JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

LEJEUNE-DIRICHLET

Démonstration d'un théorème d'Abel

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 7 (1862), p. 253-255.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1862_2_7__253_0>

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME D'ABEL;

Note de M. LEJEUNE-DIRICHLET,

COMMUNIQUÉE PAR M. LIOUVILLE.

Il s'agit de prouver que si la série

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

est convergente et a pour somme A, la somme de la série

$$a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \ldots + a_n\rho^n + \ldots,$$

qui sera convergente à fortiori en prenant la variable ρ positive et < 1, tendra vers la limite A lorsque l'on fera tendre indéfiniment ρ vers l'unité. Causant un jour avec mon excellent et si regrettable ami Lejeune-Dirichlet, je lui disais que je trouvais assez difficile à exposer (et même à comprendre) la démonstration qu'Abel a donnée de ce théorème important. Dirichlet se mit sur-le-champ à écrire sous mes yeux, dans le seul but de me venir en aide, la Note ci-après, qui m'a été d'un grand secours et qu'on me saura gré de livrer au public. Le mode de démonstration qu'on y trouve comporte de nombreuses applications et m'a été souvent utile dans mes leçons au Collége de France.

Je transcris textuellement la Note de Dirichlet sans y rien ajouter, et bien entendu sans y rien changer.

« Il résulte de la convergence supposée de la série

$$A = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \text{ etc}.$$

» que la somme

$$s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$$

» reste toujours numériquement inférieure à une certaine constante k
» et converge vers la limite A, lorsque n croît indéfiniment. Considé-
» rons maintenant la série

$$S = a_0 + a_1 \rho + a_2 \rho^2 + \ldots + a_n \rho^n + \text{etc.},$$

» la quantité ρ étant supposée positive et inférieure à l'unité; en y
» remplaçant a_0, a_1, a_2, etc., par $s_0, s_1 - s_0, s_2 - s_1$, etc., elle prendra
» la forme

$$S = s_0 + (s_1 - s_0)\rho + (s_2 - s_1)\rho^2 + \ldots + (s_n - s_{n-1})\rho^n + \text{etc.},$$

» et ensuite celle-ci, en ordonnant autrement,

$$S = (1 - \rho)(s_0 + s_1 \rho + s_2 \rho^2 + \ldots + s_n \rho^n + \ldots),$$

» transposition qui ne souffre aucune difficulté, puisqu'elle se réduit à
» ajouter à la somme des $n + 1$ premiers termes le terme $-s_n \rho^{n+1}$
» qui s'évanouit pour $n = \infty$.

» Voyons maintenant vers quelle limite converge S lorsque la va-
» riable positive $\varepsilon = 1 - \rho$ devient infiniment petite. Décomposons pour
» cela S en deux parties, comprenant l'une les n premiers termes et
» l'autre tous les termes suivants, et faisons croître n à mesure que ε
» décroît, mais assez lentement pour que la limite de $n\varepsilon$ soit zéro. La
» première partie

$$(1 - \rho)(s_0 + s_1 \rho + \ldots + s_{n-1} \rho^{n-1}),$$

» étant numériquement moindre que $n\varepsilon k$, converge vers zéro. Quant à
» la seconde

$$(1 - \rho)(s_n \rho^n + s_{n+1} \rho^{n+1} + \ldots),$$

» on pourra lui donner la forme

$$P(1 - \rho)(\rho^n + \rho^{n+1} + \ldots) = P\rho^n = P(1 - \varepsilon)^n,$$

» P désignant une valeur comprise entre la plus grande et la plus pe-

» tite des quantités $s_n, s_{n+1},\ldots$. Or ces dernières convergeant toutes vers
» la limite A, il en sera de même pour P, et comme d'un autre côté le
» facteur $(1-\varepsilon)^n$, en vertu de l'hypothèse faite plus haut, converge
» évidemment vers l'unité, il est prouvé que la limite de S, lorsque la
» variable positive $\rho < 1$ s'approche indéfiniment de l'unité, est la
» somme même A de la série considérée en premier lieu. »

Je ne pense pas que personne puisse songer désormais à demander de nouveaux éclaircissements.