1}{dx}\mathrm{x}}{(1 + \partial_x)\mathrm{x}} = \frac{1 + \dfrac{du}{dx}}{1 + \partial_x} \quad \text{et} \quad \frac{\dfrac{dv}{dx}}{1 + \partial_x},\quad \frac{\dfrac{dw}{dx}}{1 + \partial_x};$$

Il est également facile de voir que si

$$\Phi$$

représente ce qu'on appelle quelquefois l'*énergie potentielle* ou simplement le *potentiel* des actions intérieures pour l'unité de volume du corps au point (x, y, z), c'est-à-dire si

$$\Phi . \mathrm{xyz}$$

exprime, pour l'élément dont le centre est en ce point et dont les dimensions parallèles aux coordonnées sont x, y, z, le *travail total* que ces actions intérieures produiraient jusqu'au retour de l'élément à son état dit *naturel*, où il n'y avait, disons-nous, aucune pression, et si nous désignons par

$$\Phi^1$$

la valeur de Φ dans le cas pour lequel nous appelons p^1_{xx}, p^1_{yy}, etc., les pressions p_{xx}, p_{yy}, etc., c'est-à-dire dans le cas où les déformations ∂, g se comptent à partir de cet état naturel, l'augmentation $d\Phi^1$, due à des accroissements infiniment petits $d\partial_x, \ldots$, $dg_{yz}, \ldots$ de ces six déformations élémentaires, a pour valeur

$$(4)\quad d\Phi^1 = p^1_{xx} d\partial_x + p^1_{yy} d\partial_y + p^1_{zz} d\partial_z + p^1_{yz} dg_{yz} + p^1_{zx} dg_{zx} + p^1_{xy} dg_{xy} \text{ [*]};$$

---

et des expressions analogues pour les angles des deux autres côtés y, z avec les axes; d'où, pour le cosinus de l'angle que ceux-ci font maintenant entre eux,

$$g_{yz} = \frac{\frac{du}{dy}}{1+\partial_y}\,\frac{\frac{du}{dz}}{1+\partial_z} + \frac{1+\frac{dv}{dy}}{1+\partial_y}\,\frac{\frac{dv}{dz}}{1+\partial_z} + \frac{\frac{dw}{dy}}{1+\partial_y}\,\frac{1+\frac{dw}{dz}}{1+\partial_z}.$$

Ces expressions, vraies quelles que soient les grandeurs de u, v, w ainsi que de ∂_x, ∂_y, ∂_z et de g_{yz}, se réduisent, lorsque ces quatre dernières quantités sont très-petites, à la première et à la quatrième des expressions (3), comme on s'en assure en élevant au carré $1+\partial_x$, et en multipliant g_{yz} par $(1+\partial_y)(1+\partial_z)$.

[*] Car les actions intérieures font à chaque instant équilibre aux pressions $p^1_{xx}, \ldots$, p^1_{xy} sur les six faces de l'élément, et le travail des unes est égal, au signe près, au travail des autres; or, pour une augmentation $d\partial_z$ de la dilatation ∂_z par exemple, les

ce qui montre que le potentiel ou travail Φ^1, nécessairement le même, quand la quantité de chaleur ou de force vive vibratoire ne varie pas, pour d'égales valeurs de

$$\partial_x,\quad \partial_y,\quad \partial_z,\quad g_{yz},\quad g_{zx},\quad g_{xy},$$

ou qui est ainsi une fonction de ces six variables, *a pour dérivées partielles, par rapport à chacune, les six composantes respectives de pression*

$$p^1_{xx},\quad p^1_{yy},\quad p^1_{zz},\quad p^1_{yz},\quad p^1_{zx},\quad p^1_{xy}.$$

D'où

$$\frac{dp^1_{xx}}{d\partial_y} = \frac{d^2\Phi^1}{d\partial_x d\partial_y} = \frac{dp^1_{yy}}{d\partial_x},\ldots,\quad \frac{dp^1_{zz}}{dg_{xy}} = \frac{d^2\Phi^1}{d\partial_z dg_{xy}} = \frac{dp^1_{xy}}{d\partial_z},\ldots;$$

ce qui donne la raison des *quinze* égalités deux à deux suivantes entre les coefficients a, reconnues par Green comme découlant bien (n° 1) du principe de la nullité du travail total après retour au même état :

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{lll} a_{yyzz} = a_{zzyy},\ldots, & a_{xxyz} = a_{yzxx},\ldots, & a_{zxxy} = a_{xyzx}, \\ \text{etc.} & \text{etc.} & \text{au nombre de } 15, \end{array}\right.$$

et qui reviennent à ce qu'*on peut faire permuter le premier groupe de deux indices ou sous-lettres avec le second groupe sans changer la valeur d'un coefficient.*

---

deux faces xy se sont éloignées de $z\,d\partial_z$, et les pressions $p^1_{zz}.\mathrm{xy}$ qui s'y exercent produisent un travail

$$p^1_{zz}.\mathrm{xy}.z\,d\partial_z$$

ou $p^1_{zz}d\partial_z$ par unité de volume. Et si, l'une des deux faces xy restant immobile, le glissement g_{zx} vient à augmenter de dg_{zx}, l'autre face xy chemine de $z\,dg_{zx}$ dans le sens x, et la composante tangentielle $p^1_{zx}.\mathrm{xy}$ de même sens produit un travail

$$p^1_{zx}.\mathrm{xy}.z\,dg_{zx};$$

et comme aucun espace n'a été parcouru dans le sens z par les faces yz qui ont en même temps tourné un peu autour des arêtes y, il y a, par unité de volume, un travail $p^1_{zx}dg_{zx}$; travail qui serait le même au total, comme il est facile de voir, si les deux faces xy éprouvaient elles-mêmes de petits mouvements quelconques. Ainsi se trouvent justifiés les divers termes de l'expression (4) (*voyez* l'observation à la fin du n° 3).

Il en résulte encore l'expression suivante du potentiel, toujours quand les pressions, dans l'état qui a précédé les déformations ∂, g, étaient nulles :

$$
(6)\quad \left\{
\begin{aligned}
\Phi^1 = {} & \frac{1}{2} a_{xxxx}\partial_x^2 + \frac{1}{2} a_{yyyy}\partial_y^2 + \frac{1}{2} a_{zzzz}\partial_z^2 \\
& + \frac{1}{2} a_{yzyz} g_{yz}^2 + \frac{1}{2} a_{zxzx} g_{zx}^2 + \frac{1}{2} a_{xyxy} g_{xy}^2 \\
& + a_{yyzz}\partial_y\partial_z + a_{zzxx}\partial_z\partial_x + a_{xxyy}\partial_x\partial_y \\
& + a_{zxxy} g_{zx} g_{xy} + a_{xyyz} g_{xy} g_{yz} + a_{yzzx} g_{yz} g_{zx} \\
& + a_{xxyz}\partial_x g_{yz} + a_{yyzx}\partial_y g_{zx} + a_{zzxy}\partial_z g_{xy} \\
& + a_{yyyz}\partial_y g_{yz} + a_{zzyz}\partial_z g_{yz} + a_{zzzx}\partial_z g_{zx} + a_{xxzx}\partial_x g_{zx} \\
& \qquad + a_{xxxy}\partial_x g_{xy} + a_{yyxy}\partial_y g_{xy};
\end{aligned}
\right.
$$

car cette expression est nulle pour les ∂, g tous nuls, et elle satisfait bien, d'après les formules (1), à l'équation (4), qui donne

$$
\frac{d\Phi^1}{d\partial_x} = p_{xx}, \quad \frac{d\Phi^1}{d\partial_y} = p_{yy}, \ldots, \quad \frac{d\Phi^1}{dg_{xy}} = p_{xy}.
$$

Elle est, comme on voit, homogène et du second degré, par conséquent à *vingt et un termes* affectés des six carrés et des quinze produits de ses six variables.

Green la pose de prime abord, en supposant *que la fonction* Φ^1 *doit se développer nécessairement suivant les puissances entières des variables* ∂, g, dont il néglige les puissances 3 et au-dessus, et dont il efface les puissances 1, qui ne doivent figurer que lorsqu'il y a des pressions antérieures aux déformations. Nous avons préféré la déduire des expressions (1) des composantes de pression, en supposant déjà démontrée la forme linéaire de celles-ci; et elle se démontre complétement, comme on verra au n° **3**, en calculant le travail des actions s'exerçant de molécule à molécule.

Elle revient, au reste, d'après les expressions (1), à la suivante :

$$
(7)\quad \Phi^1 = \frac{1}{2} p_{xx}^1\partial_x + \frac{1}{2} p_{yy}^1\partial_y + \frac{1}{2} p_{zz}^1\partial_z + \frac{1}{2} p_{yz}^1 g_{yz} + \frac{1}{2} p_{zx}^1 g_{zx} + \frac{1}{2} p_{xy}^1 g_{xy},
$$

qui est bien aussi l'intégrale qu'on obtient de l'expression (4) de $d\Phi^1$, en supposant que les pressions $p_{xx}, \ldots, p_{xy}$ ont crû uniformément depuis zéro jusqu'aux valeurs qu'elles possèdent lorsque les dilatations et glissements ont atteint leurs valeurs $\partial_x, \ldots, g_{xy}$; loi de croissance qu'on peut toujours admettre en négligeant des petites quantités d'ordre supérieur. Et cette expression (7), différentiée successivement par rapport à $\partial_x, \partial_y, \ldots, g_{xy}$, donne bien $p^1_{xx}, p^1_{yy}, \ldots, p^1_{xy}$, si l'on a égard à leurs valeurs (1).

Les *six* égalités *complémentaires* entre les coefficients a, dont nous avons parlé au n°**1**, et qui sont fournies comme les quinze égalités (5) lorsqu'on calcule les pressions comme des résultantes d'actions s'exerçant entre les molécules, ou plutôt entre leurs *points* composants, suivant les lignes de jonction deux à deux de ceux-ci, et avec des intensités fonctions continues de leurs distances, sont les suivantes :

$$(8)\qquad \left\{ \begin{array}{lll} a_{yyzz} = a_{yzyz}, & a_{zzxx} = a_{zxzx}, & a_{xxyy} = a_{xyxy}, \\ a_{xxyz} = a_{zxxy}, & a_{yyzx} = a_{xyyz}, & a_{zzxy} = a_{yzzx}, \end{array} \right.$$

permettant, comme on voit, de faire permuter à volonté même *une* des deux premières sous-lettres avec *une* des deux dernières; en sorte qu'en les admettant, ainsi que les quinze égalités (5), *il y a égalité entre les divers coefficients possédant les mêmes quatre sous-lettres, quel que soit l'ordre de celles-ci* (car, dans tous les cas, la permutation des deux sous-lettres, soit dans le premier, soit dans le second groupe binaire, est permise, puisque g_{yz} est la même chose que g_{zy}, et qu'il est démontré, comme on sait, que $p_{yz} = p_{zy}$).

Ces six égalités réduisent les coefficients à *quinze* pour le cas le plus général de contexture, et à *un seul* pour la contexture isotrope, tandis qu'il en reste *deux* pour cette dernière contexture lorsqu'on en conserve 21 comme lorsqu'on en conserve 36 inégaux pour le cas le plus général.

Ces mêmes égalités complémentaires (8), ou ces réductions des coefficients à 15 pour le cas général et à un seul pour l'isotropie, se sont offertes aux géomètres dès l'établissement des premières formules de la théorie de l'élasticité. Elles n'exigent nullement, pour être prouvées, ces « intégrations autour d'un point » que Navier, Poisson, etc., opéraient par coordonnées polaires ou sphériques [*], ni même la considération de ces sommes $\mathbb{S}$ (n° **5** ci-après) d'un nombre considérable, mais fini, de composantes d'actions moléculaires dont la construction demande quelquefois qu'on substitue certaines actions à d'autres équivalentes [**], car on peut les prouver sans cela, et en raisonnant sur les actions effectivement en jeu [***].

---

[*] M. Clausius (*Ueber die Veränderungen...*, Sur les changements, etc., *Annales de Poggendorff*, vol. LXXVI, p. 58) a d'ailleurs très-bien justifié ces intégrations en en modifiant le sens, à savoir, en prenant pour limite inférieure de la coordonnée linéaire, non pas zéro, comme s'il s'agissait d'une matière *continue* qui n'existe pas, mais l'intervalle moyen entre les molécules les plus voisines, et en regardant l'intégrale comme remplaçant non pas une somme particulière relative aux diverses molécules qui en environnent une seule, mais la moyenne d'un très-grand nombre de pareilles sommes.

[**] Cette substitution, très-permise mais pouvant prêter à objection, d'actions émanant toutes du centre d'une petite face aux actions dont les directions la traversent en ses divers points, n'a besoin d'être faite (2ᵉ note du n° **5**) que pour le calcul des pressions. Elle n'est nullement nécessaire (4ᵉ *ibid.* et note du n° **4**) quand on établit directement, soit l'expression du potentiel, soit les équations d'équilibre.

[***] Il suffit pour cela de démontrer que si n désigne la direction de la normale à l'un des trois plans coordonnés ou même à une face quelconque, les coefficients de ∂_y et de g_{yz}, par exemple, dans l'expression de la composante p_{nx}, parallèle aux x, de la pression sur cette face, sont les mêmes respectivement que les coefficients de g_{xy}, de g_{zx} dans l'expression de la composante p_{ny} de la même pression parallèlement aux y, ou qu'on a, avec nos notations,

$$a_{nxyy} = a_{nyxy} \quad \text{et} \quad a_{nxyz} = a_{nyzx}.$$

Or, pour avoir la première de ces deux égalités, il suffit de considérer : 1° Qu'une dilatation ∂_y n'est autre chose qu'une déformation qui éloigne les uns des autres les plans matériels perpendiculaires à la coordonnée y de quantités égales à leurs intervalles multipliés par la petite fraction ∂_y; qu'elle allonge en conséquence la distance r de deux points matériels m, m' supposés situés de part et d'autre de la petite face, comme si, le premier m restant fixe, le second m' cheminait, parallèlement aux y, de $\partial_y . r\cos(r, y)$. 2° Qu'un glissement g_{xy} n'est autre chose qu'une déformation faisant glisser les uns devant les autres, dans le sens y, les plans perpendiculaires aux x, de quantités égales à leurs intervalles multipliés par la petite fraction g_{xy}, en sorte qu'il allonge la même distance $r = mm'$ comme si, m restant fixe, m' cheminait parallèlement aux y de $g_{xy} . r\cos(r, x)$. 3° Que ces petits cheminements de m', de même direction tous deux, étant l'un et l'autre projetés sur une même ligne, savoir mm' prolon-

Ce n'est pas ici le lieu de montrer, comme nous avons déjà fait et comme nous ferons encore ailleurs avec détail [*], que les désaccords apparents entre les résultats des formules et ceux de diverses expériences disparaissent, soit en discutant soigneusement celles-ci, soit en attribuant aux corps métalliques ou vitreux sur lesquels elles ont porté un petit degré d'hétérotropie ou d'hétérogénéité infiniment probable. Ce n'est pas non plus le moment de faire observer que les formules (1), et d'autres de même forme, ne doivent être appliquées ni aux corps ductiles se comportant « d'une manière intermédiaire », comme ont dit quelques auteurs, « entre les solides et les liquides », ni aux corps mous et élastiques d'une nature gommeuse; de rappeler aux géomètres que toute fonction n'est pas développable suivant les puissances *entières* de ses variables en commençant par la puissance 1, et qu'on n'est nullement en droit de conclure de la petitesse de celles-ci la *linéarité* de celle-là; en sorte que la forme linéaire des expressions (1) de $p_{xx}, \ldots, p_{xy}$, que nous admettons comme tout le monde, ne peut être démontrée, dans notre intime conviction, qu'en invoquant la loi physique des actions réci-

---

gée, donnent deux allongements de la distance $mm' = r$ qui sont entre eux comme $\partial_y \cos(r, y)$ à $g_{xy} \cos(r, x)$; que les actions développées entre ces points matériels dans la direction mm' suivent le même rapport, en sorte que décomposées, la première suivant les x (comme faisant partie de p_{nx}), la deuxième suivant les y (comme faisant partie de p_{ny}), elles donnent des composantes proportionnelles à $\partial_y \cos(r, y) \cos(r, x)$ et à $g_{xy} \cos(r, x) \cos(r, y)$ et par conséquent à ∂_y et à g_{xy}. D'où il suit que p_{nx} a le même rapport avec ∂_y si cette dilatation engendre seule la pression, que p_{ny} avec g_{xy} si elle n'est engendrée que par ce glissement; ce qui n'est autre chose que la première égalité $a_{nx\,yy} = a_{ny\,xy}$. L'autre, $a_{nx\,yz} = a_{ny\,zx}$, se prouve par un raisonnement semblable, aussi simple et aussi exempt de toute demande autre que celle de l'admission de la loi des actions entre les points matériels du corps, sans même s'occuper de la question de savoir si leur matière est discontinue ou continue. D'où les six égalités (8) et même les quinze (5), en particularisant la direction n et changeant entre elles les coordonnées.

Déjà l'on trouve au Mémoire *Laws of Elasticity* de M. Rankine (*Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, vol. V, ou *Cambr.*, vol IX, 1850, § III, théorème IV) cette sorte de raisonnement que nous avions cru présenter le premier à l'article 7 de notre Mémoire de 1855 sur la Flexion des prismes (*Journal de M. Liouville*, 1856, p. 105).

[*] Principalement au Ve appendice d'une nouvelle édition des *Leçons* de Navier.

proques entre points matériels suivant leurs lignes de jonction et proportionnellement à des fonctions de leurs distances, loi dont l'invocation conduit mathématiquement aux six égalités complémentaires (8), et dont on ne saurait, du reste, s'affranchir sans mettre en doute toute la mécanique même mathématique; car cette science attribue à toute force un *point* d'application, et, par suite, en vertu de l'égalité et de l'opposition directe qu'elle admet entre toute action et une réaction correspondante, attribue nécessairement aussi à toute force élémentaire un *point* dont elle émane, en s'exerçant suivant la droite qui le joint à celui où elle agit; enfin, de remarquer que faire inégaux, dans les formules, des nombres dont les plus fortes raisons prouvent l'égalité, loin d'être un acte de prudente abstention, expose, au contraire, par l'exagération commode du nombre des constantes disponibles, à se contenter d'expédients dans l'interprétation des faits et à se payer d'explications faciles et illusoires, dont le moindre inconvénient est d'arrêter des recherches plus profondes et plus délicates, et d'ajourner indéfiniment la découverte expérimentale des explications véritables.

Nous nous bornons donc ici à faire nos réserves, et si nous laissons le plus souvent dans nos formules les vingt et un coefficients inégaux, afin de montrer que la plupart de nos résultats sont indépendants des six égalités (8) contestées aujourd'hui par plusieurs savants, nous ne négligerons pas de développer quelques résultats de leur admission, et qui nous paraissent de nature à être appliqués utilement et sûrement.

3. *Termes à ajouter aux formules* (1) *et* (6) *quand il y avait des pressions antérieurement aux déformations* ∂, g *du corps élastique ou aux déplacements* u, v, w *de ses points; ou quand les déformations se comptent à partir d'un état qui n'était pas l'état naturel.* — Ces pressions intérieures primitives, dont il convient de tenir compte, sont dues, ou à des pressions extérieures s'exerçant sur la surface, comme la pression atmosphérique, ou à des forces telles que la pesanteur agissant déjà sur tous les points du corps dans l'état dont on part.

Quand elles existent, il ne suffit pas, pour avoir le potentiel Φ, d'ajouter la valeur qu'il pouvait avoir dans cet état primitif, et que nous appellerons

$$\Phi^0,$$

à celle que nous avons nommée Φ^1 et exprimée par un polynôme (6) $\frac{1}{2}a_{xx\,xx}\partial_x^2 +$ etc., en fonction des déplacements ∂, g; car les pressions primitives *travaillent* pendant que ces déformations s'opèrent, ou que les faces de l'élément parallélipipède considéré au numéro précédent s'éloignent les unes des autres ou glissent les unes devant les autres.

Si nous appelons

$$p_{xx}^0,\ p_{yy}^0,\ p_{zz}^0,\ p_{yz}^0,\ p_{zx}^0,\ p_{xy}^0$$

les six composantes de ces pressions sur l'unité superficielle de trois faces se croisant au point (x, y, z) perpendiculairement aux coordonnées, ou les valeurs de $p_{xx}, \ldots, p_{xy}$ antérieurement aux déplacements, on trouve, en faisant sur leur travail total le même raisonnement qui a conduit à l'expression (4) $d\Phi^1 = p_{xx}^1 d\partial_x +$ etc., du travail élémentaire des p^1 :

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{l} \Phi = \Phi^0 + p_{xx}^0\partial_x + p_{yy}^0\partial_y + p_{zz}^0\partial_z + p_{yz}^0 g_{yz} + p_{zx}^0 g_{zx} + p_{xy}^0 g_{xy} + \Phi^1 \\ \Big(\Phi^1 \text{ représentant toujours le polynôme à vingt et un termes} \\ \qquad (6)\quad \frac{1}{2}a_{xx\,xx}\partial_x^2 + \ldots + a_{yy\,xy}\partial_y\, g_{xy}\Big). \end{array}\right.$$

La partie de cette expression entre Φ^0 et Φ^1 est double, sauf les p^0 au lieu des p^1, de l'expression (7) de Φ^1; cela vient de ce que les pressions primitives p_{xx}^0, etc., avaient déjà acquis toute leur valeur au commencement des dilatations et des glissements, et restent constantes pendant que ces mouvements s'opèrent, au lieu de commencer par zéro comme les pressions engendrées p_{xx}^1, etc.

Les pressions $p_{xx}, \ldots, p_{xy}$ après les déformations ∂, g ou les déplacements u, v, w ne résultent pas non plus d'une addition pure et simple des pressions primitives p^0 et de celles p^1 qu'on aurait si celles-ci étaient nulles, car leur existence influe sur l'effet ultérieur de ces déplacements. Même, cette influence ne dépend pas seulement des *dilatations* et *glissements* ∂, g ou des fonctions (2) ou (3) des dérivées

$\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, ... des déplacements. Il faut, pour l'évaluer, *faire entrer dans le calcul ces neuf dérivées elles-mêmes.* On le conçoit sans peine en considérant que dans le cas simple où par exemple les déplacements ne produisent qu'*une rotation générale* qui n'altère en rien les distances mutuelles des molécules et n'engendre ainsi ni dilatation ∂, ni glissement g, de pareils déplacements changent toujours, dans l'intérieur du corps, ou par rapport à ses molécules, les situations de trois plans perpendiculaires aux coordonnées passant par un point quelconque, en sorte que les pressions sur ces plans de direction fixe dans l'espace doivent prendre d'autres grandeurs, si elles n'étaient pas primitivement égales en tous sens autour de chaque point.

Voici les formules complètes que l'on trouve pour les six composantes de pression après les déplacements u, v, w supposés très-petits,

$$
(10)\quad \left\{
\begin{aligned}
p_{xx} &= p^0_{xx}\left(1+\frac{du}{dx}-\frac{dv}{dy}-\frac{dw}{dz}\right)+2p^0_{xy}\frac{du}{dy}+2p^0_{zx}\frac{du}{dz}+p^1_{xx},\\
p_{yy} &= p^0_{yy}\left(1-\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}-\frac{dw}{dz}\right)+2p^0_{yz}\frac{dv}{dz}+2p^0_{xy}\frac{dv}{dx}+p^1_{yy},\\
p_{zz} &= p^0_{zz}\left(1-\frac{du}{dx}-\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right)+2p^0_{zx}\frac{dw}{dx}+2p^0_{yz}\frac{dw}{dy}+p^1_{zz},\\
p_{yz} &= p^0_{yz}\left(1-\frac{du}{dx}\right)+p^0_{yy}\frac{dw}{dy}+p^0_{zz}\frac{dv}{dz}+p^0_{zx}\frac{dv}{dx}+p^0_{xy}\frac{dw}{dx}+p^1_{yz},\\
p_{zx} &= p^0_{zx}\left(1-\frac{dv}{dy}\right)+p^0_{zz}\frac{du}{dz}+p^0_{xx}\frac{dw}{dx}+p^0_{xy}\frac{dw}{dy}+p^0_{yz}\frac{du}{dy}+p^1_{zx},\\
p_{xy} &= p^0_{xy}\left(1-\frac{dw}{dz}\right)+p^0_{xx}\frac{dv}{dx}+p^0_{yy}\frac{du}{dy}+p^0_{yz}\frac{du}{dz}+p^0_{zx}\frac{dv}{dz}+p^1_{xy}.
\end{aligned}
\right.
$$

$\Big[$ p^1_{xx}, p^1_{yy}, ... p^1_{xy} ayant les valeurs sextinômes (1)

$a_{xxxx}\frac{du}{dx}+\ldots+a_{xxxy}\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right)$, $a_{yyxx}\frac{du}{dx}+\ldots$, etc., du n° **2** $\Big]$:

formules pouvant être réduites à $p_{xx}=p^0_{xx}+p^1_{xx}$, $p_{yy}=\ldots$, quand les pressions p^0 antérieures aux déplacements u, v, w sont au plus de l'ordre de grandeur des p^1, mais non pas lorsque celles-là excèdent beaucoup celles-ci, comme cela peut avoir lieu pour le milieu éthéré dont nous aurons à nous occuper au § IV.

On peut y arriver, comme Cauchy à qui elles sont dues [*], en se basant sur la loi des actions entre points matériels [**].

Mais les mêmes formules générales (10) peuvent être obtenues sans calculer ainsi les actions fonctions continues des distances moléculaires mutuelles, si l'on applique à la manière de Lagrange le principe des travaux virtuels en se servant de l'expression (9) du potentiel, basée elle-même sur les formules (1) des pressions p^1_{xx}, etc., dont il

---

[*] *Exercices de Mathématiques*, 4e année (1829), p. 138.

[**] En effet on peut voir d'abord (comme on a montré aux *Comptes rendus*, 7 juillet 1845, t. XXI, p. 24) que la pression sur une petite face, ou la résultante générale des actions moléculaires qui s'exercent dans toutes les directions à travers sa superficie ω, peut être remplacée *par la résultante des actions qu'exercerait, sur chaque molécule m située d'un des deux côtés de son plan, un pareil nombre de masses, concentrées au centre* M *de* ω, *et égales, pour chaque molécule m, à la masse du cylindre oblique taillé dans la matière du côté opposé, ayant* ω *pour base, et des arêtes égales et parallèles à la ligne de jonction* Mm *du centre* M *à cette molécule m*; car ce cylindre contient évidemment toutes les molécules, situées de son côté, qui agissent sur des molécules situées du côté opposé de la face à des distances égales et parallèles à Mm; en sorte que l'une des deux résultantes comprend le même nombre total d'actions de mêmes directions et intensités que l'autre résultante, et elles sont égales. Il en résulte que si l'on suppose la face ω perpendiculaire aux x, et si l'on désigne par

- r la distance Mm du centre M de la face à l'une quelconque des molécules environnantes;
- $\frac{1}{2}\mathrm{S}$ une somme relative aux distances r de celles d'un côté de la face, ou S la somme relative aux distances de toutes celles des deux côtés;
- x, y, z les projections de r sur les x, y, z;
- fr l'action mutuelle de deux molécules par unité de leurs masses, à une distance ayant *la grandeur et la direction de r*, cette action étant supposée devenir insensible quand r devient sensible;
- ρ la densité, en sorte que $\rho.\omega\mathrm{x}$ est la masse du cylindre oblique; $\rho\omega\mathrm{x}.m.fr$ est l'action, sur m, de cette masse concentrée en M; et $\rho\omega\mathrm{x}.mfr.\frac{\mathrm{x}}{r}$, $\rho\omega\mathrm{x}.mfr.\frac{\mathrm{y}}{r}$ sont les composantes de cette action suivant les x et suivant les y;

l'on a, pour l'état primitif du corps, en divisant par ω afin de rapporter les pressions à l'unité superficielle, la première et la dernière des expressions suivantes, dont les faut supposer alors que la forme linéaire soit déjà établie, et en ayant

---

autres se prouvent de même,

$$(11)\quad \begin{cases} p^0_{xx} = \dfrac{\rho}{2} \mathbf{S}\, m \dfrac{fr}{r} \mathrm{x}^2, & p^0_{yy} = \dfrac{\rho}{2} \mathbf{S}\, m \dfrac{fr}{r} \mathrm{y}^2, \quad p^0_{zz} = \dfrac{\rho}{2} \mathbf{S}\, m \dfrac{fr}{r} \mathrm{z}^2, \\ p^0_{yz} = \dfrac{\rho}{2} \mathbf{S}\, m \dfrac{fr}{r} \mathrm{yz}, & p^0_{zx} = \dfrac{\rho}{2} \mathbf{S}\, m \dfrac{fr}{r} \mathrm{zx}, \quad p^0_{xy} = \dfrac{\rho}{2} \mathbf{S}\, m \dfrac{fr}{r} \mathrm{xy}. \end{cases}$$

Actuellement, si, par suite des déplacements éprouvés par les points, on suppose que :

x, y, z, coordonnées de M, deviennent $x + u$, $y + v$, $z + w$;

$x + \mathrm{x}$, $y + \mathrm{y}$, $z + \mathrm{z}$, coordonnées de m, deviennent $x + u + \mathrm{x} + \Delta u$, $y + v + \mathrm{y} + \Delta v$, $z + w + \mathrm{z} + \Delta w$, les Δ désignant les excès des quantités relatives à m sur les quantités de même nom relatives à M;

ρ, r deviennent ρ_1, r_1;

l'on a, pour l'état nouveau,

$$p_{xx} = \frac{\rho_1}{2} \mathbf{S}\, m\, (\mathrm{x} + \Delta u)^2 \frac{fr_1}{r_1}, \quad p_{yz} = \frac{\rho_1}{2} \mathbf{S}\, m\, (\mathrm{y} + \Delta v)(\mathrm{z} + \Delta w) \frac{fr_1}{r_1}.$$

Or, en se bornant à écrire les premières puissances de quantités très-petites, on a

$$\frac{fr_1}{r_1} = \frac{fr}{r} + (r_1 - r) \frac{d\dfrac{fr}{r}}{dr},$$

$$r_1 - r = \frac{\mathrm{x}}{r} \Delta u + \frac{\mathrm{y}}{r} \Delta v + \frac{\mathrm{z}}{r} \Delta w, \text{ somme des projections de } \Delta u,\ \Delta v,\ \Delta w \text{ sur } r,$$

$$\Delta u = \frac{du}{dx} \mathrm{x} + \frac{du}{dy} \mathrm{y} + \frac{du}{dz} \mathrm{z}, \quad \Delta v = \frac{dv}{dx} \mathrm{x} + \ldots, \quad \Delta w = \frac{dw}{dx} \mathrm{x} + \ldots.$$

$$\rho_1 = \rho : \left(1 + \frac{du}{dx}\right)\left(1 + \frac{dv}{dy}\right)\left(1 + \frac{dw}{dz}\right) = \rho \left(1 - \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy} - \frac{dw}{dz}\right).$$

Substituant dans

$$p_{xx} = \frac{\rho_1}{2} \mathbf{S}\, m\, (\mathrm{x} + \Delta u)^2 \frac{fr_1}{r_1}, \quad p_{yz} = \ldots,$$

effectuant les multiplications, faisant passer hors des signes $\mathbf{S}$ les dérivées de u, v, w, qui sont les mêmes pour une portion imperceptible du corps, et dont les carrés et prosoin de mettre, comme Green [*], dans les six termes de l'expression (9) de Φ affectés des pressions primitives $p^0_{xx},\ldots, p^0_{yz},\ldots$ les *valeurs complètes* (3)

$$\frac{du}{dx}+\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2,\ldots, \frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}+\frac{du}{dy}\frac{du}{dz}+\frac{dv}{dy}\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\frac{dw}{dz}, \text{ etc.},$$

des dilatations et glissements $\partial_x,\ldots, g_{yz},\ldots$, afin de ne négliger que des produits du troisième ordre dans ces six termes comme dans les vingt et un venant de Φ^1, où l'on peut se contenter de substituer les expressions réduites (2) $\frac{du}{dx},\ldots, \frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy},\ldots$ des ∂ et g; et si, ensuite, l'on tire les valeurs des composantes de pression des conditions *définies* à satisfaire à la surface limite ou enveloppe du corps ou de la portion de corps que l'on considère [**].

---

duits peuvent être effacés; enfin faisant les quinze expressions

$$(12)\quad \frac{\rho}{2}\mathop{\mathrm{S}} m\frac{1}{r}\frac{d\frac{fr}{r}}{dr}(\mathrm{x}^4 \text{ ou } \mathrm{x}^2\mathrm{y}^2 \text{ ou } \mathrm{x}^2\mathrm{yz} \text{ ou etc.}) = \mathrm{a}_{xxxx} \text{ ou } \mathrm{a}_{xxyy} \text{ ou } \mathrm{a}_{xxyz} \text{ ou etc.},$$

l'on obtient bien, eu égard aux valeurs précédentes (11) de $p^0_{xx},\ldots, p^0_{xy}$, ainsi qu'aux expressions (1) que nous avons appelées $p^1_{xx},\ldots, p^1_{xy}$ en y admettant les égalités (5) et (8) entre leurs coefficients, l'on obtient, dis-je, les formules complètes (10) qui sont à prendre pour les composantes de pression $p_{xx},\ldots, p_{xy}$ quand il y a des pressions antérieurement aux déplacements.

[*] *On the Propagation of Light in crystallised Media* (*Transactions of the Cambridge Society*, vol. VII, p. 125-126).

[**] En effet, δ étant, comme dans la Mécanique analytique, la caractéristique des variations, les projections, sur les axes des x, y, z, de l'espace infiniment petit quelconque que l'on fait parcourir *virtuellement* à un point dont les coordonnées x, y, z sont devenues $x_1 = x+u$, $y_1 = y+v$, $z_1 = z+w$, ont pour grandeurs δx_1, δy_1, δz_1 qui sont la même chose que δu, δv, δw puisque les coordonnées primitives x, y, z n'ont pas de variations; en sorte que comme $\delta\Phi$, variation du potentiel, est le travail des forces intérieures par unité de volume d'un élément $dx\,dy\,dz$, si X, Y, Z sont les composantes suivant x, y, z des forces extérieures agissant à la manière de la pesanteur sur la même unité, et si

$$\varpi\, d\Omega$$

désigne la *pression extérieure* sur un élément quelconque $d\Omega$ de la surface-enveloppe, La formule complète (9) du potentiel, avec les expressions du se-

---

que nous appelons Ω, du corps ou de la portion de corps que nous considérons, nous avons, pour tout ce corps ou cette portion, l'équation d'équilibre ou de nullité du travail virtuel total :

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} &\iiint \rho\, dx\, dy\, dz\, (X\,\delta u + Y\,\delta v + Z\,\delta w) + \\ &+\int d\Omega\,[\varpi\cos(\varpi, x)\,\delta u + \varpi\cos(\varpi, y)\,\delta v + \varpi\cos(\varpi, z)\,\delta w] = \\ &= \iiint dx\, dy\, dz\, \delta\Phi. \end{aligned}\right.$$

Mettant pour Φ sa valeur (9) en u, v, w, comme nous venons de dire, en conservant dans tous les termes les produits du second ordre de leurs dérivées, puis effectuant la différentiation par δ et changeant les δd en $d\delta$, les termes en δu, qu'il suffit de considérer seuls parce qu'il sera facile d'en déduire par analogie les termes en δv, δw, fournissent, dans le second membre de cette équation (13) eu égard aux valeurs (1) des p',

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &\iiint \left[\overset{0}{p}_{xx}\left(1+\frac{du}{dx}\right) + \overset{0}{p}_{xy}\frac{du}{dy} + \overset{0}{p}_{zx}\frac{du}{dz} + p'_{xx}\right]\frac{d\delta u}{dx}\,dx\,dy\,dz \\ &+\iiint \left[\overset{0}{p}_{xy}\left(1+\frac{du}{dx}\right) + \overset{0}{p}_{yy}\frac{du}{dy} + \overset{0}{p}_{yz}\frac{du}{dz} + p'_{xy}\right]\frac{d\delta u}{dy}\,dx\,dy\,dz \\ &+\iiint \left[\overset{0}{p}_{zx}\left(1+\frac{du}{dx}\right) + \overset{0}{p}_{yz}\frac{du}{dy} + \overset{0}{p}_{zz}\frac{du}{dz} + p'_{zx}\right]\frac{d\delta u}{dz}\,dx\,dy\,dz. \end{aligned}\right.$$

Avant d'intégrer par parties de manière à détacher trois intégrales doubles et à ne conserver sous les signes $\int$ que δu non différentié, il faut remarquer, avec M. Charles Neumann, de Halle, qui a donné une analyse de ce genre pour le cas particulier de l'isotropie (*Zur Theorie der Elasticität*, au *Journal de Crelle*, LVII[e] cahier, 1860, p. 281), qu'il convient de faire ces intégrations pour le *nouveau volume*

$$\iiint dx_1\, dy_1\, dz_1$$

qu'occupe le corps depuis les déplacements, et changer par conséquent, au moins dans les facteurs hors des trois crochets, les variables x, y, z dans x_1, y_1, z_1 prises à leur tour comme indépendantes. Cela exige qu'on remplace :

1° $dx\,dy\,dz$ par $dx_1\,dy_1\,dz_1$ multiplié par un déterminant sextinôme $\dfrac{dx}{dx_1}\dfrac{dy}{dy_1}\dfrac{dz}{dz_1} - \ldots$ (Lacroix, *Calcul différentiel*, t. II, p. 207, n° 531) qui n'est autre chose que le rapcond degré (3) à la place des $\partial_x, \ldots g_{yz}, \ldots$ dans le sextinôme en p^0,

---

port du volume ancien au volume nouveau d'un même élément, et qu'on peut réduire à son premier terme

$$\left(1-\frac{du}{dx_1}\right)\left(1-\frac{dv}{dy_1}\right)\left(1-\frac{dw}{dz_1}\right)=1-\frac{du}{dx_1}-\frac{dv}{dy_1}-\frac{dw}{dz_1},$$

vu que tous les autres termes sont du deuxième et du troisième ordre en u, v, w.

$$2^{\circ}\ \frac{d\delta u}{dx} \text{ par } \frac{d\delta u}{dx_1}\frac{dx_1}{dx}+\frac{d\delta u}{dy_1}\frac{dy_1}{dx}+\frac{d\delta u}{dz_1}\frac{dz_1}{dx}=\frac{d\delta u}{dx_1}\left(1+\frac{du}{dx}\right)+\frac{d\delta u}{dy_1}\frac{dv}{dx}+\frac{d\delta u}{dz_1}\frac{dw}{dx},$$

$$\text{et de même}\left\{\begin{aligned}&\frac{d\delta u}{dy} \text{ par } \frac{d\delta u}{dx_1}\frac{du}{dy}+\frac{d\delta u}{dy_1}\left(1+\frac{dv}{dy}\right)+\frac{d\delta u}{dz_1}\frac{dw}{dy},\\&\frac{d\delta u}{dz} \text{ par } \frac{d\delta u}{dx_1}\frac{du}{dz}+\frac{d\delta u}{dy_1}\frac{dv}{dz}+\frac{d\delta u}{dz_1}\left(1+\frac{dw}{dz}\right).\end{aligned}\right.$$

Faisant cette substitution et effectuant les multiplications des polynômes entre crochets par les neuf facteurs $1+\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}, \frac{dw}{dx}, \frac{du}{dy}$, etc., et aussi par $1-\frac{du}{dx_1}-\frac{dv}{dy_1}-\frac{dw}{dz_1}$ qu'on peut remplacer par $1-\frac{du}{dx}-\frac{dv}{dy}-\frac{dw}{dz}$ puisqu'on néglige les quantités du second ordre en u, v, w, l'expression (14) devient

$$\iiint A\frac{d\delta u}{dx_1}dx_1\,dy_1\,dz_1+\iiint B\frac{d\delta u}{dy_1}dx_1\,dy_1\,dz_1+\iiint C\frac{d\delta u}{dz_1}dx_1\,dy_1\,dz_1,$$

en faisant

$$\begin{aligned}A&=p^0_{xx}\left(1+\frac{du}{dx}-\frac{dv}{dy}-\frac{dw}{dz}\right)+2p^0_{xy}\frac{du}{dy}+2p^0_{zx}\frac{du}{dz}+p^1_{xx},\\B&=p^0_{xy}\left(1-\frac{dw}{dz}\right)+p^0_{xx}\frac{dv}{dx}+p^0_{yy}\frac{du}{dy}+p^0_{yz}\frac{du}{dz}+p^0_{zx}\frac{dv}{dz}+p^1_{xy},\\C&=p^0_{zx}\left(1-\frac{dv}{dy}\right)+p^0_{zz}\frac{du}{dz}+p^0_{xx}\frac{dw}{dx}+p^0_{xy}\frac{dw}{dy}+p^0_{yz}\frac{du}{dy}+p^1_{zx}.\end{aligned}$$

Intégrant par parties et désignant par les accents ′ et ″ les valeurs de A, ou B, ou C, et de δu, relatives aux deux points où l'enveloppe du corps est traversée par des droites respectivement parallèles aux x, aux y, aux z servant d'axes aux parallélipipèdes tronqués infiniment déliés dont les sections droites sont $dy_1\,dz_1$, $dz_1\,dx_1$, $dx_1\,dy_1$, peut, au reste, être obtenue directement et facilement, en admettant la

---

elle se change en

$$
(15)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\iint dy_1\,dz_1\,(\mathrm{A}''\,\delta u'' - \mathrm{A}'\,\delta u') + \iint dz_1\,dx_1\,(\mathrm{B}''\,\delta u'' - \mathrm{B}'\,\delta u') \\
&\quad + \iint dx_1\,dy_1\,(\mathrm{C}''\,\delta u'' - \mathrm{C}'\,\delta u') - \iiint dx_1\,dy_1\,dz_1 \times \\
&\times \left\{
\begin{aligned}
&p^0_{xx}\frac{d^2u}{dx\,dx_1} + p^0_{yy}\frac{d^2u}{dy\,dy_1} + p^0_{zz}\frac{d^2u}{dz\,dz_1} + \\
&+ p^0_{yz}\left(\frac{d^2u}{dy\,dz_1} + \frac{d^2u}{dz\,dy_1}\right) + p^0_{zx}\left(\frac{d^2u}{dz\,dx_1} + \frac{d^2u}{dx\,dz_1}\right) + p^0_{xy}\left(\frac{d^2u}{dx\,dy_1} + \frac{d^2u}{dy\,dx_1}\right) \\
&+ \frac{dp^1_{xx}}{dx_1} + \frac{dp^1_{yx}}{dy_1} + \frac{dp^1_{zx}}{dz_1}
\end{aligned}
\right\}\delta u.
\end{aligned}
\right.
$$

Les trois intégrales doubles peuvent, par une transformation facile et d'ailleurs bien connue (Lagrange, *Mécanique analytique*, I, VII, nº 30, ou Lamé, *Leçons sur l'Élasticité*, § 10, p. 22), être remplacées par des intégrales simples relatives à toute la surface enveloppe, en sorte que si n désigne la normale élevée extérieurement à cette surface, les trois premiers termes de l'expression (15) peuvent être écrits

$$\int d\Omega\cos(\mathrm{n}, x)\,\mathrm{A}\,\delta u + \int d\Omega\cos(\mathrm{n}, y)\,\mathrm{B}\,\delta u + \int d\Omega\cos(\mathrm{n}, z)\,\mathrm{C}\,\delta u.$$

Il en résulte, en comparant avec la partie du $\int d\Omega$ de l'équation (13) affectée de δu:

$$\varpi\cos(\varpi, x) = \mathrm{A}\cos(\mathrm{n}, x) + \mathrm{B}\cos(\mathrm{n}, y) + \mathrm{C}\cos(\mathrm{n}, z).$$

Or la pression $\varpi\,d\Omega$ sur la face $d\Omega$ étant, comme on sait, en vertu du théorème qu'on déduit de l'équilibre du tétraèdre élémentaire (et qui pourrait être déduit de considérations comme celles-ci), résultante de celles que supportent ses trois projections $d\Omega\cos(\mathrm{n}, x)$, $d\Omega\cos(\mathrm{n}, y)$, $d\Omega\cos(\mathrm{n}, z)$ sur des plans très-voisins, perpendiculaires aux x, y, z, l'on a, en décomposant tout parallèlement aux x,

$$\varpi\cos(\varpi, x) = p_{xx}\cos(\mathrm{n}, x) + p_{xy}\cos(\mathrm{n}, y) + p_{zx}\cos(\mathrm{n}, z);$$

ces deux expressions de $\varpi\cos(\varpi, x)$ devant être égales quels que soient les angles (n, x), (n, y), (n, z), on a

$$p_{xx} = \mathrm{A},\quad p_{xy} = \mathrm{B},\quad p_{zx} = \mathrm{C},$$

loi des actions moléculaires, sans passer par l'établissement des for-

---

c'est-à-dire les expressions (10) qui se trouvent, ainsi, autrement démontrées, comme on se le proposait, que par le calcul des actions moléculaires.

Il est bon d'observer que si l'on n'avait pas changé, comme M. Neumann, dans $\int\int\int dx\,dy\,dz\,\delta\Phi$, les variables x, y, z pour celles x_1, y_1, z_1, ou transformé l'expression (14) en l'expression (15), on aurait trouvé l'égalité des quadrinômes entre crochets de l'expression (14) à trois certaines forces, que nous pouvons appeler $P_{x''x}$, $P_{y''x}$, $P_{z''x}$, composantes suivant x des pressions, non pas sur les faces d'une superficie $= 1$ et actuellement perpendiculaires aux axes coordonnés, mais sur des faces légèrement obliques qui ont eu primitivement ces directions et cette grandeur, changée maintenant, en raison des trois dilatations $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dy}$, $\frac{dw}{dz}$ de leurs dimensions, dans les grandeurs respectives suivantes

$$\left(1+\frac{dv}{dy}\right)\left(1+\frac{dw}{dz}\right),\quad \left(1+\frac{dw}{dz}\right)\left(1+\frac{du}{dx}\right),\quad \left(1+\frac{du}{dx}\right)\left(1+\frac{dv}{dy}\right).$$

On arrive toujours au même résultat pour p_{xx}, p_{xy}, p_{zx} en transformant $P_{x''x}$, $P_{y''x}$, $P_{z''x}$ comme a fait Poisson (aux pages 47-52 de son Mémoire inséré au 20[e] cahier du *Journal de l'École Polytechnique*); c'est-à-dire en remarquant que si x', y', z' désignent les directions des intersections de ces trois faces deux à deux, et si l'on écrit, pour abréger, $c_{x'x}$ pour $\cos(x', x)$ et ainsi des autres, l'on a (4[e] note du n° 2)

$$\begin{array}{lll}
c_{x'x} = 1, & c_{x'y} = \frac{dv}{dx}, & c_{x'z} = \frac{dw}{dx}; \\
c_{y'x} = \frac{du}{dy}, & c_{y'y} = 1, & c_{y'z} = \frac{dw}{dy}; \\
c_{z'x} = \frac{du}{dz}, & c_{z'y} = \frac{dv}{dz}, & c_{z'z} = 1;
\end{array}$$

d'où facilement, x'', y'', z'' étant les directions des normales aux mêmes trois faces, c'est-à-dire x'' étant perpendiculaire à y' et z', y'' à z' et x', z'' à x' et y',

$$(16)\quad \left\{\begin{array}{lll}
c_{x''x} = 1, & c_{x''y} = -\frac{du}{dy}, & c_{x''z} = -\frac{du}{dz}; \\
c_{y''x} = -\frac{dv}{dx}, & c_{y''y} = 1, & c_{y''z} = -\frac{dv}{dz}; \\
c_{z''x} = -\frac{dw}{dx}, & c_{z''y} = -\frac{dw}{dy}, & c_{z''z} = 1;
\end{array}\right.$$

mules des pressions, si l'on opère comme ont fait, depuis Navier, qui a ouvert cette voie, M. Haughton [*] et M. Ch. Neumann (Mémoire cité) en généralisant leur analyse [**].

---

et, par suite, en projetant chacune de ces trois faces légèrement obliques sur les plans coordonnés rectangulaires yz, zx, xy et invoquant, comme tout à l'heure, l'équilibre du tétraèdre

$$P_{x''x} = \left(1+\frac{dv}{dy}\right)\left(1+\frac{dw}{dz}\right)\left(p_{xx} - p_{xy}\frac{du}{dy} - p_{zx}\frac{du}{dz}\right),$$

$$P_{y''x} = \left(1+\frac{dw}{dz}\right)\left(1+\frac{du}{dx}\right)\left(-p_{xx}\frac{dv}{dx} + p_{xy} - p_{zx}\frac{dv}{dz}\right),$$

$$P_{z''x} = \left(1+\frac{du}{dx}\right)\left(1+\frac{dv}{dy}\right)\left(-p_{xx}\frac{dw}{dx} - p_{xy}\frac{dw}{dy} + p_{zx}\right).$$

En égalant ces expressions aux trois polynômes entre crochets de l'expression (14), et divisant par les facteurs binômes $\left(1+\frac{dv}{dy}\right)$, etc., les deux membres des équations qui en résultent, on tire immédiatement

$$p_{xx},\ p_{xy},\ p_{zx} = \text{les trois polynômes A, B, C,}$$

ou trois des expressions à démontrer, équations (10), sans avoir à résoudre d'équations à trois inconnues p_{xx}, p_{xy}, p_{zx}, puisque l'on peut, en négligeant les produits des dérivées de u, v, w, remplacer, dans les termes qui en sont affectés, les p_{xx}, p_{xy}, p_{zx} par $P_{x''x}$, $P_{y''x}$, $P_{z''x}$ et conséquemment par p^0_{xx}, p^0_{xy}, p^0_{zx}.

[*] *On Equilibrium and Motion of solid and fluid Bodies*, lu le 25 mai 1846 (*Trans. of Irish Academy*, vol. XXI).

[**] En effet, le potentiel de l'action, sur une molécule unique m, des molécules environnantes m dont les distances $r = \sqrt{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2+\mathrm{z}^2}$ (notations ci-dessus) sont devenues r_1, est, si l'on fait pour un moment $\int_r^{r_1} fr_1\,dr_1 = \varphi(r_1)$,

$$\mathrm{m}\,\mathbf{S}\, m\,\varphi(r_1) = \mathrm{m}\,\mathbf{S}\, m\left[\varphi(r) + (r_1 - r)\,\varphi'(r) + \frac{(r_1-r)^2}{2}\varphi''(r)\right]$$
$$= \mathrm{m}\,\mathbf{S}\, m\left[\qquad (r_1 - r)fr + \frac{(r_1-r)^2}{2}\frac{dfr}{dr}\right].$$

On voit aussi, par les expressions (10) de p_{xx}, etc., que c'est seulement quand les pressions primitives p^0_{xx}, etc., n'excèdent pas, pour

---

Or

$$r_1 - r = -r + \left[(x+\Delta u)^2 + (y+\Delta v)^2 + (z+\Delta w)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{2} r \frac{2x\Delta u + 2y\Delta v + 2z\Delta w + (\Delta u)^2 + (\Delta v)^2 + (\Delta w)^2}{r^2} +$$
$$+ \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2} \cdot r \cdot \left(\frac{2x\Delta u + 2y\Delta v + 2z\Delta w}{r^2}\right)^2;$$

d'où, vu que $-\dfrac{fr}{2r^2} + \dfrac{1}{2r}\dfrac{dfr}{dr} = \dfrac{1}{2}\dfrac{d\dfrac{fr}{r}}{dr}$,

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} & \mathrm{m}\,\mathbf{S}\, m \int_r^{r_1} fr_1\, dr_1 = \mathrm{m}\,\mathbf{S}\, m \left\{ \frac{fr}{r}\left[x\Delta u + y\Delta v + z\Delta w + \frac{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2 + (\Delta w)^2}{2}\right] + \right. \\ & \left. \qquad + \frac{1}{2r}\frac{d\frac{fr}{r}}{dr}(x\Delta u + y\Delta v + z\Delta w)^2 \right\}. \end{aligned}\right.$$

On en déduit le potentiel Φ des actions moléculaires *mutuelles* de l'unité de volume, en multipliant par la densité ρ, après avoir divisé par *deux fois* la masse de la molécule m parce que la même force fr est relative à deux molécules qui l'exercent l'une sur l'autre. Mettant ensuite pour Δu, Δv, Δw leurs valeurs $\dfrac{du}{dx}x + \dfrac{du}{dy}y + \dfrac{du}{dz}z$, $\dfrac{dv}{dx}x + \ldots$ de la 2^e note du n° **3**, effectuant les multiplications et faisant passer hors des signes $\mathbf{S}$ les dérivées de u, v, w et leurs produits du second degré, l'on a, vu les notations (11),

$$\frac{\rho}{2}\mathbf{S}\, m \frac{fr}{r} x^2 = p^0_{xx}, \ldots,$$

et, vu les notations (12),

$$\frac{\rho}{2}\mathbf{S}\, m \frac{1}{r}\frac{d\frac{fr}{r}}{dr} x^4 = \mathrm{a}_{xxxx}, \ldots,$$

précisément l'expression (9) du potentiel Φ en mettant pour Φ^1 son développement (6), et, pour ∂_x, ∂_y,..., g_{xy}, dans les termes en p^0, les expressions *complètes* (3) de ces dilatations et glissements posées sans négliger les carrés et produits du second degré.

Il est remarquable qu'on arrive ainsi à ces expressions (3) d'une manière si différente de celle de la 4^e note du n° **2**. C'est une preuve de plus de la fécondité de la considération du potentiel, si bien liée à l'emploi des méthodes de la Mécanique analytique.

l'ordre des grandeurs, les p^1_{xx}, etc., qui seraient dues aux seuls déplacements, c'est-à-dire dans les cas les plus ordinaires des solides terrestres, où l'on peut prendre simplement $p_{xx} = p^0_{xx} + p^1_{xx}$ et ainsi des autres composantes de pressions, que ces six composantes sont les dérivées d'une même fonction Φ par rapport aux six variables ∂_x, $\partial_y, \ldots, g_{xy}$. Dans les cas où les p^0 excèdent beaucoup les p^1, l'on n'aurait, en différentiant ainsi cette fonction, que des expressions incomplètes de $p_{xx}, \ldots, p_{xy}$.

Et ce n'est que dans le cas particulier de la contexture isotrope, seul considéré par M. Neumann, que les mêmes composantes de pression peuvent être les dérivées d'une même fonction par rapport aux neuf coefficients différentiels $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \ldots, \frac{dw}{dz}$ [*].

4. *Équations de l'équilibre où entrent aussi les coefficients* a_{xxxx}, *etc.*, *et les pressions primitives* p^0_{xx}, *etc.* — Ces équations *indéfinies*, ou à satisfaire en tous les points du corps, s'obtiennent par divers moyens. Il est important de les mentionner pour montrer leur accord, en ce qui regarde surtout la partie affectée des pressions primitives p^0_{xx}, etc., qu'on omet souvent, mais dont nous devons mettre ici la forme hors

---

[*] Cette fonction, indiquée par M. Neumann, est le potentiel augmenté de l'expression suivante, dans laquelle p_0 représente les valeurs de $p^0_{xx}, p^0_{yy}, p^0_{zz}$, ou la pression primitive égale en tous sens dans le cas de l'isotropie (où $p^0_{yz}, p^0_{zx}, p^0_{xy}$ sont nuls)

$$p_0\left(\frac{dv}{dz}\frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dy}\frac{dw}{dz} + \frac{dw}{dx}\frac{du}{dz} - \frac{dw}{dz}\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy}\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dx}\frac{dv}{dy}\right).$$

Aucune expression plus générale ne nous paraît pouvoir être ajoutée au potentiel pour avoir, avec une contexture non isotrope (même symétrique par rapport à trois plans), une fonction de $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \ldots, \frac{dw}{dz}$ qui donne les composantes $p_{xx}, p_{yy}, \ldots, p_{xy}, p_{yx}$ quand on la différentie par rapport à ses neuf variables. Nous pensons donc que l'analyse, du reste large et remarquable, donnée par le savant M. Haughton dans son deuxième écrit, du 18 janvier 1849 (*A Classification of elastic Media*, *Trans. of Irish Academy*, vol. XXII), où il semble concéder à MM. Green et Mac-Cullagh qu'on peut se passer de la loi des actions moléculaires très-bien employée par lui précédemment dans son beau Mémoire de mai 1846 déjà cité, ne peut bien s'appliquer qu'aux deux cas dont nous parlons : *pressions primitives peu considérables*, et *isotropie*.

de doute dans la vue de l'application que nous aurons à en faire au § IV, afin de bien établir qu'il ne faut point chercher dans l'existence possible de ces pressions un expédient pour mettre les résultats du calcul des vibrations lumineuses d'accord avec une hypothèse que tout porte au contraire à abandonner.

Le premier moyen consiste donc à substituer dans les équations générales de l'équilibre d'un élément parallélipipède intérieur, qui sont :

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dp_{xx}}{dx}+\frac{dp_{yx}}{dy}+\frac{dp_{zx}}{dz}+\rho X=0,\\ &\frac{dp_{xy}}{dx}+\frac{dp_{yy}}{dy}+\frac{dp_{zy}}{dz}+\rho Y=0,\\ &\frac{dp_{xz}}{dx}+\frac{dp_{yz}}{dy}+\frac{dp_{zz}}{dz}+\rho Z=0,\end{aligned}\right.$$

les expressions (10) des composantes de pression p_{xx}, etc., que nous avons obtenues *de deux manières*, dont une se fondait uniquement sur leur *linéarité* supposée admise, sans invoquer autrement et explicitement la loi contestée des actions moléculaires. Le résultat de cette substitution est la destruction des termes négatifs en p^0, d'où ces équations d'équilibre

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} -\rho X = {} & p^0_{xx}\frac{d^2u}{dx^2}+p^0_{yy}\frac{d^2u}{dy^2}+p^0_{zz}\frac{d^2u}{dz^2}+2p^0_{yz}\frac{d^2u}{dy\,dz}+2p^0_{zx}\frac{d^2u}{dz\,dx}+2p^0_{xy}\frac{d^2u}{dx\,dy}\\ &+\mathrm{a}_{xxxx}\frac{d^2u}{dx^2}+\mathrm{a}_{xyxy}\frac{d^2u}{dy^2}+\mathrm{a}_{zxzx}\frac{d^2u}{dz^2}\\ &+2\,\mathrm{a}_{zxxy}\frac{d^2u}{dy\,dz}+2\,\mathrm{a}_{xxzx}\frac{d^2u}{dz\,dx}+2\,\mathrm{a}_{xxxy}\frac{d^2u}{dx\,dy}\\ &+\mathrm{a}_{xxxy}\frac{d^2v}{dx^2}+\mathrm{a}_{xyyy}\frac{d^2v}{dy^2}+\mathrm{a}_{zxyz}\frac{d^2v}{dz^2}\\ &+(\mathrm{a}_{xyyz}+\mathrm{a}_{zxyy})\frac{d^2v}{dy\,dz}+(\mathrm{a}_{xxyz}+\mathrm{a}_{zxxy})\frac{d^2v}{dz\,dx}+(\mathrm{a}_{xxyy}+\mathrm{a}_{xyxy})\frac{d^2v}{dx\,dy}\\ &+\mathrm{a}_{xxzx}\frac{d^2w}{dx^2}+\mathrm{a}_{xyyz}\frac{d^2w}{dy^2}+\mathrm{a}_{zxzz}\frac{d^2w}{dz^2}\\ &+(\mathrm{a}_{zxyz}+\mathrm{a}_{xyzz})\frac{d^2w}{dy\,dz}+(\mathrm{a}_{xxzz}+\mathrm{a}_{zxzx})\frac{d^2w}{dz\,dx}+(\mathrm{a}_{xxyz}+\mathrm{a}_{xyzx})\frac{d^2w}{dx\,dy};\\ -\rho Y = {} & \end{aligned}\right.$$

$$
(19)\ (\text{suite})\left\{
\begin{aligned}
-\rho Y &= p^0_{xx}\frac{d^2v}{dx^2} + p^0_{yy}\frac{d^2v}{dy^2} + \ldots + 2p^0_{xy}\frac{d^2v}{dx\,dy} \\
&\quad + \mathrm{a}_{xyxx}\frac{d^2u}{dx^2} + \ldots + \mathrm{a}_{xyxy}\frac{d^2v}{dx^2} + \ldots + \mathrm{a}_{xyzx}\frac{d^2w}{dx^2} + \ldots; \\
-\rho Z &= p^0_{xx}\frac{d^2w}{dx^2} + p^0_{yy}\frac{d^2w}{dy^2} + \ldots + 2p^0_{xy}\frac{d^2w}{dx\,dy} \\
&\quad + \mathrm{a}_{zxxx}\frac{d^2u}{dx^2} + \ldots + \mathrm{a}_{zxxy}\frac{d^2v}{dx^2} + \ldots + \mathrm{a}_{zxzx}\frac{d^2w}{dx^2} + \ldots .
\end{aligned}\right.
$$

On arrive aussi à ces équations directement, comme a fait M. Cauchy, sans passer par la considération des pressions, en posant, comme Navier, les conditions de l'équilibre d'un seul des points matériels du système solide, supposé sollicité, suivant la loi énoncée, par les actions des points environnants [*].

Mais un troisième moyen qui dispense, comme le premier, de mettre en œuvre cette loi contestée des actions, consiste à se servir de l'expression (9) du potentiel

$$\Phi = \Phi^0 + p^0_{xx}\,\partial_x + \ldots + \frac{1}{2}\mathrm{a}_{xxxx}\,\partial^2_x + \ldots,$$

---

[*] En effet, m désignant les masses de ces derniers points, les équations d'équilibre qui dans l'état primitif étaient, vu que $\frac{\mathrm{x}}{r} = \cos(r, x)$, $\frac{\mathrm{y}}{r} = \ldots$, toujours avec les notations du n° 3 (2ᵉ note),

$$(20)\qquad \mathbf{S}\, m\frac{\mathrm{x}}{r}fr = 0,\quad \mathbf{S}\, m\frac{\mathrm{y}}{r}fr = 0,\quad \mathbf{S}\, m\frac{\mathrm{z}}{r}fr = 0,$$

sont, dans l'état ultérieur,

$$(21)\ \mathbf{S}\, mfr_1\frac{\mathrm{x}+\Delta u}{r_1} + \mathrm{X} = 0,\quad \mathbf{S}\, mfr_1\frac{\mathrm{y}+\Delta v}{r_1} + \mathrm{Y} = 0,\quad \mathbf{S}\, mfr_1\frac{\mathrm{z}+\Delta w}{r_1} + \mathrm{Z} = 0.$$

Mettant, comme dans la même note, pour $\frac{fr_1}{r_1}$ sa valeur

$$\frac{fr}{r} + (\mathrm{x}\Delta u + \mathrm{y}\Delta v + \mathrm{z}\Delta w)\frac{1}{r}\frac{d\frac{fr}{r}}{dr},$$

puis pour Δu, Δv, Δw leurs développements en x, y, z par le théorème de Taylor à soit qu'on admette à priori avec Green sa composition en une somme de deux fonctions homogènes entières, l'une du premier, l'autre du second degré en $\partial_x, \partial_y, \ldots, g_{xy}$, soit qu'on le déduise des pressions en admettant aussi à priori la forme linéaire de celles-ci, deux partis entre lesquels doivent nécessairement choisir leur point de départ ceux qui refusent d'invoquer la grande loi physique en question.

En effet, en posant, comme à la quatrième note du n° 3, l'équation (13) des travaux virtuels, et en la développant, l'assimilation des parties affectées de δu dans les intégrales triples des deux membres

---

trois variables, qui peuvent être écrits symboliquement

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta u &= \left(\mathrm{x}\frac{d}{dx}+\mathrm{y}\frac{d}{dy}+\mathrm{z}\frac{d}{dz}\right)u+\frac{1}{1.2}\left(\mathrm{x}\frac{d}{dx}+\mathrm{y}\frac{d}{dy}+\mathrm{z}\frac{d}{dz}\right)^2 u \\ &\qquad +\frac{1}{1.2.3}\left(\mathrm{x}\frac{d}{dx}+\mathrm{y}\frac{d}{dy}+\mathrm{z}\frac{d}{dz}\right)^3 u+\ldots, \\ \Delta v &= \ldots, \\ \Delta w &= \ldots, \end{aligned}\right.$$

et dans lesquels il suffit ici de considérer, non plus seulement les termes du premier ordre, comme à la note citée relative au calcul des pressions, mais aussi ceux du second ordre, tels que $\frac{1}{2}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\mathrm{x}^2+\ldots+2\frac{d^2u}{dxdy}\mathrm{xy}\right)$, l'on obtient trois équations, où les dérivées du premier ordre sont affectées de sommes $\mathrm{S}m\frac{fr}{r}$ (x ou y ou z), nulles d'après les équations (20), et de sommes telles que $\mathrm{S}\frac{m}{r}\frac{d\frac{fr}{r}}{dr}$ (x^3 ou $\mathrm{x}^2\mathrm{y}$ ou xyz), également relatives à l'état primitif, et que l'on doit aussi, avec Cauchy, regarder comme nulles ou négligeables parce que, ne contenant que des produits du troisième degré des petites lignes x, y, z, elles se composent de termes qui se détruisent deux à deux, ou rigoureusement ou avec toute l'approximation désirable si le corps était primitivement, comme on le suppose, ou homogène, ou d'une contexture ne variant que graduellement et fort peu dans une étendue imperceptible (supposition implicitement faite dans la note du n° 3). Restent les termes du second ordre, ou restent précisément, en multipliant par la densité ρ, les équations (19).

On sait que M. Cauchy a considéré et appliqué, dans la théorie de la lumière, spécialement pour expliquer la dispersion, d'autres équations, où tous les termes des développements (22) sont conservés jusqu'à l'infini.

de cette équation conduit à

$$-\rho X = \{\text{le polynôme de l'accolade de (15)}\}.$$

Or ce polynôme où l'on peut, à cela près de produits négligeables, remplacer, comme on a déjà dit, ainsi que dans $dx_1\,dy_1\,dz_1$ qui le multiplie, x_1, y_1, z_1 par x, y, z, est précisément le second membre de la première équation d'équilibre (19).

Il est remarquable qu'on arrive encore à cette même première équation (19) si l'on fait les intégrations par parties de (14) sans changer les variables indépendantes x, y, z en x_1, y_1, z_1; ou si l'on substitue dans la première équation (18) $\frac{dp_{zz}}{dx} + \ldots + \rho X = 0$ les trois quadrinômes entre crochets de (14) à la place de p_{xx}, p_{xy}, p_{zx}, dont ils diffèrent comme on a vu. Cette concordance singulière vient de ce qu'on peut tout aussi bien poser les équations indéfinies de l'équilibre en considérant un élément parallélipipède *obliquangle*, qu'en considérant un élément parallélipipède rectangle.

§ III. — *Formule symbolique générale fournissant, en fonction des coefficients d'élasticité pour des axes donnés, ceux qui sont relatifs à d'autres axes aussi donnés et rectangulaires, et, aussi, les coefficients qui doivent entrer dans l'expression d'une composante quelconque de pression même oblique.*

5. *Moyens d'obtenir les coefficients nouveaux.* — Abstrayons, dans tout ce paragraphe et le suivant, les pressions p^0_{xx}, etc., antérieures aux déplacements, ou prenons pour

$$p_{xx},\quad p_{yy},\ \ldots,\quad p_{xy}$$

les valeurs (1) de

$$p^1_{xx},\quad p^1_{yy},\ \ldots,\quad p^1_{xy}.$$

Si

$$x',\quad y',\quad z'$$

désignent les directions de nouveaux axes coordonnés, rectangulaires comme les anciens x, y, z, les composantes, parallèlement à x', y', z', des pressions sur les plans perpendiculaires à ces coordonnées, seront exprimées par ces formules, semblables à (1),

$$(3)\qquad \begin{cases} p_{x'x'} = a_{x'x'x'x'}\partial_{x'} + \ldots + a_{x'x'x'y'}g_{x'y'}, \\ p_{y'y'} = a_{y'y'x'x'}\partial_{x'} + \ldots, \text{ etc.}, \ p_{x'y'} = \ldots. \end{cases}$$

Et les mêmes coefficients nouveaux $a_{x'x'x'x'}$, etc., entreraient, soit dans l'expression nouvelle du potentiel

$$\Phi$$

toujours égal à lui-même ou ayant une valeur indépendante des axes, soit dans les équations d'équilibre exprimées en fonction des déplacements u', v', w' suivant les directions x', y', z'.

Nous cherchons à avoir ces vingt et un coefficients $a_{x'x'x'x'}$, $a_{x'x'y'y'}$, etc. en fonction des vingt et un anciens a_{xxxx}, etc., et des neuf cosinus $\cos(x, x')$, $\cos(y, x')$, ..., $\cos(z, z')$, que nous désignerons, pour abréger, par

$$c_{xx'},\ c_{yx'},\ c_{zx'};\ c_{xy'},\ c_{yy'},\ c_{zy'};\ c_{xz'},\ c_{yz'},\ c_{zz'}.$$

On peut y arriver à l'aide de cette branche d'analyse qui a été fort cultivée dans ces dernières années sous le nom de *calcul des formes*, ou bien des *transformations linéaires*, applicables surtout aux fonctions homogènes du premier et du second degré, car x, y, z, u, v, w sont fonctions linéaires de x', y', z', u', v', w', et réciproquement.

Mais nous pouvons trouver ces expressions, et même d'autres plus générales, sans cela, et en nous dispensant même de mettre à la place des dilatations et glissements ∂, g des fonctions des coefficients différentiels des déplacements u, v, etc.

En effet, en appelant en général

$$n$$

la *direction de la normale* à un plan nouveau sur lequel on veut prendre la pression, et

$$s$$

la *direction de décomposition*, suivant laquelle on désire avoir la composante ou la projection de la pression que ce plan supporte, ou a, avec nos notations, n et s étant ou deux des directions nouvelles x', y', z', ou même deux directions obliques quelconques,

$$(24)\quad p_{ns} = a_{nsx'x'}\partial_{x'} + a_{nsy'y'}\partial_{y'} + a_{nsz'z'}\partial_{z'} + a_{nsy'z'}g_{y'z'} + a_{nsz'x'}g_{z'x'} + a_{nsx'y'}.$$

Or la formule générale de changement de plan de pression donne, avec notre manière ci-dessus de désigner les cosinus,

$$(25)\quad \left\{ \begin{aligned} p_{ns} = {} & p_{xx}c_{nx}c_{sx} + p_{yy}c_{ny}c_{sy} + p_{zz}c_{nz}c_{sz} + p_{yz}(c_{ny}c_{sz} + c_{nz}c_{sy}) \\ & + p_{zx}(c_{nz}c_{sx} + c_{nx}c_{sz}) + p_{xy}(c_{nx}c_{sy} + c_{ny}c_{sx})\ [*]. \end{aligned} \right.$$

Mettons-y pour p_{xx}, p_{yy}, ..., p_{xy} les expressions (1)

$$a_{xxxx}\partial_x + \ldots + a_{xxxy}g_{xy}, \quad a_{yyxx}\partial_x + \ldots, \quad \text{etc.},$$

et ensuite, pour les dilatations et glissements ∂_x, ∂_y, ..., g_{xy}, dans le sens des anciens axes, leurs valeurs suivantes en fonction des dilatations et glissements dans le sens des nouveaux, et qui s'obtiennent par des considérations purement géométriques et *indépendantes des grandeurs des déplacements u, v, w des points du corps dans l'espace*,

$$(26)\quad \left\{ \begin{aligned} \partial_x &= \partial_{x'}c_{xx'}^2 + \partial_{y'}c_{xy'}^2 + \partial_{z'}c_{xz'}^2 + g_{y'z'}c_{xy'}c_{xz'} + g_{z'x'}c_{xz'}c_{xx'} \\ &\qquad + g_{x'y'}c_{xx'}c_{xy'}, \\ \partial_y &= \partial_{x'}c_{yx'}^2 + \partial_{y'}c_{yy'}^2 + \partial_{z'}c_{yz'}^2 + g_{y'z'}c_{yy'}c_{yz'} + g_{z'x'}c_{yz'}c_{yx'} \\ &\qquad + g_{x'y'}c_{yx'}c_{yy'}, \\ \partial_z &= \partial_{x'}c_{zx'}^2 + \partial_{y'}c_{zy'}^2 + \partial_{z'}c_{zz'}^2 + g_{y'z'}c_{zy'}c_{zz'} + g_{z'x'}c_{zz'}c_{zx'} \\ &\qquad + g_{x'y'}c_{zx'}c_{zy'}, \end{aligned} \right.$$

---

[*] Car comme la pression sur l'unité superficielle de cette face est résultante, d'après le théorème déduit de l'équilibre du tétraèdre, des pressions supportées par ses trois projections sur trois plans perpendiculaires aux x, aux y, aux z, et comme les superficies de celles-ci sont c_{nx}, c_{ny}, c_{nz}, les composantes de cette pression, suivant les trois coordonnées, sont respectivement

$$c_{nx}p_{xx} + c_{ny}p_{yx} + c_{nz}p_{zx}, \quad c_{nx}p_{xy} + c_{ny}p_{yy} + c_{nz}p_{zy}, \quad c_{nx}p_{xz} + c_{ny}p_{yz} + c_{nz}p_{zz},$$

qui ajoutées, après avoir été multipliées respectivement par c_{xs}, c_{ys}, c_{zs} pour obtenir la projection ou composante suivant s, donnent bien pour somme l'expression (25).

$$
(26)\ (\text{suite})\left\{
\begin{aligned}
g_{yz} &= 2\partial_{x'} c_{yx'} c_{zx'} + 2\partial_{y'} c_{yy'} c_{zy'} + 2\partial_{z'} c_{yz'} c_{zz'} \\
&\quad + g_{y'z'}(c_{yy'} c_{zz'} + c_{yz'} c_{zy'}) + g_{z'x'}(c_{yz'} c_{zx'} + c_{yx'} c_{zz'}) \\
&\qquad\qquad + g_{x'y'}(c_{yx'} c_{zy'} + c_{yy'} c_{zx'}), \\
g_{zx} &= 2\partial_{x'} c_{zx'} c_{xx'} + 2\partial_{y'} c_{zy'} c_{xy'} + 2\partial_{z'} c_{zz'} c_{xz'} \\
&\quad + g_{y'z'}(c_{zy'} c_{xz'} + c_{zz'} c_{xy'}) + g_{z'x'}(c_{zz'} c_{xx'} + c_{zx'} c_{xz'}) \\
&\qquad\qquad + g_{x'y'}(c_{zx'} c_{zy'} + c_{zy'} c_{xx'}), \\
g_{xy} &= 2\partial_{x'} c_{xx'} c_{yx'} + 2\partial_{y'} c_{xy'} c_{yy'} + 2\partial_{z'} c_{xz'} c_{yz'} \\
&\quad + g_{y'z'}(c_{xy'} c_{yz'} + c_{xz'} c_{yy'}) + g_{z'x'}(c_{xz'} c_{yx'} + c_{xx'} c_{yz'}) \\
&\qquad\qquad + g_{x'y'}(c_{xx'} c_{yy'} + c_{xy'} c_{yx'})\ [*].
\end{aligned}
\right.
$$

Cette substitution donnera une expression de p_{ns} en fonction linéaire des six déformations nouvelles $\partial_{x'}$, $\partial_{y'}$, $\partial_{z'}$, $g_{y'z'}$, $g_{z'x'}$, $g_{x'y'}$. Si on la com-

[*] On peut les tirer immédiatement de ce théorème connu (et employé en Mécanique quand on veut évaluer le travail d'une résultante de plusieurs forces pour un espace *résultant* de plusieurs autres espaces parcourus), que si l'on a deux lignes dont chacune est *résultante* géométrique de plusieurs autres lignes (ou deux *chemins directs* dont chacun unit ensemble les deux mêmes points qu'un *chemin polygonal*), le produit d'une de ces résultantes par la projection de la seconde sur sa direction est égal à la somme algébrique de tous les produits des composantes de l'une par les projections, sur leurs directions, des diverses composantes de l'autre.

En effet, en l'appliquant à deux lignes $r_1 = r(1 + \partial_r)$, $s_1 = s(1 + \partial_s)$, diagonales des deux parallélipipèdes obliquangles dans lesquels se sont changés deux parallélipipèdes rectangles dont les côtés adjacents étaient rc_{rx}, rc_{ry}, rc_{rz}, et sc_{sx}, sc_{sy}, sc_{sz}, et sont devenus $rc_{rx}(1 + \partial_x)$, $rc_{ry}(1 + \partial_y), \ldots,$ $sc_{sz}(1 + \partial_z)$, on a, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy} étant les cosinus des angles que font maintenant entre eux ces côtés, si l'on divise tout par rs :

$$
(27)\ \left\{
\begin{aligned}
(1 + \partial_r)(1 + \partial_s)\cos(r_1, s_1) &= (1 + \partial_x)^2 c_{rx} c_{sx} + (1 + \partial_y)^2 c_{ry} c_{sy} + (1 + \partial_z)^2 c_{rz} c_{sz} \\
&\quad + (c_{ry} c_{sz} + c_{rz} c_{sy})(1 + \partial_y)(1 + \partial_z)\, g_{yz} \\
&\quad + (c_{rz} c_{sx} + c_{rx} c_{sz})(1 + \partial_z)(1 + \partial_x)\, g_{zx} \\
&\quad + (c_{rx} c_{sy} + c_{ry} c_{sx})(1 + \partial_x)(1 + \partial_y)\, g_{xy},
\end{aligned}
\right.
$$

équation qui donne successivement, à cela près de produits négligeables, la première et la quatrième, par exemple, des formules (26) en écrivant x', y', z' au lieu de x, y, z, et en prenant, 1° r_1 et s_1 de même direction x, 2° r, s à angle droit et dirigées suivant y et z, puis développant chaque fois et réduisant.

parait terme à terme avec l'équation (24) $\mathrm{a}_{\mathrm{ns}\,x'x'}\partial_{x'} + \ldots$, en égalant entre eux les coefficients des mêmes ∂ ou g, on aurait les formules désirées de tous les coefficients nouveaux $\mathrm{a}_{\mathrm{ns}\,x'x'}$, $\mathrm{a}_{\mathrm{ns}\,y'y'}, \ldots$, en fonction des vingt et un anciens $\mathrm{a}_{xxxx}, \ldots$, qui s'y trouveraient multipliés par des puissances et des produits du quatrième degré des cosinus $\mathrm{c}_{xx'}, \ldots$

6. *Formule générale qui les donne.* — On abrége singulièrement le calcul et l'on arrive à quelque chose de fort simple au moyen de notations symboliques comme celles que plusieurs auteurs anglais appellent *Sylvestrian umbræ,* parce que M. Sylvester, qui les a employées avec succès, appelle *ombres de quantités* (*shadows of quantities*) [*] ces sortes de notations dont se sont servis précédemment, au reste, Cauchy et d'autres analystes.

Convenons donc que

$$\mathrm{a}_{ij}, \quad p_i, \quad \varepsilon_i,$$

sont de purs symboles qui ne représentent aucune quantité, mais dont les produits, algébriquement formés, par des symboles de même espèce, lorsqu'on développe les produits de polynômes où ils entrent, représentent les quantités a, p et ∂, g ci-dessus, en sorte qu'en général

$$(27)\quad \left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{ll} \mathrm{a}_{xx}\mathrm{a}_{yy}, & \mathrm{a}_{yz}\mathrm{a}_{zx}, \ldots, \\ p_x p_x, & p_y p_z, \ldots, \end{array}\right\} \text{ sont la même chose que } \left\{\begin{array}{ll} \mathrm{a}_{xxyy}, & \mathrm{a}_{yzzx}, \ldots, \\ p_{xx}, & p_{yz}, \ldots, \end{array}\right. \\ \left.\begin{array}{l} \varepsilon_i\varepsilon_i \ \text{ ou } \ \varepsilon_i^2, \\ 2\varepsilon_i\varepsilon_j \end{array}\right\} \text{ sont la même chose que } \left\{\begin{array}{l} \partial_i, \\ \mathrm{g}_{ij}, \end{array}\right. \\ \text{et même (en poussant plus loin la décomposition que n'a fait M. Sylvester), que} \\ \quad \mathrm{a}_i\mathrm{a}_j \text{ est la même chose que le symbole } \mathrm{a}_{ij}, \text{ et par conséquent} \\ \quad \mathrm{a}_i\mathrm{a}_j \,.\, \mathrm{a}_k\mathrm{a}_l \text{ est le coefficient } \mathrm{a}_{ijkl}. \end{array}\right.$$

---

[*] *On the Principle of the Calculus of Forms, in Cambridge and Dublin mathematical Journal,* vol. VII (XI *of Cambridge Journal*), 1852, p. 76.

A la fin d'un autre Mémoire (*Transactions of the Royal Society London,* 1853) se trouve, p. 543, une sorte de vocabulaire dans lequel M. Sylvester appelle *ombrale* une notation où ces quantités se trouvent représentées, dit-il, *par des syllabes* entre parenthèses, au lieu de l'être par de simples lettres, les deux lettres de ces syllabes étant appelées *quantités ombrales* ou *ombres.*

Alors les formules (1) des composantes de pression parallèles aux x, y, z peuvent s'écrire

$$(28)\qquad p_{xx \text{ ou } yz \text{ ou } \ldots} = \mathrm{a}_{xx \text{ ou } yz \text{ ou } \ldots}(\mathrm{a}_x\varepsilon_x + \mathrm{a}_y\varepsilon_y + \mathrm{a}_z\varepsilon_z)^2.$$

Substituant dans la formule de transformation (25),

$$p_{\mathrm{ns}} = p_{xx}\mathrm{c}_{\mathrm{n}x}\mathrm{c}_{\mathrm{s}x} + \ldots,$$

on a le sextinôme de son second membre avec des a au lieu de p, et le facteur $(\mathrm{a}_x\varepsilon_x + \mathrm{a}_y\varepsilon_y + \mathrm{a}_z\varepsilon_z)^2$ à la suite. Donc, comme cette formule (25) peut s'écrire

$$(29)\qquad p_{\mathrm{ns}} = (p_x\mathrm{c}_{\mathrm{n}x} + p_y\mathrm{c}_{\mathrm{n}y} + p_z\mathrm{c}_{\mathrm{n}z})(p_x\mathrm{c}_{\mathrm{s}x} + p_y\mathrm{c}_{\mathrm{s}y} + p_z\mathrm{c}_{\mathrm{s}z}),$$

on a

$$p_{\mathrm{ns}} = (\mathrm{a}_x\mathrm{c}_{\mathrm{n}x} + \mathrm{a}_y\mathrm{c}_{\mathrm{n}y} + \mathrm{a}_z\mathrm{c}_{\mathrm{n}z})(\mathrm{a}_x\mathrm{c}_{\mathrm{s}x} + \mathrm{a}_y\mathrm{c}_{\mathrm{s}y} + \mathrm{a}_z\mathrm{c}_{\mathrm{s}z}) \times \\ \times (\mathrm{a}_x\varepsilon_x + \mathrm{a}_y\varepsilon_y + \mathrm{a}_z\varepsilon_z)^2.$$

Or les formules (26), exprimant les ∂ et g parallèles aux x, y, z en fonction des ∂ et g parallèles aux x', y', z', peuvent s'écrire

$$(30)\quad \left\{\begin{array}{l} \varepsilon_x\varepsilon_x = (\varepsilon_{x'}\mathrm{c}_{xx'} + \varepsilon_{y'}\mathrm{c}_{xy'} + \varepsilon_{z'}\mathrm{c}_{xz'})^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varepsilon_y\varepsilon_z = (\varepsilon_{x'}\mathrm{c}_{yx'} + \varepsilon_{y'}\mathrm{c}_{yy'} + \varepsilon_{z'}\mathrm{c}_{yz'})(\varepsilon_{x'}\mathrm{c}_{zx'} + \varepsilon_{y'}\mathrm{c}_{zy'} + \varepsilon_{z'}\mathrm{c}_{zz'}), \\ \qquad \text{revenant, si } i \text{ représente l'une des directions } x,\ y,\ z, \text{ à} \\ \varepsilon_i = \varepsilon_{x'}\mathrm{c}_{ix'} + \varepsilon_{y'}\mathrm{c}_{iy'} + \varepsilon_{z'}\mathrm{c}_{iz'}. \end{array}\right.$$

Remplaçant successivement i par x, y, z, et substituant dans la valeur précédente de p_{ns}, elle devient

$$(31)\quad \left\{\begin{array}{l} p_{\mathrm{ns}} = (\mathrm{a}_x\mathrm{c}_{\mathrm{n}x} + \mathrm{a}_y\mathrm{c}_{\mathrm{n}y} + \mathrm{a}_z\mathrm{c}_{\mathrm{n}z})(\mathrm{a}_x\mathrm{c}_{\mathrm{s}x} + \mathrm{a}_y\mathrm{c}_{\mathrm{s}y} + \mathrm{a}_z\mathrm{c}_{\mathrm{s}z}) \times \\ \quad \times [(\mathrm{a}_x\mathrm{c}_{xx'} + \mathrm{a}_y\mathrm{c}_{yx'} + \mathrm{a}_z\mathrm{c}_{zx'})\varepsilon_{x'} + (\mathrm{a}_x\mathrm{c}_{xy'} + \mathrm{a}_y\mathrm{c}_{yy'} + \mathrm{a}_z\mathrm{c}_{zy'})\varepsilon_{y'} \\ \qquad + (\mathrm{a}_x\mathrm{c}_{xz'} + \mathrm{a}_y\mathrm{c}_{yz'} + \mathrm{a}_z\mathrm{c}_{zz'})\varepsilon_{z'}]^2. \end{array}\right.$$

Mais l'expression (24) de p_{ns} en $\partial_{x'}, \ldots, \mathrm{g}_{x'y'}$ peut s'écrire

$$(32)\qquad p_{\mathrm{ns}} = \mathrm{a}_{\mathrm{n}}\mathrm{a}_{\mathrm{s}}(\mathrm{a}_{x'}\varepsilon_{x'} + \mathrm{a}_{y'}\varepsilon_{y'} + \mathrm{a}_{z'}\varepsilon_{z'})^2.$$

Comparant ces deux expressions et examinant les termes qui seraient affectés, après qu'on les aurait développées, des mêmes puissances et produits des ε, c'est-à-dire des mêmes dilatations ou glissement $\partial_{x'}, \ldots, g_{x'y'}$, on reconnaît, sans effectuer le développement, qu'il en résulte des expressions des coefficients a nouveaux, toutes renfermées dans la formule symbolique suivante

(33)

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{a}_{\mathrm{ns\,x'y'}} = \mathrm{a_n a_s}\,.\,\mathrm{a_{x'} a_{y'}} \\ \quad\text{si} \\ \mathrm{a}_i = \mathrm{a}_x \cos(i,\ x) + \mathrm{a}_y \cos(i,\ y) + \mathrm{a}_z \cos(i,\ z), \end{array}\right.$$

$\mathrm{x'}$ et $\mathrm{y'}$ étant des directions prises parmi celles des coordonnées rectangles nouvelles x', y', z',

n et s étant, ou des directions prises aussi parmi celles de x', y', z', ou deux autres directions absolument arbitraires,

i désignant l'une quelconque de ces quatre directions.

Non-seulement cette formule fournit l'un quelconque des vingt et un coefficients $\mathrm{a}_{x'x'x'x'}, \mathrm{a}_{x'x'y'y'}, \ldots, \mathrm{a}_{y'z'y'z'}, \ldots, \mathrm{a}_{x'x'x'y'}, \ldots$, entrant soit dans les expressions de six composantes $p_{x'x'}, \ldots, p_{y'z'}, \ldots$, soit dans celle du potentiel Φ (numéro suivant) en fonction des *déformations élémentaires* $\partial_{x'}, \ldots, g_{y'z'}, \ldots$, soit dans les équations d'équilibre (19) $-\rho X' = \mathrm{a}_{x'x'x'x'} \dfrac{d^2 u'}{dx'^2} + \ldots$, où ils affectent les dérivées successives de u', v', w'; mais *elle donne encore directement l'un de ceux, au nombre de trente-six, qui entreraient dans l'expression*, en fonction des mêmes $\partial_{x'}, \ldots, g_{y'z'}, \ldots$, *de la composante* p_{ns}, *suivant une direction arbitraire* s, *de la pression sur l'unité superficielle d'une petite face absolument quelconque,* ayant son centre en (x', y', z') et dont n représente en direction la normale arbitraire.

Le produit $\mathrm{a_n a_s}\,.\,\mathrm{a_{x'} a_{y'}}$ des quatre trinômes symboliques de la forme $\mathrm{a}_x \mathrm{c}_{ix} + \mathrm{a}_y \mathrm{c}_{iy} + \mathrm{a}_z \mathrm{c}_{iz}$ doit être effectué dans l'ordre indiqué sans pouvoir faire d'autre interversion que celle des deux premiers facteurs entre eux et des deux derniers entre eux, si les directions n et s ne sont pas prises comme $\mathrm{x'}$ et $\mathrm{y'}$ parmi celles des trois axes rectangulaires x', y', z'.

Mais l'interversion des *deux premiers à la fois* avec les *deux derniers à la fois* est possible si n et s sont prises parmi celles-ci.

Et alors, l'interversion d'un des deux premiers facteurs avec un des deux derniers, et par conséquent de tous entre eux, sera permise si l'on admet le principe des actions moléculaires conduisant aux six égalités complémentaires (8), en réduisant les vingt et un coefficients a_{xxxx}, etc., à quinze (n° **2**).

7. *Autres manières d'arriver à la formule générale* (33). — On peut la déduire plus simplement de l'expression (6) du potentiel Φ', qui peut être écrite

$$\Phi' = \frac{1}{2}\left[(a_x \varepsilon_x + a_y \varepsilon_y + a_z \varepsilon_z)^2\right]^2, \tag{34}$$

et que nous n'écrivons pas $\frac{1}{2}(a_x \varepsilon_x + \ldots)^4$, parce que le trinôme $a_x \varepsilon_x + \ldots$, entre parenthèses, doit être élevé au carré, puis le sextinôme résultant élevé au carré pour éviter, entre les sous-lettres des a, des interversions qui ne sont permises que lorsqu'on reconnaît avec nous le principe des six égalités (8).

En remplaçant ε_x, ε_y, ε_z par leurs valeurs, comprises dans l'expression (30) $\varepsilon_i = \varepsilon_{x'} c_{ix'} + \varepsilon_{y'} c_{iy'} + \varepsilon_{z'} c_{iz'}$, on a

$$\Phi' = \frac{1}{2}\Big\{\big[(a_x c_{xx'} + a_y c_{yx'} + a_z c_{zx'})\,\varepsilon_{x'} + (a_x c_{xy'} + a_y c_{yy'} + a_z c_{zy'})\,\varepsilon_{y'} + (a_x c_{xz'} + a_y c_{yz'} + a_z c_{zz'})\,\varepsilon_{z'}\big]^2\Big\}^2,$$

qui, comparée à une expression semblable à la précédente (34) mais composée pour les axes coordonnés nouveaux, savoir

$$\Phi = \frac{1}{2}\left[(a_{x'} \varepsilon_{x'} + a_{y'} \varepsilon_{y'} + a_{z'} \varepsilon_{z'})^2\right]^2,$$

et qui représente toujours (sauf les p^0 abstraits) le potentiel dont la valeur invariable ne dépend point de la direction des coordonnées (ou de la manière dont a été taillé l'élément de volume considéré au n° **2**), montre bien qu'on a la formule symbolique (33), au moins lorsque les directions n, s sont, comme celles x', y', prises au nombre des directions x', y', z' des nouveaux axes rectangulaires.

On peut encore y arriver, en n'employant que les symboles a_x, a_y, a_z, a_{xx}, etc., sans les symboles p_x, p_y, p_z, ε_x, ε_y, ε_z.

En effet, l'expression (25) $p_{ns} = p_{xx} c_{nx} c_{sx} + \ldots$, si l'on substitue aux p_{xx}, p_{yy}, etc., leurs valeurs (1) revenant à

$$(a_{xx} \text{ ou } a_{yy} \text{ ou etc.})(a_{xx}\partial_x + \ldots + a_{yz}g_{yz} + \ldots)$$

devient

$$(35)\quad \left\{ \begin{aligned} p_{ns} = {} & (a_x c_{nx} + a_y c_{ny} + a_z c_{nz})(a_x c_{sx} + a_y c_{sy} + a_z c_{sz}) \times \\ & \times (a_{xx}\partial_x + a_{yy}\partial_y + a_{zz}\partial_z + a_{yz}g_{yz} + a_{zx}g_{zx} + a_{xy}g_{xy}). \end{aligned} \right.$$

Remplaçant $\partial_x, \partial_y \ldots g_{xy}$ par leurs expressions non symboliques (26) et ordonnant, dans la troisième parenthèse, par rapport à $\partial_{x'}, \partial_{y'}, \ldots g_{x'y'}$, il est facile de voir que $\partial_{x'}$ y est affecté d'un sextinôme revenant à

$$(a_x c_{x'x} + a_y c_{x'y} + a_z c_{x'z})^2,$$

et $g_{y'z'}$ d'un polynôme revenant à

$$(a_x c_{y'x} + a_y c_{y'y} + a_z c_{y'z})(a_x c_{z'x} + a_y c_{z'y} + a_z c_{z'z}).$$

Comparant, sans même développer (35), avec l'expression (24)

$$p_{ns} = a_{nsx'x'}\partial_{x'} + \ldots + a_{nsy'z'}g_{y'z'} + \ldots,$$

on reconnaît que chaque sous-lettre i des coefficients a de celle-ci répond à un trinôme

$$a_x c_{ix} + a_y c_{iy} + a_z c_{iz},$$

ce qui prouve bien la formule (33) du numéro précédent.

8. *Formules et équations de l'élasticité écrites symboliquement.* — En complétant les formules (28) des pressions et (34) du potentiel par l'addition des parties affectées des p^0, l'on a, au moyen de nos notations symboliques (27),

$$(36)\quad \left\{ \begin{aligned} p_{xx \text{ ou } yz \text{ ou } \ldots} = {} & p^0_{xx \text{ ou } yz \text{ ou } \ldots}\left(1 - \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy} - \frac{dw}{dz}\right) + \\ & + \left(p^0_x \frac{d}{dx} + p^0_y \frac{d}{dy} + p^0_z \frac{d}{dz}\right)(2p^0_x u \text{ ou } p^0_y w + p^0_z v \text{ ou } \ldots) - \\ & + a_{xx \text{ ou } yz}(a_x\varepsilon_x + a_y\varepsilon_y + a_z\varepsilon_z)^2, \end{aligned} \right.$$

$$(37)\qquad \Phi = (p_x^0\,\varepsilon_x + p_y^0\,\varepsilon_y + p_z^0\,\varepsilon_z)^2 + \frac{1}{2}[(\mathrm{a}_x\varepsilon_x + \mathrm{a}_y\varepsilon_y + \mathrm{a}_z\varepsilon_z)^2]^2.$$

Et les trois équations d'équilibre indéfinies (19) peuvent s'écrire

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned} &-\rho\,(\mathrm{X} \text{ ou } \mathrm{Y} \text{ ou } \mathrm{Z}) = \left(p_x^0\frac{d}{dx} + p_y^0\frac{d}{dy} + p_z^0\frac{d}{dz}\right)^2 (u \text{ ou } v \text{ ou } w) + \\ &\quad + \mathrm{a}_{x \text{ ou } y \text{ ou } z}\left(\mathrm{a}_x\frac{d}{dx} + \mathrm{a}_y\frac{d}{dy} + \mathrm{a}_z\frac{d}{dz}\right)\times \\ &\quad \times\left(\mathrm{a}_x\frac{d}{dx} + \mathrm{a}_y\frac{d}{dy} + \mathrm{a}_z\frac{d}{dz}\right)(\mathrm{a}_x u + \mathrm{a}_y v + \mathrm{a}_z w). \end{aligned}\right.$$

Nous ferons usage aux paragraphes suivants de ces formules abrégées.