JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. DE JONQUIÈRES

Théorèmes généraux concernant les courbes géométriques planes d'un ordre quelconque

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 6 (1861), p. 113-134.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1861_2_6__113_0>

THÉORÈMES GÉNÉRAUX

CONCERNANT

LES COURBES GÉOMÉTRIQUES PLANES D'UN ORDRE QUELCONQUE;

PAR M. E. DE JONQUIÈRES.

I. *Définitions.* — Je dirai que des courbes géométriques planes du degré n forment une *série*, quand elles ont toutes en commun $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ conditions quelconques, c'est-à-dire quand elles satisfont toutes à autant de conditions, moins une, qu'il en faut pour déterminer une courbe de ce degré; et, si N désigne le nombre des courbes de cette série qui peuvent, en outre de ces conditions communes auxquelles elles sont assujetties, passer par un point quelconque donné, je dirai que la série est *d'indice* N.

Par exemple, des coniques qui passent toutes par deux mêmes points et touchent deux mêmes droites, forment une série d'indice 4, parce qu'on peut faire passer quatre de ces courbes par un point quelconque.

Ainsi encore, les cercles osculateurs d'une courbe géométrique du degré m forment une série d'indice $\frac{3}{2}m(m-1)$, parce qu'il ne faut qu'une condition pour déterminer un cercle osculateur, et que, par un point donné, il passe $\frac{3}{2}m(m-1)$ de ces cercles, ainsi qu'on le verra ci-après (XVII).

Si les conditions communes aux courbes de la série sont simplement des points, auquel cas elles en ont, comme on sait, $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ autres communs, en outre des $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ dont il s'agit, N est égal à l'unité, et la série, qui est alors d'indice 1, prend le nom de *faisceau*.

II. Je rappellerai aussi les définitions et les propositions suivantes :

1° L'*axe harmonique* d'un point, par rapport à une courbe géométrique, est une ligne droite, lieu géométrique des centres harmoniques, relatifs à ce point, des points de rencontre d'une transversale quelconque issue de ce point avec la courbe (Cotes).

2° L'axe harmonique d'un point d'une courbe n'est autre chose que la tangente à la courbe en ce point.

L'axe harmonique d'un point ne passe par ce point que dans le cas où ce point appartient à la courbe.

3° La *courbe polaire* d'un point, par rapport à une courbe de degré m, est le lieu géométrique des points dont les axes harmoniques passent par ce point; elle est du degré $(m-1)$.

4° Les courbes polaires des différents points d'une droite passent toutes par $(m-1)^2$ points fixes, *pôles* de la droite.

L'un des pôles d'une droite ne peut être situé sur cette droite que si elle est une tangente de la courbe C_m; ce pôle est alors le point de contact.

5° La courbe enveloppe des axes harmoniques des points d'une droite, par rapport à une courbe du degré m, est une courbe de la *classe* $(m-1)$. [Chasles, *Cours professé à la Sorbonne* en 1856-1857.]

III. Théorème I. — *La courbe enveloppe des axes harmoniques d'un point* P, *par rapport aux courbes d'ordre n d'une série d'indice* N, *est de la classe* N.

Il suffit de prouver qu'on ne peut mener que N axes harmoniques par un point quelconque, par exemple par le point P lui-même.

En effet, les seuls axes harmoniques du point P qui passent en P, sont (II, 2°) les tangentes en ce point aux courbes de la série qui y passent elles-mêmes. Or le nombre de ces courbes est N par hypothèse. Tel est donc aussi le nombre des tangentes, c'est-à-dire des axes harmoniques qui passent en P; ce qui démontre le théorème.

IV. Lemme. — *Toutes les courbes* C_n *d'une série d'indice* N *peuvent être représentées analytiquement par une équation* $F(y, x)$ *du degré* n, *dont tous les coefficients sont des fonctions algébriques, entières et rationnelles d'une indéterminée* λ, *qui s'élève, dans l'un d'entre eux au* *moins, au degré* N, *mais jamais à un degré supérieur, tandis que* $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ *d'entre eux sont de certaines fonctions déterminées des paramètres des* $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ *équations qui expriment les conditions auxquelles sont assujetties toutes les courbes de la série.*

En effet, pour toute valeur de λ, l'équation représente une courbe du degré n satisfaisant aux conditions de la série; et, si l'on substitue à x et y les valeurs qui conviennent aux coordonnées d'un point quelconque donné a, on obtient une équation du degré N en λ qui donne N valeurs de cette indéterminée et par conséquent N courbes distinctes passant sur le point a, ce qui est précisément le caractère de la série d'indice N que l'on considère.

Par exemple, si $N=1$, c'est-à-dire si les courbes forment un faisceau, et que les équations de deux d'entre elles soient

$$y^n + axy^{n-1} + bx^n + \ldots + sy + tx + u = 0$$
$$y^n + a'xy^{n-1} + b'x^n + \ldots + s'y + t'x + u' = 0,$$

on sait que l'équation d'une courbe quelconque du faisceau sera (λ représentant une indéterminée)

$$y^n(1+\lambda) + xy^{n-1}(a+\lambda a') + x^n(b+\lambda b') + \ldots + x(t+\lambda t') + (u+\lambda u') = 0,$$

qui satisfait aux conditions du Lemme.

V. Théorème II. — *Parmi les courbes* C_n *d'une série d'indice* N, *il y en a* $2(n-1)$ N *qui touchent une droite donnée* L.

En effet, la droite L coupe les courbes de la série en des points dont les abscisses sont, d'après le *Lemme*, les racines d'une équation du degré n en x, dont certains coefficients, sinon tous, contiendront une indéterminée λ au degré N, mais non pas à un degré supérieur.

A toute valeur de λ qui rend égales deux racines de cette équation, il correspond une courbe C_n qui touche la droite L. Or la condition d'égalité de deux racines s'exprime par une équation du degré $2(n-1)$

par rapport aux coefficients de l'équation en x [*]. Donc cette équation de condition est du degré $2(n-1)N$ en λ. Donc enfin il existe $2(n-1)N$ courbes de la série qui touchent la droite L [**].

Corollaire. — On conclut sans difficulté du théorème précédent que :

THÉORÈME III. — *Si par un point* P *on mène des tangentes aux courbes* C_n *d'une série d'indice* N, *le lieu des points de contact est une courbe de degré* $(2n-1)N$, *qui passe* N fois *par le point* P.

On conclut ensuite de ce théorème que

Si d'un point fixe on abaisse des normales sur les courbes d'une série d'ordre n et d'indice N, *leurs pieds sont situés sur une courbe du degré* $2nN$;

Et en particulier que

Le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point fixe sur les tangentes d'une courbe géométrique du degré m, est une courbe du degré $2m(m-1)$ *qui est douée, au point fixe, d'un point multiple de l'ordre* $m(m-1)$ [***].

J'ai démontré ce dernier théorème, par une voie différente, dans un article inséré au tome II (2e série) du *Journal de Mathématiques*.

VI. On peut aussi démontrer directement le théorème III, duquel le théorème II se déduit ensuite immédiatement.

Pour cela je prouverai d'abord que

---

[*] Voir, par exemple, la *Note sur l'élimination* qui se trouve dans l'appendice du *Traité* du Rév. G. Salmon *sur les courbes supérieures*, p. 296.

[**] Cette formule semble être en défaut quand, n étant égal à 2, il y a plus d'une droite tangente parmi les conditions communes aux coniques de la série. Cette anomalie apparente sera expliquée ci-après (X).

[***] Cette courbe possède, à l'infini sur un cercle, deux autres points multiples, imaginaires, de l'ordre $m(m-1)$ (Chasles, *Comptes rendus*, t. LI, *Propriétés relatives au déplacement fini d'un corps, etc.*, § 24).

THÉORÈME IV. — *Les courbes polaires d'un point* P *relatives aux courbes* C_n *d'une série d'indice* N *forment elles-mêmes une série d'indice* N, *mais d'ordre* $(n-1)$.

Toutes ces courbes polaires sont du degré $(n-1)$; il ne faut plus qu'une seule condition pour déterminer chacune d'elles. Donc tout ce qu'il reste à prouver, c'est qu'il passe N de ces polaires, et pas davantage, par un point quelconque I.

En effet, une courbe polaire d'un point P est le lieu des points dont les axes harmoniques passent par ce point (II, 3°). Donc il passe par le point I autant de courbes polaires du point P, qu'il passe par le point P d'axes harmoniques du point I. Mais les axes harmoniques du point I enveloppent une courbe de la classe N (théor. I); donc il en passe N par le point P. Donc aussi il passe N courbes polaires du point P par le point I; ce qui démontre le théorème.

Je prouverai en second lieu que

THÉORÈME V. — *Si à une courbe* C_n *d'une série d'ordre m et d'indice* N *il ne correspond qu'une seule courbe* C_n *dans une autre série d'ordre n et d'indice* N, *et réciproquement, le lieu des points d'intersection de deux courbes* C_m *et* C_n *correspondantes est du degré* $N(m+n)$.

Il faut prouver que le lieu cherché possède $N(m+n)$ points sur une droite quelconque S.

Soit m un point variable de L : il passe par ce point N courbes C_m donnant lieu à N groupes de m points chacun sur L; appelons généralement x les abscisses de ces points d'intersection. Aux N courbes C_m il correspond par hypothèse, et une à une, N courbes C_n, lesquelles donnent lieu sur L à N groupes de n points m' chacun, correspondants groupe par groupe aux N premiers; appelons généralement x' les abscisses de ces points m'.

A un point m il correspond donc N groupes de points m'; et, réciproquement, à un point m' il correspond N groupes de points m.

Donc les variables x et x' sont liées entre elles par une équation composée de N facteurs dont chacun est de la forme

$$A x^m x'^n + B x^m x'^{n-1} + C x^{m-1} x'^n + \ldots = 0.$$

car toute valeur de x' donne N groupes de m valeurs de x, et toute valeur de x donne N groupes de n valeurs de x'.

Pour tous les points de L qui appartiennent à la fois à deux courbes correspondantes C_m, C_n, on a $x = x'$. Or cette hypothèse réduit l'équation ci-dessus à une équation en x seul composée de N facteurs chacun du degré $(m+n)$ et qui a par conséquent $N(m+n)$ racines. Tel est donc aussi le nombre des points de L qui appartiennent au lieu cherché. C. Q. F. D.

Corollaire. — Si les courbes de la première série sont les courbes polaires d'un point P par rapport à celles de la seconde, on a $m = (n-1)$; les courbes se correspondent une à une, et le lieu de leurs points d'intersection mutuels est, d'après ce qui précède, du degré $N(2n-1)$. Or un point d'intersection d'une C_n et de sa polaire a pour axe harmonique une droite tangente à C_n en ce point et qui passe par le point P. Donc le théorème III est démontré et par conséquent aussi le théorème II.

VII. Théorème VI. — *Le lieu des pôles d'une droite* L, *relatifs aux courbes* C_n *d'une série d'indice* N, *est une courbe du degré* $2(n-1)N$, *c'est-à-dire dont le degré est égal au nombre des* C_n *qui touchent une droite quelconque.*

Il suffit de prouver que le lieu cherché possède $2(n-1)N$ points sur une droite quelconque, par exemple sur la droite L elle-même.

En effet, les seuls pôles de L qui puissent exister sur cette droite sont (II, 4°) les points de contact des courbes de la série qui lui sont tangentes. Or le nombre de ces courbes est $2(n-1)N$ d'après le théorème II. Tel est donc aussi le nombre des points de contact, c'est-à-dire le nombre des pôles situés sur L.

VIII. Théorème VII. — *Le lieu des points qui ont même axe harmonique par rapport à une courbe fixe* C_m *du degré* m, *et par rapport à l'une des courbes* C_n *d'une série d'indice* N, *est une courbe du degré* $N(m+2n-3)$.

Il faut prouver que, sur une droite quelconque L, il existe $N(m+2n-3)$ points satisfaisant à la question.

Désignons par x et x' les abscisses de deux points variables m, m de L, dont la dépendance mutuelle va être expliquée.

Un point m donne lieu à un seul axe harmonique X de ce point, relativement à la courbe fixe C_m; et, d'après le théorème VI, il existe, sur L, $2(n-1)N$ points m', et pas davantage, qui ont cette même droite X pour axe harmonique relativement à certaines courbes de la série.

Réciproquement, un point m' a pour axes harmoniques, relatifs aux C_n de la série, toutes les tangentes à une courbe de la classe N (théorème I). Cette courbe a $N(m-1)$ tangentes communes avec la courbe enveloppe (II, 5°), des axes harmoniques des points de L par rapport à la C_m fixe. Ainsi il existe $N(m-1)$ axes harmoniques du point m', relatifs aux C_n, qui sont en même temps des axes harmoniques de certains points de L par rapport à la C_m fixe, et ces points m sont au nombre de $N(m-1)$. En d'autres termes, à un point m' il correspond (en se renfermant dans les conditions de la question) $N(m-1)$ points m, tandis qu'à un point m il correspond, comme on l'a dit plus haut, $2(n-1)N$ points m'.

Donc les abscisses x et x' de ces points sont liées entre elles par une équation de la forme

$$Ax^{N(m-1)}.x'^{2(n-1)N}+\ldots=0.$$

Si l'on y suppose $x=x'$, l'équation en x seul aura pour racines les abscisses des points dont chacun a même axe harmonique dans la C_m fixe et dans l'une des C_n. Or cette équation est du degré $N(m+2n-3)$ en x. Tel est donc aussi le nombre des points de L qui jouissent de la propriété énoncée; ce qui démontre le théorème.

Si $N=1$, les C_n forment un faisceau, et l'on retrouve une proposition que M. Chasles a démontrée, d'une manière très-différente, dans ses *Cours de la Sorbonne*.

Remarque. — L'énoncé du théorème VII doit subir une légère modification, dans le cas où l'une des conditions auxquelles sont assujetties toutes les courbes de la série est de toucher la courbe fixe C_m, par rapport à laquelle on prend les axes harmoniques.

En effet, puisque chacune des C_n touche cette courbe, chacun des points de la C_m jouit de la propriété d'avoir le même axe harmonique par rapport à elle et par rapport à l'une des courbes de la série ; de telle sorte que le lieu proprement dit se réduit alors, abstraction faite de cette C_m qui en est une branche, à une courbe du degré $N(m + 2n - 3) - m$.

Cette remarque sera utile ci-après (XII).

IX. Théorème VIII. — *Le nombre des courbes C_n d'une série d'indice N qui touchent une courbe fixe C_m est $Nm(m + 2n - 3)$.*

Supposons qu'une C_n touche la C_m en α. Ce point appartient à la courbe $C_{N(m+2n-3)}$ du théorème précédent. Car son axe harmonique, relatif à la C_m ou à la C_n, indistinctement, est la tangente αt commune aux deux courbes. Le lieu $C_{N(m+2n-3)}$ coupe la courbe C_m en $Nm(m + 2n - 3)$ points. L'un quelconque de ces points jouit de la propriété d'avoir le même axe harmonique dans la C_m et dans l'une des courbes de la série. Mais le premier axe est tangent à C_m, puisque son pôle est sur C_m, et il passe par ce pôle. Donc (II, 4°) celle des C_n, relativement à laquelle il est aussi l'axe de ce pôle, est aussi tangente à C_m en ce point.

Donc enfin il existe, en général, et sauf la diminution causée par l'existence de points multiples dans la courbe C_m, $Nm(m + 2n - 3)$ points de contact de la C_m avec les courbes de la série.

Remarque. — Dans le cas où $N = 1$, les C_n forment un faisceau, et le théorème devient celui qui a été donné, dans les *Cours de la Sorbonne*, par M. Chasles, dont j'ai ici suivi le mode de démonstration.

X. Supposons que les conditions communes aux C_n soient de toucher une courbe fixe C_{m_1} et de passer par $\frac{1}{2}n(n+3) - 2$ points. D'après la *remarque* du paragraphe précédent, N est alors égal à $m_1(m_1 + 2n - 3)$. Donc, d'après le théorème VIII, le nombre des C_n qui toucheront une seconde courbe fixe C_m sera

$$m_1 m_2 (m_1 + 2n - 3)(m_2 + 2n - 3).$$

Si les conditions communes consistent à toucher deux courbes fixes

C_{m_1}, C_{m_2} et à passer par $\frac{1}{2}n(n+3)-3$ points, on aura, d'après ce qu'on vient de dire, $N = m_1 m_2 (m_1 + 2n - 3)(m_2 + 2n - 3)$. Donc le nombre des C_n qui touchent une troisième courbe fixe C_m est

$$m_1 m_2 m_3 (m_1 + 2n - 3)(m_2 + 2n - 3)(m_3 + 2n - 3).$$

En continuant ces raisonnements, on arrive au théorème suivant, qui n'est d'ailleurs qu'un cas particulier du théorème VIII, savoir :

Théorème IX. — *Si des courbes du degré n doivent passer par $\frac{1}{2}n(n+3)-\mu$ points, et toucher μ courbes de degrés respectifs m_1, m_2, m_3, ..., m_μ, le nombre des C_n qui satisfont à la question est*

$$m_1 m_2 m_3 \ldots m_\mu (m_1 + 2n - 3)(m_2 + 2n - 3)(m_3 + 2n - 3)\ldots(m_\mu + 2n - 3).$$

XI. Cette formule a été donnée par M. Bischoff dans le *Journal de Crelle* (t. LVI), et déduite par ce géomètre de considérations très-différentes de celles qui précèdent.

Elle *paraît* être en défaut quand, n étant égal à 2, c'est-à-dire quand les C_n étant des coniques, il y a plus de deux droites tangentes parmi les conditions de la question. Ainsi elle donne 32 pour le nombre des coniques qui touchent cinq droites ; 8 pour celui des coniques qui en touchent trois et qui passent par deux points, etc.

Pour se rendre compte de cette singularité, il faut remarquer que des coniques, qui se trouvent en présence de trois droites qu'elles doivent toucher, prennent une dépendance mutuelle toute particulière, résultant de ce fait que les trois droites, qui joignent les sommets du triangle donné aux points de contact de chaque conique avec les côtés opposés, doivent passer par un même point. Le nombre des coniques qui satisfont à la question peut ainsi se trouver diminué, parce que plusieurs d'entre elles deviennent coïncidentes. Ainsi, quand des coniques circonscrites à un quadrilatère doivent toucher une droite, il y a généralement deux solutions. Mais si deux côtés opposés du quadrilatère deviennent infiniment petits, c'est-à-dire si les courbes doivent toucher deux droites fixes en deux points donnés, les points de contact avec la troisième se confondent en un seul, et il semble ne plus y avoir qu'une seule conique tangente. On ne doit donc pas s'étonner que l'adjonction d'une quatrième et d'une cinquième droite tangente, en augmentant la dépendance mutuelle des coniques, fasse diminuer, dans une progression rapide, le nombre des solutions, en les identifiant les unes avec les autres.

La cause intime de cette exception, que présentent les courbes du *second degré*, me paraît d'ailleurs résider dans cette autre propriété singulière et caractéristique dont elles sont douées, d'avoir pour polaires réciproques des courbes du même degré qu'elles. Car il en résulte, dans toutes les questions où il entre des points ou des droites tangentes, que le nombre des solutions, au lieu de suivre une progression continue, comme cela a lieu pour les courbes d'un ordre plus élevé, au fur et à mesure qu'une tangente se substitue à un point dans les conditions données, il en résulte, dis-je, que ce nombre cesse de croître dès que celui des tangentes devient égal à celui des points, et diminue ensuite par une progression inverse de celle qu'il avait suivie d'abord. Par exemple, il y a douze coniques qui touchent une conique et une droite données et qui passent par trois points, et il y a pareillement, à cause de la polarité réciproque qui ramène ce second cas au premier, douze coniques touchant une conique et trois droites fixes et passant par un point. Mais sans doute ces douze coniques en représentent en réalité quarante-huit, qui sont superposées quatre par quatre; et de même dans toutes les autres questions du même genre.

XII. Supposons que, dans celle des formules du § X qui est relative à deux courbes tangentes, ces deux courbes se confondent en une seule C_m, la formule devient $m^2\,\overline{(m+2n-3)}^2$, et elle se rapporte au nombre des courbes du degré n qui, passant par $\frac{1}{2}n\,(n+3)-2$ points, ont avec la C_m un double contact.

Mais il faut faire subir à ce nombre une diminution dont je vais expliquer les causes.

En premier lieu, la courbe du théorème VII, lieu des points qui ont même axe harmonique par rapport à la C_m et aux C_n, n'est plus que du degré $m(m+2n-3)^2 - m$, d'après la *remarque* du § VIII. Donc elle ne coupe la C_m qu'en $m^2(m+2n-3)^2 - m^2$ points, dont chacun est un point de tangence d'une C_n ayant un double contact avec C_m.

Mais, en outre, il faut en déduire le nombre de fois que l'une des C_n a un point double sur C_m; car l'axe harmonique d'un point double d'une courbe, par rapport à cette courbe, passe par ce point et y a une direction indéterminée; d'où il résulte que les deux axes harmoniques de chacun de ces points doubles situés sur C_m, par rapport à la C_m et à la C_n qui y possède ce point double, peuvent être regardés comme coïncidents, sans que cette C_n ait un double contact proprement dit avec la C_m.

Or on sait que les points doubles d'un *système* de courbes du degré n, qui passent par $\frac{1}{2}n(n+3) - 2$ points communs, sont situés sur une courbe du degré $3(n-1)$. Donc il y en a $3m(n-1)$ sur C_n.

D'après cela, la formule précédente se réduit à

$$m^2(m+2n-3)^2 - m^2 - 3m(n-1).$$

Mais le nombre qu'elle exprime représente évidemment :

1° Le double du nombre des C_n distinctes qui ont avec C_m un *double contact* proprement dit;

2° Le triple du nombre des C_n distinctes qui ont avec C_m un contact du second ordre; car chacune d'elles en représente trois superposées et qui étaient distinctes dans le cas général pour lequel la formule a été établie.

Soient x le nombre des C_n qui ont un double contact bi-ponctuel, et y celui des C_n qui ont un double contact ordinaire; on aura donc

$$2y + 3x = m^2(m+2n-3)^2 - m^2 - 3m(n-1).$$

Or, d'après M. Bischoff, de Munich, dans l'article du *Journal de Crelle* déjà cité, on a

$$x = 3m(m+n-3);$$

Donc le nombre des C_n qui ont un double contact, proprement dit, avec C_m est enfin

$$y = \frac{1}{2}\left[m^2(m+2n-3)^2 - m^2 - 3m(n-1) - 9m(m+n-3)\right]$$

ou

$$y = \frac{1}{2}m^2(m+2n-3)^2 - m(5m+6n-15);$$

ce qui est aussi la formule donnée, pour ce cas, par M. Bischoff.

Les mêmes considérations s'appliquent naturellement à la recherche du nombre des tangentes doubles des courbes géométriques ; et ce nombre résulte directement de la formule précédente, en y faisant $n = 1$; mais j'aurai occasion de revenir plus loin (XVIII) sur cette intéressante question.

XIII. Théorème X. — *La courbe enveloppe des cordes communes à une courbe fixe C_m du degré m, et aux courbes C_n d'une série d'ordre n et d'indice N, est de la classe $\frac{1}{2}m(m-1)(2n-1)N$.*

Il faut prouver que, par un point quelconque O, il passe $\frac{1}{2}m(m-1)(2n-1)N$ droites, sur chacune desquelles deux points *distincts*, appartenant à la C_m, coïncident avec deux points d'une même courbe C_n.

Soit x la distance à une origine fixe P, prise sur une droite arbitraire L, d'un point variable sur cette droite. Par chaque point dont l'abscisse est x, il passe, par hypothèse, N courbes de la série des C_n, et chacune de ces C_n coupe la C_m fixe en mn points. Projetant tous ces points d'intersection sur L, à partir du point O, et appelant y les abscisses de ces points projetés, on aura, sur L, N systèmes de mn points chacun, correspondants à la fois à l'abscisse x. Je dis N systèmes de mn points, et non pas un système de Nmn points, parce que la nature même de la question ne permet pas de joindre un point d'intersection de la C_m provenant d'une courbe C_n avec l'un des points d'intersection de cette C_m provenant d'une autre

C_n [*], pour en faire l'une des cordes dont on cherche l'enveloppe; mais, au contraire, les deux points d'intersection doivent provenir d'une même C_n.

En d'autres termes, l'équation en y, dont les racines pourront représenter les abscisses de tous les Nmn points projetés, ne sera pas une équation générale du degré Nmn, mais bien le produit de N équations distinctes, chacune du degré mn seulement.

Réciproquement, à une abscisse y d'un point Y de L, il correspond, sur la droite OY, m points d'intersection de la C_m fixe par cette droite; et, pour chacun de ces m points, N courbes appartenant à la série des C_n; donc mN valeurs de x.

Ainsi l'équation qui exprime la dépendance mutuelle des y et des x, se compose du produit de N équations, dans chacune desquelles y entre au degré mn, tandis que ses coefficients contiennent x au degré mN.

Pour qu'une des cordes communes à la C_m et à l'une des C_n passe par le point O, il faut, non plus que l'équation générale ait deux racines égales (ainsi que je l'ai fait remarquer plus haut), mais simplement que l'une des N équations, dans lesquelles elle se décompose en facteurs, ait deux racines égales.

Or, chacune de ces équations composantes étant du degré mn en y, l'équation de condition qui exprime l'égalité de deux racines sera du degré $2(mn-1)$ par rapport à ses coefficients; donc elle sera du degré $2m\text{N}(mn-1)$ en x. C'est-à-dire que cette circonstance de l'égalité de deux racines y égales entre elles se présentera $2m\text{N}(mn-1)$ fois pour l'infinité des valeurs de x. Chacune de ces racines égales correspond à une valeur de x, laquelle détermine N courbes C_n. Mais, parmi ces N courbes, il n'y en a, en général, qu'une seule qui satisfasse à la question. Car dire que deux racines en y sont égales, c'est dire que deux points d'intersection a, b, de la C_m avec une C_n sont en ligne droite avec le point O, et s'il arrive, comme ici, que ces deux points sont situés à la fois sur une même C_n passant par le point dont l'abscisse est x, les $\text{N}-1$ autres ne jouiront pas de cette propriété.

---

[*] Le sens précis de cette réflexion sera mieux compris dans un instant.

Actuellement, il y a deux remarques à faire sur la formule précédente $2mN(mn-1)$; c'est d'abord qu'elle exprime, non-seulement le nombre de fois que deux points d'intersection distincts de la C_m et d'une C_n sont en ligne droite avec le point O, mais aussi le nombre de fois que ces deux points sont coïncidents, c'est-à-dire le nombre des contacts de la C_m fixe avec les courbes de la série. Or le nombre de ces contacts est, d'après le théorème VIII, $Nm(m+2n-3)$. Donc la formule devient, en premier lieu,

$$2mN(mn-1) - Nm(m+2n-3) = m(m-1)(2n-1)N.$$

Mais je dis, en outre, qu'il ne faut prendre que la moitié de ce nombre, parce que l'analyse précédente, basée sur la théorie des racines égales, conduit nécessairement ici à considérer deux fois la même corde, et que, si a et b sont deux points d'intersection de la C_m et d'une C_n, situéesen ligne droite avec le point O, le calcul donne aussi bien la corde ab que la corde ba [*], ce qui double le nombre des solutions réellement distinctes. Donc enfin le nombre des cordes communes qui passent par le point O est $\frac{1}{2}m(m-1)(2n-1)N$; ce qui démontre le théorème.

XIV. Si les courbes de la série forment un faisceau, $N=1$ et le théorème prend cet énoncé :

THÉORÈME XI. — *Les cordes communes à une C_m fixe et à un*

---

[*] Il en est ici, comme dans le cas où il s'agit d'évaluer les distances mutuelles de m points. Le nombre de ces distances est $m(m-1)$, puisque chacun des m points doit être joint aux $(m-1)$ autres. Mais, comme chacune se répète deux fois, le nombre des distances réellement distinctes n'est que $\frac{1}{2}m(m-1)$.

Le même fait se présente, quand on applique la théorie des racines égales à la recherche du nombre des tangentes qu'on peut mener d'un point à une courbe du degré m, ce qui est extrêmement simple. L'équation de condition, à laquelle on arrive par des raisonnements analogues à ceux qui précèdent, est du degré $2m(m-1)$. Mais, comme chaque tangente se trouve répétée deux fois, le nombre des tangentes réellement distinctes qu'on peut mener à la courbe n'est que la moitié du précédent, c'est-à-dire $m(m-1)$, comme on le démontre de beaucoup d'autres manières.

faisceau de C_n enveloppent une courbe de la classe $\frac{1}{2}m(m-1)(2n-1)$.

XV. Si les courbes de la série passent toutes par un même point a, et que ce point soit situé sur la C_m fixe, la classe de l'enveloppe est diminuée de $(m-1)N$; et si elles passent par p points communs situés sur la C_m, cette classe est diminuée de $p(m-1)N$.

Car la droite Oa, par exemple, coupe C_m en $(m-1)$ autres points b, c, d, etc. Il y a N courbes de la série qui passent en a et b; N qui passent en a et c; etc. Donc Oa est $N(m-1)$ fois une corde commune à la C_m et aux C_n; et ceci a lieu quel que soit le point O. Donc le point a est un point isolé de la courbe enveloppe et, qui plus est, un point multiple de la classe $N(m-1)$; de sorte que la classe de la courbe enveloppe proprement dite, et en faisant abstraction de ce point, se trouve abaissée de $N(m-1)$ unités.

On en conclut en particulier que

Les coniques d'un faisceau, qui passent par deux points d'une conique fixe, la coupent encore suivant des cordes concourantes en un même point ;

Que

Les cubiques d'un faisceau, qui passent par sept points d'une cubique fixe, interceptent dans cette courbe des cordes concourantes en un même point ;

Que

Les coniques d'un faisceau, qui passent par quatre points d'une courbe du troisième ordre, la coupent encore suivant des droites qui passent toutes par un point fixe ;

Que

Les coniques d'une série, qui touchent toutes une droite fixe et qui passent par trois points, dont deux sont situés sur une conique donnée, coupent cette courbe suivant des cordes qui enveloppent une autre conique ;

Ou que

Les coniques d'un faisceau, qui ont toutes un point commun avec une *conique fixe, la coupent suivant des cordes qui enveloppent une autre conique;* théorème cité et utilisé par M. Chasles dans sa *Note sur la construction de la courbe du troisième ordre*, insérée dans le tome XXXVII des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, page 276.

Etc., etc.

XVI. Dans le cas où la courbe fixe C_m, qui se trouve en présence de la série des C_n, est douée, en un point P, d'un point multiple de l'ordre $(m-1)$, on peut arriver à la formule générale du théorème X par des considérations de pure géométrie qui, indépendamment de l'espèce de confirmation qu'elles donnent à cette formule, me semblent assez intéressantes pour trouver place ici.

Pour trouver, dans ce cas, la classe de l'enveloppe des cordes communes, il suffit de prouver que, par un point quelconque, le point P par exemple, il passe $\frac{1}{2}m(m-1)(2n-1)$N cordes.

Or il est évident que les seules courbes C_n qui puissent alors donner lieu à des cordes passant en P, sont celles qui passent elles-mêmes par ce point, puisque, par la nature du point multiple, toute droite qui y passe ne peut plus rencontrer la courbe qu'en un seul point.

Ces courbes sont en nombre N, par hypothèse. Chacune d'elles coupe C_m en $mn-(m-1)$ points, autres que le point multiple P; et chacun de ces points d'intersection donne lieu à $(m-1)$ cordes, si on le suppose joint aux $(m-1)$ points d'intersection qui sont confondus en un seul au point P. On obtient donc ainsi d'abord $(m-1)[mn-(m-1)]$ cordes aboutissant en P.

En outre, les $(m-1)$ points confondus en P, ou, si l'on veut, qui y sont infiniment voisins l'un de l'autre, donnent lieu à $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ distances mutuelles ou cordes aboutissant à ce point. On aura donc un total de

$$(m-1)\left[mn-(m-1)+\frac{1}{2}(m-2)\right]=\frac{1}{2}m(m-1)(2n-1);$$

et enfin, puisqu'il y a N courbes C_n qui passent en P, et dont chacune produit le même résultat, le nombre total des cordes communes issues du point P est $\frac{1}{2}m(m-1)(2n-1)$N. C. Q. F. D.

XVII. Une des applications les plus intéressantes qu'on puisse faire du théorème XI, relatif à la courbe enveloppe des cordes communes à une C_m fixe et à un faisceau de C_n, est celle qui a pour objet la recherche du nombre des *tangentes doubles* que possède une courbe du degré m. La solution qu'il fournit de cette question, qui a longtemps présenté des difficultés, ne le cède en élégance et en simplicité à aucune autre.

Je commencerai par rappeler, sous forme de *Lemme*, la proposition suivante qui est due à M. O. Hesse.

LEMME. — *Une courbe géométrique du degré m a, en général, $3m(m-2)$ points d'inflexion.*

Cette proposition peut elle-même se prouver, en quelques mots, de la manière suivante :

Supposons qu'un point a se meuve sur une droite quelconque L. Ses courbes polaires successives, par rapport à la courbe C_m, forment un faisceau de l'ordre $(m-1)$ (II, 4°). D'après le théorème VIII, le nombre des courbes de ce faisceau qui touchent la C_m est $m(3m-5)$. Or, quand une courbe polaire du point a touche la C_m en t, la droite at, au lieu d'être, comme dans le cas où le point t est un point d'intersection des deux courbes, simplement tangente à C_m en t, y touche cette courbe suivant deux éléments consécutifs, c'est-à-dire est tangente en un point d'inflexion, à moins pourtant que le point a n'appartienne lui-même à la C_m. Car, dans ce cas, sa courbe polaire touche C en a, sans que la tangente commune de ces deux courbes soit, en général, une tangente d'inflexion. Or, cette seconde circonstance se présente pour chacun des m points d'intersection de C_m par L, c'est-à-dire m fois seulement. Donc le nombre des points a, dont chacun est le point d'intersection de L par une tangente d'inflexion est seulement

$$m(3m-5)-m=3m(m-2).\ [*] \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

[*] Sans rien changer à l'enchaînement des raisonnements qui précèdent, si l'on suppose que, de chaque position du point a, on abaisse des normales sur la C_m, leurs pieds sont situés sur une courbe du degré m et toutes ces courbes forment un faisceau. Quand une de ces courbes touche la C_m, le point de L, duquel elle dérive, est un centre de courbure. On en conclut donc immédiatement que *la développée d'une courbe géométrique du degré m est une courbe du degré $3m(m-1)$ dont la classe est m^2.*

Ceci posé, il est très-facile de prouver que

THÉORÈME XI. — *Une courbe géométrique du degré m a, en général,* $\frac{1}{2}m(m-2)(m^2-9)$ *tangentes doubles.*

Supposons, comme précédemment, qu'un point a se meuve sur une droite L, et qu'à chaque instant on joigne ce point par des droites at, at', ..., aux $m(m-1)$ points d'intersection de la C_m par la courbe polaire du point a.

Il arrivera que deux points d'intersection t, t' seront en ligne droite avec le point a, dans les trois circonstances suivantes, savoir :

1° Quand la droite att' sera une tangente double ; et alors les deux points t, t' sont distincts et situés l'un et l'autre hors de L ;

2° Quand la droite att' sera une tangente d'inflexion ; et alors les deux points t, t' coïncident en dehors de L (voir le *Lemme*);

3° Quand le point a sera un point d'intersection de la C_m par L ; car la courbe polaire passant aussi par ce point, il est lui-même l'un des points t; de sorte que la droite at' qui le joindra à l'un quelconque t' des $m(m-1)-1$ autres points d'intersection de la C_m par la courbe polaire, contiendra aussi deux points d'intersection t, t' de ces deux courbes.

Or le second cas se présente $3m(m-2)$ fois, et le troisième se présente $m[m(m-1)-1]$ fois. Donc si l'on détermine le nombre total des fois que deux points t, t' sont en ligne droite avec le point a, d'où ils dérivent, il suffira d'en retrancher

$$3m(m-2)+m[m(m-1)-1]=\frac{1}{2}m(2m^2+4m-14),$$

pour avoir précisément le nombre des tangentes doubles, proprement dites, de la courbe proposée.

Pour cela, remarquons que, à un point a de L dont l'abscisse est x, il correspond $m(m-1)$ points d'intersection de la C_m par la polaire de ce point: donc

$$\frac{1}{2}m(m-1)[m(m-1)-1]=\frac{1}{2}m(m^3-2m^2+1)$$

cordes distinctes joignant deux à deux ces points d'intersection. Chacune de ces cordes coupe L en un point, dont l'abscisse sera désignée par x'; et, ce qu'il faut savoir, c'est combien de fois il arrive que les valeurs de x et de x' sont les mêmes.

On vient de voir que, à une valeur de x, il correspond

$$\frac{1}{2}m(m^3 - 2m^2 + 1)$$

valeurs de x'. Mais, à une valeur de x', il correspond

$$\frac{1}{2}m(m-1)(2m-3) = \frac{1}{2}m(2m^2 - 5m + 3)$$

valeurs de x, parce que, d'après le théorème XI, il passe précisément ce nombre de cordes, communes à la C_m et au faisceau des courbes polaires, par le point dont l'abscisse est x', et que généralement chacune de ces cordes provient d'une courbe polaire particulière, c'est-à-dire qu'une courbe ne donne lieu, en général, qu'à une seule corde passant en un point donné.

Donc l'équation qui exprime la dépendance mutuelle des abscisses x et x' est de la forme

$$A x^{\frac{1}{2}m(2m^2-5m+3)} . x'^{\frac{1}{2}m(m^3-2m^2+1)} + \ldots = 0.$$

Si l'on y suppose $x = x'$, on obtient une équation en x seul, dont le degré est $\frac{1}{2}m(m^3 - 5m + 4)$; ce qui prouve que tel est aussi le nombre de fois que se présente la coïncidence des deux points dont les abscisses respectives sont x et x'. Si l'on retranche de ce nombre celui qui est écrit plus haut, il vient, pour le nombre des tangentes doubles,

$$\frac{1}{2}m(m^3 - 5m + 4) - \frac{1}{2}m(2m^2 + 4m - 14) = \frac{1}{2}m(m-2)(m^2-9).$$

C. Q. F. D.

Autrement. — Le théorème qui précède peut aussi se conclure très-aisément de la formule générale du § X, relative à deux courbes. Si l'on y suppose que les deux courbes fixes soient du degré m et que $n = 1$, on en conclut d'abord qu'il y a $m^2(m-1)^2$ droites touchant deux courbes de degré m. Si les deux courbes sont égales, on pourra les amener, en déplaçant l'une d'elles, à se confondre en une seule. Considérons les deux courbes un instant avant que la coïncidence ait lieu. En chacun de leurs m^2 points d'intersection il y a deux tangentes distinctes, une pour chaque courbe; au moment où la coïncidence s'établit, ces deux tangentes n'en font plus qu'une seule, qui est une tangente simple de la courbe C_m, quoiqu'elle représente une tangente aux deux courbes superposées, c'est-à-dire une tangente double. Il faut donc d'abord déduire m^2 du nombre précédent. En outre, chaque tangente d'inflexion représente trois tangentes doubles superposées qui, n'étant pas des tangentes doubles proprement dites, doivent être retranchées aussi du nombre primitivement trouvé. On a donc enfin

$$m^2(m-1)^2 - 9m - (m-2) - m^2 = m(m-2)(m^2-9),$$

nombre dont il faut prendre la moitié, parce que chaque tangente double s'y trouve répétée deux fois, d'après la manière même dont il a été obtenu; ce qui démontre le théorème.

Remarque. — La formule précédente convient au cas où la C_m est *générale* dans son degré. Si cette courbe a des points doubles ou de rebroussement, le nombre des tangentes doubles en est diminué, et l'on prouve très-aisément que, si D et D' sont, respectivement, les nombres de ces points singuliers, la formule devient

$$\frac{1}{2}m(m-2)(m^2-9) - (2D+3D')(m^2-m-6)$$
$$-2D(D-1) - \frac{9}{2}D'(D'-1) - 3DD'.$$

Mais ce n'est pas ici le lieu d'entrer dans ces détails.

XVIII. Pour donner une autre application du théorème XI, je vais démontrer deux propriétés générales des courbes géométriques.

THÉORÈME XII. — *Les tangentes à une courbe géométrique* C_m, *menées aux points où cette courbe est rencontrée par une transversale qui pivote autour d'un point fixe* S, *se coupent, deux à deux, sur une courbe dont le degré est* $\frac{1}{2}m(m-1)(2m-3)$.

Il faut prouver que le lieu cherché possède $\frac{1}{2}\,m\,(m-1)\,(2m-3)$ points sur une droite quelconque L.

Or, si un point se meut sur L, les points de contact des tangentes à C_m, issues de ce point, sont, à chaque instant, sur la C_{m-1}, première courbe polaire de ce point par rapport à la C_m. Toutes les polaires forment un *faisceau* de l'ordre $(m-1)$. Donc leurs cordes communes avec C_m enveloppent une courbe de la classe $\frac{1}{2}m(m-1)(2m-3)$ (théorème XI). Donc il passe précisément ce nombre de cordes communes par le point S. Or, pour chacune de ces cordes, il y a sur L un point de concours de deux tangentes menées à C_m en deux points de rencontre d'une même transversale. Donc le théorème est démontré.

Cette démonstration se déduit aussi, avec beaucoup de facilité, de la théorie des racines égales. Mais ces détails seraient ici superflus.

Corollaire. — Si la droite L est à l'infini, les tangentes qu'on considère sont parallèles dans chaque couple, et l'on a ce théorème qui a été énoncé, sans démonstration, par M. Steiner dans un *Mémoire sur les Courbes algébriques*, dont M. Woepcke a donné une traduction dans le tome XVIII du *Journal de Mathématiques* (*voir* page 348, en note, au bas de la page) :

Théorème XIII. — *La courbe enveloppe des cordes qui joignent, deux à deux, les points de contact des tangentes d'une C_m parallèles entre elles, est de la classe $\frac{1}{2}\,m(m-1)(2m-3)$.*

XIX. Voici encore une propriété nouvelle des courbes géométriques qui se déduit directement du théorème X.

Théorème XIV. — *Les normales à une C_m, menées aux points où cette courbe est rencontrée par une transversale qui pivote autour d'un point S, se coupent, deux à deux, sur une courbe du degré $\frac{1}{2}\,m(m-1)(2m-1)$.*

Il faut prouver que le lieu cherché possède $\frac{1}{2}\,m\,(m-1)(2m-1)$ points sur une droite quelconque L.

Supposons que, de chaque point de L, on abaisse m^2 normales sur

C_m. D'après un théorème démontré par M. Steiner, dans le tome XX du *Journal de Mathématiques*, page 36, les pieds de ces normales sont, à chaque instant, situés sur une courbe du degré m, et toutes ces courbes passent par m^2 points communs, c'est-à-dire forment un faisceau. Le lieu cherché possède, sur L, autant de points que ce faisceau et la C_m fixe possèdent de cordes communes passant en S. Or ce nombre est $\frac{1}{2}m(m-1)(2m-1)$, d'après le théorème XI. Donc le théorème est démontré. On le déduit aussi, sans difficulté, de la théorie des racines égales.

Si l'on mène, par le point S, des parallèles aux m asymptotes de la courbe C_m, et ensuite des normales à cette courbe en tous les points où ces parallèles la rencontrent à distance finie, on a d'abord les directions de $m(m-1)$ asymptotes de la courbe dont il s'agit. Il reste à déterminer celles des

$$\frac{1}{2}m(m-1)(2m-1) - m(m-1) = \frac{1}{2}m(m-1)(2m-3) \text{ autres.}$$

Et il est facile de voir que ce sont précisément les normales à la C_m aux points de contact des tangentes parallèles dont il s'agit dans le théorème XIII, et dont les cordes de contact passent par le point S.

Etc.

Je terminerai ce Mémoire en faisant remarquer que les théorèmes XII et XIV sont susceptibles d'être généralisés ainsi qu'il suit :

THÉORÈME XV. — *Étant données deux courbes fixes planes, l'une du degré m et l'autre de la classe m'; si une tangente roule sur celle-ci, et que, par les points où elle rencontre la C_m, on mène à cette courbe ses tangentes et ses normales en ces points d'intersection, les tangentes se couperont, deux à deux, sur une courbe du degré $\frac{1}{2}mm'(m-1)(2m-3)$, et les normales se couperont, deux à deux, sur une courbe du degré $\frac{1}{2}mm'(m-1)(2m-1)$.*

Ces deux propositions se démontrent de la même manière que celles dont elles sont une simple extension.