JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

MAXIMILIEN MARIE

Nouvelle théorie des fonctions de variables imaginaires; troisième partie. De la marche des valeurs d'une fonction implicite définie par une équation algébrique

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 6 (1861), p. 153-184.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1861_2_6__153_0>

NOUVELLE THÉORIE

DES

FONCTIONS DE VARIABLES IMAGINAIRES;

PAR M. MAXIMILIEN MARIE,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

TROISIÈME PARTIE.

DE LA MARCHE DES VALEURS D'UNE FONCTION IMPLICITE DÉFINIE PAR UNE ÉQUATION ALGÉBRIQUE.

(Suite.)

CHAPITRE VIII.

De la marche des valeurs d'une fonction de plusieurs variables et de la convergence du développement de cette fonction suivant la formule de Taylor.

118. La question que nous avons traitée dans le chapitre VI a été posée par M. Cauchy pour servir d'introduction à des recherches ultérieures sur les périodes des intégrales.

Après avoir résolu les questions qui se rapportent aux périodes des intégrales simples, M. Cauchy a tenté d'appliquer ses méthodes à l'étude des intégrales d'ordres supérieurs.

Peut-être l'illustre maître n'a-t-il consacré que trop peu d'efforts à ces nouvelles recherches; peut-être a-t-il pensé que la manière dont il figurait la marche de la variable indépendante, en géométrie plane, ne conviendrait plus au cas où la fonction dépendrait de deux ou d'un plus grand nombre de variables.

Quoi qu'il en soit, on n'avait jusqu'ici rien proposé relativement aux périodes des intégrales d'ordres supérieurs, et il ne paraît même pas que la question de la marche d'une fonction implicite de plusieurs variables, question qui, conformément au programme de M. Cauchy, eût dû précéder, ait reçu un commencement de solution.

Cette question cependant ne présentera aucune difficulté nouvelle, la méthode que nous avons développée dans le chapitre VI s'y appliquera, sans presque subir de modifications, et le passage même sera assez facile.

La question, restreinte au cas des fonctions de deux variables indépendantes, peut être posée de trois manières différentes : nous commencerons par les distinguer.

Soit

$$f(x, y, z) = 0$$

l'équation qui définit z implicitement. On pourra d'abord supposer que x et y partant des valeurs initiales x_0, y_0, z parte en même temps d'une de ses valeurs correspondantes, z_0, et demander ce que deviendra z, assujetti à la loi de continuité, lorsque x et y passeront d'une manière continue, de leurs valeurs initiales x_0, y_0, à des valeurs quelconques x_1, y_1, en suivant un chemin défini par *trois* équations entre leurs parties réelles et imaginaires.

Le second cas dont aurons à nous occuper sera celui où l'on ne donnerait plus que *deux* équations entre les quatre parties qui composent x et y.

Dans le cas précédent, lorsqu'on se serait donné l'une des variables indépendantes, toutes les autres eussent été, par là même, déterminées, tandis que, dans le cas actuel, si l'on attribue une valeur arbitraire à l'une des variables indépendantes, ou, plus généralement, si l'on introduit entre les six variables une relation complémentaire arbitrairement choisie, l'ensemble des solutions communes aux équations formulées représentera une ligne.

Or cette ligne devant être en général composée de plusieurs branches, on pourra se proposer, connaissant les deux formes initiale et finale de la relation complémentaire et la loi suivant laquelle elle a passé de l'une à l'autre, de déterminer, sur le lieu final, la branche qui serait provenue d'une branche désignée du lieu initial, cette branche n'ayant pu se déplacer et se déformer que d'une manière continue.

Enfin nous supposerons que les parties réelles et imaginaires de x et de y ne soient plus liées entre elles que par une seule équation permanente : si alors on introduit entre les six variables une relation complémentaire arbitraire et variable de forme, les solutions communes aux équations considérées représenteront une surface, composée en général de plusieurs nappes, et l'on pourra se proposer de déterminer, dans le lieu défini par l'équation complémentaire, arrivée à sa forme finale, la nappe qui serait provenue d'une nappe définie du lieu initial, par déplacement et déformation continus.

La question se décompose donc en trois autres bien distinctes.

Dans la première, le cas pratique sera celui où des trois relations qu'on doit fournir entre les parties réelles et imaginaires de x et de y deux seraient données par une équation entre x et y, la troisième $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ définissant le chemin que devra suivre x.

Dans la seconde, pour s'écarter le moins possible de la réalité, il faudra de même donner par une équation entre x et y les deux conditions que devront remplir les parties réelles et imaginaires de ces deux variables.

Enfin dans la troisième, pour les mêmes motifs, nous examinerons principalement le cas où la relation qu'on devrait donner serait définie par une équation entre x et y, mais contenant une constante arbitraire réelle.

On eût pu chercher à ramener les trois questions à la dernière, qui comprend en effet les deux autres par sa plus grande généralité ; mais ce seront au contraire les deux dernières que nous ramènerons à la première, parce qu'en effet, pour que la nappe considérée du lieu initial soit venue se confondre avec une nappe désignée du lieu final, dans la dernière question, il faudra que la branche, contenue sur la nappe initiale, d'un lieu curviligne défini par l'introduction d'une nouvelle équation, soit venue se superposer à la branche, contenue sur la nappe finale, du même lieu curviligne mobile ; de même que la première branche ne sera venue se placer sur la seconde, qu'autant que les points de l'une seront venus occuper la place des points de l'autre.

En sorte qu'en général les deux dernières questions pourront être considérées comme résolues lorsque la première le sera ; avec cette restriction toutefois que, comme la nappe considérée du lieu initial, dans le dernier cas, ou la branche considérée, dans le second, pourraient se scinder à un certain moment et fournir dans le lieu final des nappes ou branches séparées, ou qu'il convint de distinguer, il ne suffira pas, en général, d'avoir étudié le mouvement d'un seul point $[x, y, z]$ du lieu mobile, pour pouvoir conclure d'une manière certaine à l'égard des deux dernières questions.

119. *De la marche des valeurs d'une fonction de deux variables imaginaires assujetties à trois conditions.* — La question qui va nous occuper n'est pas seulement de l'ordre de celles que nous avons traitées dans le chapitre VI; car si deux des trois équations qui doivent régler la marche des variables indépendantes x et y, dont dépend la fonction z, étaient renfermées dans une équation entre x et y, l'autre ne contenant d'ailleurs que les parties réelle et imaginaire de x, par exemple, l'élimination préalable de y ferait même disparaître toute espèce de différence.

Cette élimination sera toujours permise et devra même être pratiquée dans tous les cas où elle sera possible ; mais nous n'y recourrons pas dans nos explications générales.

120. Si la fonction z n'entrait qu'au second degré dans l'équation

$$f(x, y, z) = 0,$$

qui la définit, elle s'exprimerait par

$$z = P \pm \sqrt{Q},$$

P et Q étant deux fonctions rationnelles de x et de y : l'évaluation de P ne pouvant donner lieu à aucune ambiguïté, ce serait, en conséquence, sur $z - P$ que devrait porter la discussion.

Or les parties réelle et imaginaire de $z - P$ ne pouvant changer de signe qu'en passant par zéro, ou par l'infini (on pourrait toujours, par une transformation de variables, écarter à l'avance, si on le voulait, le cas où z aurait à passer par des valeurs infinies), la valeur qu'aura dû prendre la fonction $z - P$, assujettie à la loi de continuité, lorsque x et y auront passé d'une manière continue, par le chemin convenu, de leur état initial à leur état final, cette valeur sera toujours facile à assigner, lorsqu'on aura suivi les variations de signe d'une des parties de la fonction.

Si le chemin parcouru par le système des variables x et y est fermé, les deux valeurs de z s'échangeront entre elles, lorsque la partie qu'on aura étudiée de $z - P$ aura changé de signe un nombre impair de fois, tandis que, dans le cas contraire, chacune des fonctions reprendra sa valeur initiale.

121. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de la fonction z définie par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

qui donne

$$\frac{z}{c} = \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}:$$

nous poserons comme toujours

$$x = \alpha + \beta \sqrt{-1},$$

$$y = \alpha' + \beta' \sqrt{-1},$$

$$z = \alpha'' + \beta'' \sqrt{-1},$$

la condition de réalité de z étant

$$\frac{\alpha\beta}{a^2} + \frac{\alpha'\beta'}{b^2} = 0 \quad \text{avec} \quad 1 - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{a^2} - \frac{\alpha'^2 - \beta'^2}{b^2} > 0,$$

et celle qui en ferait disparaître la partie réelle étant

$$\frac{\alpha\beta}{a^2} + \frac{\alpha'\beta'}{b^2} = 0 \quad \text{avec} \quad 1 - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{a^2} - \frac{\alpha'^2 - \beta'^2}{b^2} < 0,$$

les points importants de la discussion porteront sur les passages de

α, β, α', β' par des valeurs dont le système satisfît à la condition

$$\frac{\alpha\beta}{a^2}+\frac{\alpha'\beta'}{b^2}=0.$$

Or celle des parties de z qui s'annulera en même temps que

$$\frac{\alpha\beta}{a^2}+\frac{\alpha'\beta'}{b^2}$$

changera de signe avec cette quantité; en sorte que tout se réduira, à chaque passage, à savoir si

$$\frac{\alpha\beta}{a^2}+\frac{\alpha'\beta'}{b^2}$$

aura ou non changé de signe en passant par zéro, ce qui sera toujours aisé puisque ayant entre α, β, α' et β' trois relations connues, qui pourront fournir $\frac{d\beta}{d\alpha}$, $\frac{d\alpha'}{d\alpha}$ et $\frac{d\beta'}{d\alpha}$ en fonction de α, β, α', β', on pourra connaître le sens dans lequel aura varié

$$\frac{\alpha\beta}{a^2}+\frac{\alpha'\beta'}{b^2}.$$

122. La question analytique étant ainsi traitée, il nous reste à étudier le caractère concret de la condition

$$\frac{\alpha\beta}{a^2}+\frac{\alpha'\beta'}{b^2}=0:$$

elle exprime que le point $[x, y, z]$ passe sur une conjuguée dont les z sont réels, ou imaginaires sans parties réelles; mais ce point demande quelques éclaircissements.

Concevons par l'axe des z un plan mobile

$$y=mx,$$

ayant pour coefficient angulaire le rapport variable $\frac{\beta}{\beta'}$, prenons à chaque instant sa trace pour axe des x et, pour axe des y, le diamètre conjugué

$$y = -\frac{b^2}{a^2 m} x$$

de la section horizontale.

z, dans cette transformation, ne changera pas; pour ne pas multiplier inutilement les notations, continuons de représenter par x et y les coordonnées horizontales de la surface : y sera maintenant constamment réel et x restera représenté par $\alpha + \beta\sqrt{-1}$; x, y, z seront d'ailleurs liés entre eux par une nouvelle équation

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

dans laquelle a' et b' dépendront de m.

La condition de réalité de z sera maintenant

$$\alpha\beta = 0 \quad \text{avec} \quad 1 - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} > 0,$$

et la condition pour que z manque de partie réelle

$$\alpha\beta = 0 \quad \text{avec} \quad 1 - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} < 0,$$

ou, en décomposant : les conditions de réalité de z seront

$$\alpha = 0 \quad \text{avec} \quad 1 + \frac{\beta^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} > 0,$$

ou

$$\beta = 0 \quad \text{avec} \quad 1 - \frac{\alpha^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} > 0;$$

et les conditions pour que z manque de partie réelle,

$$\alpha = 0 \quad \text{avec} \quad 1 + \frac{\beta^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} < 0,$$

ou

$$\beta = 0 \quad \text{avec} \quad 1 - \frac{\alpha^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} < 0.$$

Cela posé, le plan parallèle aux xz, mené à la distance y, coupera la surface suivant une ellipse réelle et toutes ses conjuguées hyperboliques, si y^2 est moindre que b'^2, et, dans le cas contraire, suivant des hyperboles ayant pour enveloppe une ellipse imaginaire.

Or si d'abord nous supposons y^2 moindre que b'^2, quand α passera par zéro,

$$1 + \frac{\beta^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2}$$

sera nécessairement positif et le point $[x, z]$ se trouvera, dans le plan que nous supposons, sur l'hyperbole imaginaire dont les z sont réels, dont l'axe transverse, par conséquent, est parallèle aux z:

Et quand β passera par zéro, le point $[x, z]$ sera sur l'ellipse réelle, si

$$1 - \frac{\alpha^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2}$$

est positif, ou, dans le cas contraire, sur la conjuguée dont l'axe transverse est parallèle aux x.

En second lieu si nous supposons y^2 plus grand que b'^2, quand α passera par zéro, le point $[x, z]$ se trouvera sur la conjuguée dont l'axe transverse est parallèle aux z, si

$$1 + \frac{\beta^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2}$$

est positif, et sur l'enveloppe imaginaire dans le cas contraire :

Et quand β passera par zéro,

$$1 - \frac{\alpha^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2}$$

étant nécessairement négatif, le point $[x, z]$ se trouvera sur la conjuguée dont l'axe transverse est parallèle aux x.

Cela posé, nous pouvons répéter ici les mêmes observations que nous avons présentées, dans le cas analogue, en géométrie plane.

Supposons que x et y reviennent à leur état primitif. Si α a passé par zéro, il aura dû changer de signe un nombre pair de fois; à chaque fois la partie réelle aura changé de signe, par conséquent il n'y aura pas d'effet produit dans la valeur de z; mais si β a passé par zéro et changé de signe deux fois, l'une avec la circonstance

$$1 - \frac{\alpha^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} > 0,$$

et l'autre avec la circonstance contraire, les parties imaginaire et réelle de z auront successivement changé de signe et les deux valeurs de z se seront permutées.

123. Si l'équation proposée contenait la fonction z à un degré supérieur au second, le calcul pourrait présenter des difficultés plus considérables ; mais la méthode serait encore pareille à celle que nous avons appliquée, en géométrie plane, au cas analogue.

On classerait toujours les conjuguées de la surface proposée en deux catégories, suivant que ces conjuguées toucheraient ou non la surface réelle.

Les conjuguées tangentes à la surface réelle se diviseraient en plusieurs classes, selon qu'elles toucheraient cette surface sur telle ou telle nappe.

Chaque conjuguée tangente à la surface réelle serait divisée en parties distinctes par la courbe de contact.

Or le point $[x, y]$ ne pourrait passer d'une catégorie de conjuguées à l'autre, sans prendre son passage sur une conjuguée limite commune des deux catégories; ces passages devraient être relevés avec soin.

Il ne pourrait non plus passer d'une classe de conjuguées d'une même catégorie à une autre classe, sans prendre passage sur une conjuguée limite commune des deux classes.

Enfin il ne pourrait passer d'une partie à une autre d'une conjuguée, sans passer sur la surface réelle.

Quant aux conjuguées non tangentes à la surface réelle, elles donneraient lieu à une discussion plus compliquée; mais on pourra appliquer au cas où le point $[x, y, z]$ aurait passé sur ces conjuguées, une autre méthode d'ailleurs générale.

124. On pourra, si on le veut, comme nous l'avons fait pour étudier l'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

faire suivre au plan des xz le mouvement du plan

$$y=\frac{\beta}{\beta'}x,$$

ce qui rendra y perpétuellement réel, et étudier la marche du point $[x, z]$ dans le plan mené parallèlement à celui des xz à une distance égale au nouvel y.

La question alors sera ramenée à une question de géométrie plane qui ne différerait de celle que nous avons traitée dans le chapitre VI qu'en ce que les équations données entre z et x contiendraient des variables intermédiaires et seraient, par suite, en plus grand nombre.

125. *De la marche des valeurs d'une fonction de deux variables imaginaires assujetties à deux conditions.* — Les solutions communes à l'équation caractéristique

$$f(x, y, z)=0$$

et à deux autres équations permanentes

$$F(\alpha, \beta, \alpha', \beta')=0, \quad F_1(\alpha, \beta, \alpha', \beta')=0,$$

formeraient un système doublement indéterminé, auquel par conséquent correspondrait une surface. Mais si l'on joint à ces équations une condition mouvante

$$\varphi(\alpha, \beta)=0,$$

les solutions communes ne fourniront plus qu'une ligne courbe, pour chaque forme de l'équation φ. On pourra donc chercher à savoir comment une branche désignée de cette courbe se déplacera et se déformera, lorsque la fonction φ se déformera elle-même ; on pourra, en particulier, demander ce qu'une branche désignée de la courbe primitive serait devenue en passant de l'équation

$$\varphi_0(\alpha, \beta) = 0$$

à l'équation

$$\varphi_1(\alpha, \beta) = 0.$$

Telle serait dans toute sa généralité la question que nous aurions à étudier dans ce paragraphe.

Comme nous la ramenons à savoir ce que sont devenus les points de la branche assignée de la courbe définie par les équations

$$f(x, y, z) = 0,$$
$$\mathrm{F}(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = 0, \quad \mathrm{F}_1(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = 0,$$
$$\varphi_0(\alpha, \beta) = 0,$$

il nous suffira de montrer par un exemple comment cette réduction peut s'effectuer.

Soit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

l'équation qui lie la fonction z aux deux variables x et y;

$$\beta' = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad y = \text{réel},$$

l'une des deux conditions que l'on devait fournir entre x et y; enfin supposons que la seconde condition soit donnée par le système

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = r^2, \\ r = \rho + \rho'\sqrt{-1}, \\ \rho^2 + \rho'^2 = ab; \end{array}\right.$$

et faisons passer ρ' et ρ par toutes les valeurs que prendraient successivement les coordonnées d'un mobile assujetti à décrire de droite à gauche la circonférence du cercle

$$y^2 + x^2 = ab,$$

et qui, partant du point situé sur la partie positive de l'axe des x, y reviendrait après un tour complet.

A chaque valeur de ρ', il correspondra une valeur de ρ, par suite une valeur de r; les solutions communes aux deux équations

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$

$$x^2+y^2=r^2$$

fourniraient une surface, mais la condition $y=$ réel réduira ce lieu à une ligne.

A l'origine du mouvement, c'est-à-dire lorsque ρ' était nul et ρ égal à $+\sqrt{ab}$, la ligne mobile sera composée d'une courbe d'entrée et d'une courbe de sortie; à la fin du mouvement, la ligne mobile sera revenue occuper sa position initiale : la question serait donc de savoir quelles permutations auront pu se produire entre les branches de cette courbe, du commencement à la fin du mouvement.

Pour traiter cette question conformément au plan tracé dans les applications qui précèdent, il nous suffira, puisque y doit rester constamment réel, d'étudier le mouvement du point de rencontre de la ligne mobile avec un plan réel parallèle aux xz,

$$y=h,$$

car en faisant varier h, nous pourrons ensuite assigner la position finale d'un point quelconque de la ligne mobile.

L'équation

$$y^2+x^2=(\rho+\rho'\sqrt{-1})^2$$

représente les cylindres parallèles aux z qui auraient pour traces sur le plan des xy les conjuguées du lieu

$$y^2+x^2=(\rho+\rho'\sqrt{-1})^2.$$

Ces conjuguées sont toutes égales entre elles; elles ont pour enveloppe imaginaire la circonférence du cercle

$$y^2+x^2=(\rho+\rho')^2,$$

mais celle dont les ordonnées sont réelles nous occupera seule.

Cette conjuguée touche l'enveloppe imaginaire aux extrémités du diamètre dirigé suivant l'axe des x et a pour asymptotes les bissectrices des angles des axes; elle se réduit soit à l'hyperbole équilatère, qui a pour axe transverse l'axe des x, lorsque ρ s'annule, soit au cercle et à l'hyperbole équilatère, qui a pour axe transverse l'axe des y, lorsque c'est au contraire ρ' qui passe par zéro.

Le plan

$$y = h$$

coupe le cylindre

$$y^2 + x^2 = (\rho + \rho'\sqrt{-1})^2$$

suivant les génératrices partant des points d'intersection de la droite $y = h$ avec la conjuguée dont il vient d'être question.

Lorsque h est moindre que b, le plan

$$y = h$$

coupe l'ellipsoïde suivant une ellipse réelle dont la projection, en vraie grandeur, sur le plan des xz a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2},$$

et toutes ses conjuguées.

Tandis que lorsque h est plus grand que b, l'intersection se compose des conjuguées de l'enveloppe imaginaire elliptique

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = -\left(\frac{h^2}{b^2} - 1\right).$$

Cela posé, déterminons d'abord la courbe fournie par le système des équations

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \\ x^2 + y^2 = ab, \\ y = h, \end{array}\right.$$

dans lequel on ferait passer h par toutes les valeurs réelles de $-\infty$ à $+\infty$.

Lorsque h varie entre $-\sqrt{ab}$ et $+\sqrt{ab}$, x reste réel; quant à z, il prend la valeur déterminée par l'équation

$$\frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{ab - y^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

ou

$$\frac{z^2}{c^2} = (a-b)\frac{ab^2 - (a+b)y^2}{a^2b^2},$$

il est donc réel ou imaginaire, suivant que y^2 est moindre ou plus grand que

$$\frac{ab^2}{a+b},$$

de sorte qu'entre les limites

$$-b\sqrt{\frac{a}{a+b}} < y < +b\sqrt{\frac{a}{a+b}},$$

le lieu est réel et appartient par conséquent à l'ellipsoïde.

Tandis qu'entre les limites

$$-b\sqrt{\frac{a}{a+b}} > y > -\sqrt{ab},$$

ou

$$+b\sqrt{\frac{a}{a+b}} < y < +\sqrt{ab},$$

le lieu est imaginaire; mais ses x et y étant réels, il appartient à l'hyperboloïde à une nappe circonscrit à l'ellipsoïde le long de son contour apparent par rapport au plan des xy,

$$\left\{\begin{array}{l} z = 0, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \end{array}\right.$$

Enfin en dehors des limites

$$-\sqrt{ab} \quad \text{et} \quad +\sqrt{ab},$$

les y de la courbe sont réels, ses x sont imaginaires sans parties réelles, et quant à ses z, déterminés par l'équation

$$\frac{z^2}{c^2} = (a-b)\frac{ab^2-(a+b)y^2}{a^2b^2},$$

ils sont aussi imaginaires, sans parties réelles, puisque y^2 surpassant ab, à plus forte raison

$$ab^2-(a+b)y^2$$

est négatif; la courbe appartient donc à l'hyperboloïde à deux nappes

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1,$$

qui du reste n'est pas une conjuguée de l'ellipsoïde.

Lorsque

$$y = \pm\sqrt{ab}, \quad x = 0 \quad \text{et} \quad \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{a}{b},$$

le point

$$x = 0, \quad y = \sqrt{ab}, \quad z = c\sqrt{\frac{a}{b}-1}$$

appartient donc à la fois, comme cela devait être, aux deux hyperboloïdes

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

et

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Cela posé, il ne nous reste qu'à donner successivement à h des valeurs comprises entre o et $+b\sqrt{\frac{a}{a+b}}$, entre $+b\sqrt{\frac{a}{a+b}}$ et $+\sqrt{ab}$, enfin entre $+\sqrt{ab}$ et $+\infty$, et à examiner ce qui, dans chaque cas, aura dû se passer lorsque ρ et ρ' seront revenus à leurs valeurs initiales $+\sqrt{ab}$ et o.

Supposons d'abord h compris entre o et $+b\sqrt{\frac{a}{a+b}}$, le point

$[x, z]$ alors se déplacera sur les conjuguées de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{b^2};$$

s'il était d'abord (c'est-à-dire lorsque ρ' était nul et ρ égal à $+\sqrt{ab}$) sur la nappe supérieure de l'ellipsoïde, ρ' devenant positif, l'équation

$$xdx = rdr,$$

où il faudrait faire x réel et positif, r égal à $+\sqrt{ab}$ et dr égal à $d\rho + d\rho'\sqrt{-1}$, $d\rho'$ étant positif, montre que la partie imaginaire de dx sera positive.

D'un autre côté, l'équation

$$\frac{x\,dx}{a^2}+\frac{z\,dz}{c^2}=0,$$

où il faudrait faire z réel et positif, montre à son tour que la partie imaginaire de dz sera négative.

Le point $[x, z]$ se placera donc d'abord sur une branche inférieure de conjuguée de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{b^2}{a^2},$$

il restera d'ailleurs du même côté du point de contact de l'ellipse avec la conjuguée où il pourra se transporter, jusqu'au moment où ρ' repassera par zéro, ρ ayant alors la valeur $-\sqrt{ab}$: car en vertu de l'équation

$$x^2 = (\rho + \rho'\sqrt{-1})^2 - h^2,$$

x ne peut être réel qu'autant que ρ' est nul.

Mais avant que ρ' ne redevînt nul, ρ lui-même aura passé par zéro, et ce passage doit attirer notre attention.

Au moment où ρ sera devenu nul, ρ' aura pris la valeur $+\sqrt{ab}$, x aura l'une de celles que comprend la formule

$$\pm\sqrt{-1}\sqrt{h^2+ab}.$$

Mais comme la partie imaginaire de cette variable avait commencé par être positive et qu'elle n'a pas repassé par zéro, la seule valeur admissible sera

$$x = +\sqrt{-1}\sqrt{h^2+ab}.$$

Quant à z, il aura pris l'une des valeurs

$$\pm c\sqrt{1+\frac{h^2+ab}{a^2}-\frac{h^2}{b^2}},$$

qui sont réelles, car la condition

$$1+\frac{h^2+ab}{a^2} > \frac{h^2}{b^2}$$

revient à

$$ab^2 > h^2(a-b),$$

et h^2 étant moindre que $\frac{ab^2}{a+b}$ est, à plus forte raison, inférieur à $\frac{ab^2}{a-b}$.

D'ailleurs la partie réelle de z étant d'abord positive et n'ayant pas encore passé par zéro, sera restée positive, de sorte que la valeur finale de z sera

$$z = +c\sqrt{1+\frac{h^2+ab}{a^2}-\frac{h^2}{b^2}};$$

le point $[x, z]$ se trouvera donc alors sur la partie de droite de la branche supérieure de la conjuguée $\frac{\beta''}{\beta} = 0$.

La caractéristique changera de signe aussitôt après, car, en vertu de l'équation

$$xdx = rdr$$

où il faudrait faire

$$x = +\sqrt{-1}\sqrt{h^2+ab}, \quad r = +\sqrt{-1}\sqrt{ab},$$

et $d\rho'$ négatif, la partie imaginaire de dx sera négative.

Au moment donc où ρ' sera nul et où ρ prendra la valeur $-\sqrt{ab}$, le point $[x, z]$ devra se trouver sur le second quadrant de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{b^2}.$$

A partir de là il changera de branche sur la conjuguée où il se transportera, car en vertu de l'équation

$$xdx = rdr$$

où x serait réel et négatif, r égal à $-\sqrt{ab}$, et où dr aurait sa partie imaginaire négative, la partie imaginaire de dx redeviendra négative tandis que, par suite, celle de dz deviendra positive, pour que $\frac{\beta''}{\beta}$ reste négatif, comme cela doit être.

Le point $[x, z]$ restera maintenant sur une branche inférieure de la conjuguée tant que ρ' ne repassera pas par zéro.

Il repassera sur la conjuguée $\frac{\beta''}{\beta}=0$ au moment où ρ redeviendra nul et ρ' égal à $-\sqrt{ab}$; mais comme il n'aura pas pu passer sur la conjuguée $\frac{\beta''}{\beta}=\infty$, puisque x n'aura jamais pu prendre de valeurs réelles supérieures à a, les mêmes faits se reproduiront ensuite en sens inverse, de sorte que quand ρ et ρ' auront achevé leur évolution, le point $[x, y]$ reviendra à sa place primitive.

Ainsi, après l'évolution complète, chacune des parties supérieure ou inférieure de la section réelle du cylindre

$$x^2+y^2=r^2$$

et de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

sera revenue occuper sa position primitive.

Faisons maintenant varier h entre $+b\sqrt{\frac{a}{a+b}}$ et $+b$:

$x=\sqrt{r^2-h^2}$ sera encore, comme dans le cas précédent, réel, ou imaginaire sans partie réelle, lorsque ρ' ou ρ passeront par zéro, tandis que, dans tout autre cas, il se composera d'une partie réelle et d'une partie imaginaire.

Au départ, c'est-à-dire lorsque, ρ' étant nul, ρ aura la valeur $+\sqrt{ab}$, x sera réel et par exemple positif, et z imaginaire sans partie réelle. Le point $[x, z]$ se trouvera alors sur la conjuguée $\frac{\beta''}{\beta} = \infty$ de l'ellipse réelle

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2};$$

supposons qu'il appartienne à la branche supérieure de cette conjuguée, ou que le point $[x, y, z]$ appartienne à la nappe supérieure de l'hyperboloïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans la valeur initiale de z étant ainsi positif.

Comme au départ la caractéristique du point $[x, z]$ se trouvait infinie, nous devons, avant tout, nous demander quel signe elle aura pris immédiatement après.

Or l'équation

$$xdx = rdr,$$

dans laquelle il faudrait faire

$$x = +\sqrt{ab - h^2}, \quad r = +\sqrt{ab} \quad \text{et} \quad dr = d\rho + d\rho'\sqrt{-1},$$

donne

$$d\beta\sqrt{ab - h^2} = d\rho'\sqrt{ab},$$

c'est-à-dire que $d\beta$ sera d'abord positif; et comme β'' était déjà positif et avait une valeur finie, la caractéristique du point $[x, z]$ commencera par être positive.

Ainsi le point de contact, avec l'ellipse, de la conjuguée sur laquelle se transportera d'abord le point $[x, z]$, se trouvera dans le quatrième quadrant.

Au reste le point $[x, z]$ ne pourra jamais passer sur l'ellipse réelle

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{b^2},$$

puisque toutes les fois que x reprendra l'une de ses valeurs réelles

$$\pm\sqrt{ab-h^2}$$

correspondantes à $\rho'=0$, z en même temps reprendra l'une de ses valeurs imaginaires sans partie réelle

$$\frac{z}{c}=\pm\sqrt{1-\frac{h^2}{b^2}-\frac{ab-h^2}{a^2}},$$

il restera donc toujours sur la même branche de la conjuguée qui le contiendra, ou plutôt il suivra cette branche de conjuguée dans son évolution autour de l'ellipse.

Il ne s'agit donc que de savoir par quelles valeurs passera la caractéristique de cette conjuguée.

Lorsque ρ' atteindra sa valeur $+\sqrt{ab}$ et que par conséquent ρ se trouvera nul, x aura l'une des valeurs

$$x=\pm\sqrt{h^2+ab}\sqrt{-1};$$

mais comme la partie imaginaire de x a commencé par être positive et qu'elle ne s'est pas encore annulée, elle sera restée positive; de sorte que la seule valeur admissible pour x sera

$$x=+\sqrt{h^2+ab}\sqrt{-1}.$$

Quant à z, il aura l'une des valeurs

$$\frac{z}{c}=\pm\sqrt{1-\frac{h^2}{b^2}+\frac{h^2+ab}{b^2}},$$

qui sont réelles, car la condition

$$1+\frac{h^2+ab}{a^2}>\frac{h^2}{b^2}$$

revient à

$$ab^2 > h^2(a-b)$$

qui est satisfaite dans l'hypothèse où nous raisonnons, puisque h est moindre que b.

Mais la partie réelle de z un peu après le départ était négative, et elle n'est pas encore devenue nulle; elle a donc dû rester négative, par conséquent la valeur de z doit être

$$\frac{z}{c} = -\sqrt{1 - \frac{h^2}{b^2} + \frac{h^2+ab}{a^2}};$$

le point $[x, z]$ se trouve donc alors sur la partie droite de la branche inférieure de la conjuguée $\frac{\beta''}{\beta} = 0$ de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}.$$

Aussitôt après, la caractéristique du point mobile changera de signe; en effet la différentielle de x sera déterminée par l'équation

$$xdx = rdr$$

ou

$$\sqrt{-1}\sqrt{h^2+ab}\,(d\alpha + d\beta\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}\sqrt{ab}\,(d\rho + d\rho'\sqrt{-1}),$$

c'est-à-dire

$$d\alpha\sqrt{h^2+ab} = d\rho\sqrt{ab}$$

et

$$d\beta\sqrt{a^2+ab} = d\rho'\sqrt{ab},$$

tandis que celle de z le sera par l'équation

$$\frac{x\,dx}{a^2} + \frac{z\,dz}{c^2} = 0$$

ou

$$\frac{\sqrt{-1}\sqrt{h^2+ab}\,(d\alpha + d\beta\sqrt{-1})}{a^2} - \frac{\sqrt{1 - \frac{h^2}{b^2} + \frac{h^2+ab}{a^2}}}{c}(d\alpha'' + d\beta''\sqrt{-1}) = 0,$$

c'est-à dire

$$\frac{d\alpha\sqrt{h^2+ab}}{a^2}-\frac{d\beta''\sqrt{1-\frac{h^2}{b^2}+\frac{h^2+ab}{a^2}}}{c}=0$$

et

$$\frac{d\beta\sqrt{a^2+ab}}{a^2}+\frac{d\alpha''\sqrt{1-\frac{h^2}{b^2}+\frac{h^2+ab}{a^2}}}{c}=0.$$

Or $d\rho'$ étant négatif ainsi que $d\rho$, $d\alpha$, $d\beta$ et $d\beta''$ sont aussi négatifs, de sorte que β qui était fini et positif, restant positif, la caractéristique devient négative, c'est-à-dire que le point $[x, z]$ se transporte sur la partie de droite de la branche de conjuguée de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{b^2}$$

qui la touche dans le troisième quadrant.

Il en résulte que lorsque ρ' redeviendra nul, ρ ayant alors la valeur $-\sqrt{ab}$, le point $[x, z]$ viendra se placer sur la partie inférieure de la branche de gauche de la conjuguée $\frac{\beta''}{\beta}=0$ de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{b^2}.$$

Le mouvement se continuera ensuite évidemment dans le même sens; et lorsque ρ et ρ' seront revenus à leurs valeurs initiales, le point $[x, z]$ sera revenu aussi à sa position initiale.

Ainsi les deux portions supérieure et inférieure de la courbe que nous étudions, dans l'intervalle compris entre les plans

$$y=b\sqrt{\frac{a}{a+b}} \quad \text{et} \quad y=b,$$

après l'évolution complète, reprennent aussi leurs positions primitives.

Supposons enfin que h dépasse la limite b. Le point $[x, z]$, alors, se déplacera sur les conjuguées de l'ellipse imaginaire

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = -\left(\frac{h^2}{b^2} - 1\right);$$

$x = \sqrt{r^2 - h^2}$ pourra ou non devenir réel, en même temps que r, selon que h^2 sera moindre que ab, ou plus grand. Selon le cas, le point $[x, z]$ pourra donc ou non passer sur la conjuguée $\frac{\beta''}{\beta} = \infty$ du lieu.

La discussion, au reste, dans chacun des deux cas $h^2 < ab$ et $h^2 > ab$, s'achèverait comme précédemment, et il est inutile que nous insistions davantage.

126. Nous avons, dans ce qui vient d'être dit, supposé toujours que ρ et ρ' achevassent complétement leur évolution, mais la discussion a été dirigée de telle manière, que si l'on voulait s'arrêter à des valeurs correspondantes quelconques de ρ et de ρ', on pût immédiatement assigner la place que serait venue occuper la branche mobile de la courbe considérée.

127. *De la marche des valeurs d'une fonction de deux variables assujetties à une seule condition.* — Il suffirait évidemment de supprimer, dans l'exemple précédent, la condition

$$\beta' = 0,$$

pour en former un qui se rapportât à la question présente.

Les équations

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

$$r = \rho + \rho'\sqrt{-1},$$

$$\rho^2 + \rho'^2 = ab$$

détermineraient une surface variable de forme et de position avec la valeur de ρ; de sorte que la valeur initiale de ρ étant par exemple

$+\sqrt{ab}$, il s'agirait de savoir ce qu'une nappe désignée de cette surface initiale serait devenue lorsque ρ et ρ' auraient achevé leur évolution.

Or la surface mobile contiendra toujours la courbe mobile dont nous avons étudié le mouvement dans le numéro précédent; on peut donc dire que la position finale de la nappe considérée de cette surface sera déterminée par la position finale de la branche correspondante de la courbe mobile.

De la convergence du développement, par la formule de Taylor, d'une fonction de deux variables.

128. x_0 et y_0 désignant les valeurs initiales des deux variables indépendantes x et y, et z_0 celle de la fonction z, cette fonction est représentée jusqu'à un certain point par

$$\begin{aligned} z = z_0 &+ \left(\frac{dz}{dx}\right)_0 \frac{x - x_0}{1} + \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)_0 \frac{(x-x_0)^2}{1.2} + \ldots \\ &+ \left(\frac{dz}{dy}\right)_0 \frac{y-y_0}{1} + 2\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right)_0 \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{1.2} + \ldots \\ &+ \left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right)_0 \frac{(y-y_0)^2}{1.2} + \ldots . \end{aligned}$$

Cette suite, comme étant indéfinie, constitue bien une série, si l'on prend le mot dans son acception la plus large, mais en réalité elle en fournira autant qu'on voudra imaginer de modes d'en grouper les termes : et non-seulement les conditions de convergence de toutes ces séries ne seraient pas identiques, mais même elles ne porteraient pas sur les mêmes groupes de coefficients différentiels.

Ainsi on pourrait regarder le développement comme représentant la somme des valeurs des séries formulées dans les diverses lignes horizontales; on pourrait grouper les termes suivant les lignes diagonales, etc.

Dans chaque cas, la condition de convergence dépendrait du mode de groupement des termes.

Il est donc indispensable de poser avant tout la question qu'on a en vue et de définir la série dont la convergence est mise en question.

Nous nous proposons ici de ramener la question de la convergence du développement d'une fonction de deux variables à celle de la convergence du développement d'une fonction d'une seule variable; le but indiqué désigne alors clairement la série dont il doit être question.

Nous nous occuperons exclusivement de la série formée des sommes de termes homogènes, par rapport à $(x - x_0)$ et à $(y - y_0)$, dans le développement général.

129. x_0 et y_0 étant toujours supposés connus, au lieu de nous donner x et y, c'est-à-dire $(x - x_0)$ et $(y - y_0)$, nous nous donnerons $(x - x_0)$ et $\frac{y - y_0}{x - x_0}$, ce qui reviendra au même.

La fonction z, alors, dépendra de x et du rapport $\frac{y - y_0}{x - x_0}$, que nous désignerons par k, de sorte que si l'équation, qui d'abord définissait z, était

$$f(x, y, z) = 0,$$

la nouvelle sera

$$f[x_0 + x - x_0, y_0 + k(x - x_0), z] = 0,$$

et nous développerons z suivant les puissances croissantes de $(x - x_0)$, par la formule de Maclaurin, comme une fonction d'une seule variable.

Le développement de z contiendra bien toujours deux variables x et k, mais nous nous bornerons, d'abord, à déterminer, pour chaque valeur de k, la limite que ne devrait pas dépasser le module de $(x - x_0)$, pour que la série restât convergente.

En procédant ainsi nous n'aurons pas seulement obtenu les réponses propres à toutes les questions que pourrait comporter l'étude de la série, dans tous les cas où les valeurs finales des deux variables indépendantes seraient données à l'avance : nous aurons encore établi des bases pour résoudre, dans un grand nombre de cas, la question inverse où il s'agirait de déterminer la relation d'inégalité à laquelle devraient satisfaire les modules de $(x - x_0)$ et de $(y - y_0)$ pour que la série restât convergente.

130. Le développement de z, ordonné suivant les puissances croissantes de $(x - x_0)$, est

$$z = z_0 + \left.\begin{matrix} \left(\frac{dz}{dx}\right)_0 \\ + k\left(\frac{dz}{dy}\right)_0 \end{matrix}\right| \frac{x - x_0}{1} + \left.\begin{matrix} \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)_0 \\ + 2k\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right)_0 \\ + k^2\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right)_0 \end{matrix}\right| \frac{(x - x_0)^2}{1.2} + \ldots$$

Or, pour chaque valeur de k, la condition de convergence ne dépendra plus que de la nature du lieu

$$f[x, y_0 + k(x - x_0), z] = 0,$$

et de la place occupée sur ce lieu par le point $[x_0, z_0]$. La question sera donc entièrement identique à celle que nous avons traitée dans le chapitre VII.

131. Les points du lieu

$$f[x, y_0 + k(x - x_0), z] = 0$$

où le développement de z peut être arrêté, sont ceux où les dérivées de z par rapport à x deviennent infinies à partir d'un certain ordre. Mais nous ne pouvons prétendre ici à distinguer tous les cas les uns des autres : nous nous bornerons donc à l'examen de celui où les dérivées d'ordres supérieurs ne sauraient devenir infinies qu'avec et après celle du premier ordre.

La dérivée de z par rapport à x en un point du lieu

$$f[x, y_0 + k(x - x_0), z] = 0$$

est

$$-\frac{\dfrac{df}{dx}+k\dfrac{df}{dy}}{\dfrac{df}{dz}},$$

y désignant la variable $x_0 + k(x - x)$; les points dangereux seront donc fournis par les équations

$$f'_z[x, y_0 + k(x - x_0), z] = 0$$

et

$$f[x, y_0 + k(x - x_0), z] = 0.$$

Ces points appartiennent à la courbe de contact de la surface

$$f(x, y, z) = 0$$

avec le cylindre qui lui serait circonscrit parallèlement aux z, car cette courbe aurait pour équations

$$f'_z(x, y, z) = 0$$

et

$$f(x, y, z) = 0$$

où il suffirait de faire $y = y_0 + k(x - x_0)$ pour retrouver les précédentes.

Ainsi les points dangereux du lieu

$$f[x_0, y_0 + k(x - x_0), z] = 0$$

sont les points d'intersection du plan réel ou imaginaire

$$y = y_0 + k(x - x_0)$$

avec la courbe de contact dont nous parlons.

Si la projection sur le plan des xy de cette courbe est représentée par

$$\varphi(x, y) = 0,$$

les abscisses des points dangereux du lieu

$$f[x, y_0 + k(x - x_0), z] = 0$$

seront donc fournies par les équations

$$\varphi(x, y) = 0,$$
$$y = y_0 + k(x - x_0),$$

c'est-à-dire que les projections de ces points sur le plan des xy seront les intersections du contour apparent

$$\varphi(x, y) = 0$$

et de la droite

$$y = y_0 + k(x - x_0),$$

si, bien entendu, dans cet énoncé, par contour apparent de la surface on entend le contour apparent réel et toutes ses conjuguées.

132. La constante k marque la direction du chemin qui conduirait du point $[x_0, y_0]$ au point $[x, y]$, et il est évident que le module de la différence entre x_0 et l'abscisse du point dangereux où s'arrêtera le développement dépendra essentiellement de k ; ainsi le module maximum de la différence $x - x_0$ et par suite celui de $y - y_0$, seront essentiellement variables et intimement liés à la valeur de k.

Cela est tellement vrai, que la direction k pourrait être telle, que les modules de

$$x_0 - \mathrm{X} \quad \text{et de} \quad y_0 - \mathrm{Y}$$

pussent devenir infinis sans que la série cessât de rester convergente.

Il suffirait en effet pour cela que la droite

$$y = y_0 + k(x - x_0)$$

coïncidât avec une asymptote réelle ou imaginaire du lieu

$$\varphi(x, y) = 0$$

qui ne rencontrât celui-ci nulle part ailleurs qu'à l'infini.

En voici un exemple :

Soit l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

qui donne

$$\frac{z}{c} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}:$$

si

$$\frac{y_0}{x_0} = \frac{b}{a}\sqrt{-1},$$

et que l'on pose d'ailleurs

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{b}{a}\sqrt{-1},$$

le point mobile $[x, y]$ décrira une asymptote du contour apparent

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

de la surface, asymptote qui ne rencontrera ce contour nulle part ailleurs qu'à l'infini, z devra donc alors se développer en série convergente quel que soit le module de $x - x_0$.

Et en effet dans ce cas z ne sera qu'une constante c; toutes les sommes de termes homogènes du développement

$$z_0 + \left(\frac{dz}{dx}\right)_0 (x - x_0) + \ldots$$
$$+ \left(\frac{dz}{dy}\right)_0 (y - y_0) + \ldots$$
$$+ \ldots$$

seront donc nulles d'elles-mêmes; les modules de $(x - x_0)$ et de $(y - y_0)$ pourraient donc être infinis, que la série, définie comme nous l'avons définie, n'en resterait pas moins convergente.

On voit par là combien il était contraire à la réalité des choses, de supposer, comme on l'a fait, avant tout examen, que les modules de $(x - x_0)$ et de $(y - y_0)$ fussent indépendants et eussent des maxima respectifs fixes.

NOTE.

Je n'avais pas connaissance, lorsque j'écrivais le chapitre VII de mon Mémoire, d'une Note fort courte, mais très-importante, que M. Tchebicheff a insérée en 1844 dans le *Journal de Crelle* (t. XXVIII, pages 279 à 283).

Cette *Note sur la convergence de la série de Taylor* contient à certains égards la bonne solution de la question.

Le dernier énoncé, fourni à cette époque par M. Cauchy, de la condition de convergence, était ainsi conçu :

« x désignant une variable réelle ou imaginaire, une fonction réelle ou imaginaire » de x sera développable en série convergente ordonnée suivant les puissances » ascendantes de x, tant que le module de x conservera une valeur inférieure » à la plus petite de celles pour lesquelles la fonction ou sa dérivée cesse d'être finie » et continue. »

M. Tchebicheff propose de dire :

« La série de Taylor

$$f(a) + \frac{z}{1} f'(a) + \frac{z^2}{1.2} f''(a) + \ldots$$

» est divergente ou convergente suivant que le module de z est plus grand ou plus » petit que celui de la valeur imaginaire x qui rendrait infinie ou discontinue une des » fonctions

$$f(a+x),\, f'(a+x),\, f''(a+x) \ldots \text{»}$$

En supprimant de cet énoncé l'assertion que la série deviendrait divergente au delà du premier point dangereux, on trouve la règle que j'ai proposée moi-même et dont je croyais la formule nouvelle.

Les deux énoncés de M. Tchebicheff et de M. Lamarle sont vicieux, il est vrai, sous un rapport, mais tous ceux qu'on a donnés depuis sont entachés du même défaut; au contraire, ce qu'ils contenaient de rigoureusement exact a été compliqué depuis de conditions qui n'ont, ni de près, ni de loin, le moindre rapport à la convergence de la série.

Même on en est venu jusqu'à ne plus caractériser les points, où le développement peut être arrêté, que par la seule qualité commune, qui, justement, n'apporte par elle-même aucun obstacle au développement.

Car s'il faut bien, il est vrai, qu'un point soit multiple pour être dangereux, ce n'est en aucune façon comme point multiple qu'il est dangereux, mais parce que, suivant M. Tchebicheff, les dérivées de la fonction y deviennent infinies, à partir d'un certain ordre, ou, suivant M. Lamarle, parce que les valeurs de la fonction peuvent se permuter autour de ce point.

Pour qu'on ait cru devoir changer les énoncés proposés par M. Tchebicheff et par M. Lamarle, il faut qu'ils n'aient été bien compris ni l'un ni l'autre.

C'est pourquoi je pense qu'il ne sera pas inutile de revenir sur la démonstration de leur entière identité, démonstration que je n'ai qu'indiquée dans le chapitre VII.

Ce qui est en question est de savoir si les valeurs de la fonction y, qui diffèrent infiniment peu de l'ordonnée d'un point multiple du lieu $f(x,y)=0$, peuvent se permuter entre elles, la variable x ne prenant elle-même que des valeurs infiniment voisines de l'abscisse de ce point multiple, sans qu'aucune des dérivées de la fonction, quel qu'en soit d'ailleurs l'ordre, soit infinie en ce point.

Il me semble qu'il suffit pour cela d'observer que pour que deux valeurs de y se permutent, il faut que toutes leurs dérivées se permutent aussi. Cette remarque est bien concluante en effet; car, de même qu'on ne saurait admettre que deux valeurs de y, correspondantes à une même abscisse, mais séparées par un intervalle fini, se permutassent sans que la variable x se fût écartée de sa valeur initiale d'une quantité finie, on n'admettra pas davantage que les dérivées d'ordres supérieurs à celui où a lieu la séparation définitive, se permutent, sans cette condition; or si elles ne peuvent se permuter, les valeurs de la fonction ne se permuteront pas non plus.

On peut pousser plus loin cette analyse :

Si en un point multiple du lieu $f(x,y)=0$ quelques dérivées, d'ordre n, se séparent des autres, en prenant d'ailleurs des valeurs distinctes, ces dérivées ne pouvant se permuter, ni entre elles, ni avec les autres, dans un parcours infiniment petit de la variable, il en sera de même des formes correspondantes de la fonction.

En second lieu si, parmi les dérivées d'ordre n', on en trouve plusieurs ayant une même valeur k, d'autres ayant une même valeur k', etc., évidemment, sans pouvoir encore rien affirmer de la permutabilité ou de l'impermutabilité entre elles, de celles des dérivées qui, pour une valeur de x infiniment voisine de l'abscisse du point multiple, prennent des valeurs infiniment peu différentes de k, on pourra du moins affirmer qu'elles ne se permuteront pas avec les autres, et par suite conclure dans le même sens et avec les mêmes restrictions pour les formes correspondantes de la fonction.

Enfin, si quelques dérivées de la fonction restent confondues jusqu'à l'ordre n'', et qu'au lieu de se séparer à l'ordre $n''+1$ elles y deviennent toutes infinies, les formes correspondantes de la fonction seront permutables entre elles, mais non avec les autres.

Ainsi les formes de la fonction, qui peuvent se permuter entre elles, autour d'un point multiple, sont celles dont les dérivées deviennent infinies au même ordre, après être restées confondues jusqu'à l'ordre précédent.

Ce sont là sans doute les groupes circulaires que le calcul direct avait révélés à M. Puiseux; en les définissant comme on vient de le faire, il devient superflu de les déterminer à l'avance. Que l'équation soit d'ailleurs algébrique ou transcendante, on les retrouvera toujours sans difficulté.

Je dois, en terminant cette troisième partie, signaler une erreur contenue au chapitre III.

Lorsque j'écrivais ce chapitre, je croyais que l'enveloppe imaginaire des conjuguées aurait habituellement les parties réelles de ses coordonnées constantes; et j'en concluais que l'évaluation approximative de l'intégrale $\int y dx$ prise le long de cette enveloppe pourrait se faire, *dans le plus grand nombre des cas*, par la quadrature approchée de l'enveloppe.

J'avais évidemment pris l'exception pour la règle générale.

Quant aux raisons que je donnais à l'appui de mon opinion, elles sont aussi mauvaises que possible; mais je n'aurais pas cru devoir en parler, si je n'avais eu à faire une rectification plus importante.