JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BOURGET

Mémoire sur les nombres de Cauchy et leur application à divers problèmes de mécanique céleste

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 6 (1861), p. 33-54.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1861_2_6__33_0>

MÉMOIRE

SUR

LES NOMBRES DE CAUCHY

ET

LEUR APPLICATION A DIVERS PROBLÈMES DE MÉCANIQUE CÉLESTE;

PAR M. J. BOURGET,
Professeur à la Faculté des Sciences de Clermont-Ferrand.

---

§ I. — *Nombres de Cauchy.*

1. Dans un Mémoire sur le développement de la fonction perturbatrice [*], l'illustre géomètre a introduit avec avantage le nombre $N_{-i,j,p}$, défini par l'équation

$$(1)\quad N_{-i,j,p} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c^{-iu\sqrt{-1}}\left(c^{u\sqrt{-1}} + c^{-u\sqrt{-1}}\right)^j \left(c^{u\sqrt{-1}} - c^{-u\sqrt{-1}}\right)^p du,$$

j et p étant des nombres nuls, ou entiers et positifs, i étant nul ou entier, ou bien

$$(2)\qquad N_{-i,j,p} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{-i}\left(x + \frac{1}{x}\right)^j \left(x - \frac{1}{x}\right)^p du,$$

si l'on pose

$$x = c^{u\sqrt{-1}},$$

et si l'on représente par c la base des logarithmes népériens.

En m'occupant des propriétés de ces nombres, j'ai découvert qu'on peut en former un tableau aussi étendu qu'on voudra, analogue au

---

[*] *Comptes rendus de l'Académie*, t. XII, p. 92.

triangle arithmétique de Pascal, et que les nombres figurés n'en sont qu'un cas particulier. J'ai vu de plus qu'un grand nombre de fonctions utiles en astronomie se développent en série avec la plus grande facilité quand on connaît les quantités N. Ajoutons qu'à côté de ces nombres apparaissent naturellement des transcendantes comprenant celle de Bessel, et faciles à calculer à l'aide des nombres N. Je montre qu'à l'aide de ces transcendantes on peut résoudre presque sans calcul le problème de Képler et d'autres analogues. M. Faa de Bruno [*] avait déjà signalé la simplicité avec laquelle la transcendante de Bessel donne l'anomalie excentrique et le rayon vecteur en fonction de l'anomalie moyenne. Les recherches que nous consignons ici complètent et étendent ce travail.

2. *Propriétés des nombres de Cauchy.* — Les propriétés des nombres $N_{-i,j,p}$, dont quelques-unes ont été signalées par Cauchy, se résument dans la série des théorèmes suivants :

THÉORÈME I. — *Le nombre $N_{-i,j,p}$ est égal à la partie constante du développement de $x^{-i}\left(x+\frac{1}{x}\right)^j\left(x-\frac{1}{x}\right)^p$, suivant les puissances de x.*

En effet, tout terme qui dans le développement renferme l'exponentielle x, donne zéro par l'intégration.

THÉORÈME II. — *Le nombre $N_{-i,j,p}$ est nul toutes les fois que la somme des indices $-i+j+p$ est négative ou impaire, et il est égal à l'unité quand cette somme est nulle.*

En effet, le développement du produit

$$x^{-i}\left(x+\frac{1}{x}\right)^j\left(x-\frac{1}{x}\right)^p$$

donne un résultat de la forme

$$x^{j+p-i}+H_1 x^{j+p-i-2}+H_2 x^{j+p-i-4}+\ldots.$$

[*] Thèse présentée à la Faculté de Paris, 1856.

Or il ne peut y avoir un terme indépendant de x qu'autant que

$$j+p-i=2k,$$

k étant un nombre entier positif; et si

$$j+p-i=0,$$

le terme indépendant de x est l'unité.

THÉORÈME III. — *Si i change de signe, N garde la même valeur numérique; mais il change de signe si p ou $j-i$ est impair.*

En effet, nous avons identiquement

$$x^{-i}\left(x+\frac{1}{x}\right)^j\left(x-\frac{1}{x}\right)^p=\left(\frac{1}{x}\right)^i\left(\frac{1}{x}+x\right)^j\left(\frac{1}{x}-x\right)^p\left(-1\right)^p;$$

donc, en prenant les parties constantes des deux membres, il vient

$$N_{-i,j,p}=(-1)^p N_{i,j,p};$$

d'ailleurs

$$(-1)^p=(-1)^{2k-j+i}=(-1)^{j-i},$$

le théorème est donc démontré.

THÉORÈME IV. — *Si l'on connaît tous les nombres N relatifs à une certaine valeur de j, on peut en déduire ceux qui se rapportent à une valeur de j immédiatement supérieure.*

En effet, on a identiquement

$$x^{-i}\left(x+\frac{1}{x}\right)^j\left(x-\frac{1}{x}\right)^p=x^{-i+1}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{j-1}\left(x-\frac{1}{x}\right)^p$$
$$+x^{-i-1}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{j-1}\left(x-\frac{1}{x}\right)^p,$$

ce qui démontre le théorème, car on en déduit

$$N_{-i,j,p}=N_{-i+1,j-1,p}+N_{-i-1,j-1,p}.$$

THÉORÈME V. — *Si l'on connaît tous les nombres N relatifs à une* *certaine valeur de p, on peut en déduire tous ceux qui se rapportent à une valeur de p immédiatement supérieure.*

On démontre, en effet, comme dans le théorème précédent, que

$$N_{-i,j,p} = N_{-i+1,j,p-1} - N_{-i-1,j,p-1}.$$

Corollaire. — Les deux derniers théorèmes montrent que le calcul des nombres de Cauchy se ramène au cas où j et p sont nuls.

Théorème VI. — *Il existe une relation entre les nombres* N *qui correspondent à une même valeur de i et à des valeurs de j et p voisines.*

En effet, on a identiquement

$$x^{-i}\left(x+\frac{1}{x}\right)^j\left(x-\frac{1}{x}\right)^p = \frac{x^{-i}D_u\left(x-\frac{1}{x}\right)^{p+1}\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)^{j-1}}{(p+1)\sqrt{-1}}$$
$$= \frac{x^{-i}D_u\left(x+\frac{1}{x}\right)^{j+1}\cdot\left(x-\frac{1}{x}\right)^{p-1}}{(j+1)\sqrt{-1}};$$

donc

$$N_{-i,j,p} = \frac{1}{(p+1)\sqrt{-1}}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{-i}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{j-1} D_u\left(x-\frac{1}{x}\right)^{p+1}.du$$
$$= \frac{1}{(j+1)\sqrt{-1}}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{-i}\left(x-\frac{1}{x}\right)^{p-1} D_u\left(x+\frac{1}{x}\right)^{j+1}.du.$$

Intégrons par parties, il vient

$$N_{-i,j,p} = -\frac{1}{(p+1)\sqrt{-1}}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_u\left[x^{-i}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{j-1}\right]\left(x-\frac{1}{x}\right)^{p+1}du$$
$$= -\frac{1}{(j+1)\sqrt{-1}}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_u\left[x^{-i}\left(x-\frac{1}{x}\right)^{p-1}\right]\left(x+\frac{1}{x}\right)^{j+1}du;$$

en développant, on trouve

$$N_{-i,j,p} = \frac{i}{p+1}N_{-i,j-1,p+1} - \frac{j-1}{p+1}N_{-i,j-2,p+2}$$

et

$$N_{-i,j,p} = \frac{i}{j+1} N_{-i,j+1,p-1} - \frac{p-1}{j+1} N_{-i,j+2,p-2}.$$

Corollaires. — On déduit des relations précédentes

$$N_{-i,1,p} = \frac{i}{p+1} N_{-i,0,p+1}$$

et

$$N_{-i,j,1} = \frac{i}{j+1} N_{-i,j+1,0}.$$

Théorème VII. — *Les deux nombres* $N_{-i,j,0}$ *et* $N_{-i-2,j,0}$, *qui ne diffèrent que par les valeurs de* i, *sont liés entre eux par l'équation*

$$N_{-i,j,0} = \frac{i+j+2}{j-i} N_{-i-2,j,0}.$$

On peut démontrer ce théorème directement en partant de la définition du nombre N, et procédant par l'intégration par parties; mais on y arrive plus facilement en faisant usage des théorèmes précédents.

Un des corollaires du théorème VI donne

$$(j+1) N_{-i,j,1} = i N_{-i,j+1,0},$$

mais les théorèmes IV et V donnent

$$N_{-i,j,1} = N_{-i+1,j,0} - N_{-i-1,j,0}$$

et

$$N_{-i,j+1,0} = N_{-i+1,j,0} + N_{-i-1,j,0};$$

donc

$$(j+1) N_{-i+1,j,0} - (j+1) N_{-i-1,j,0} = i N_{-i+1,j,0} + i N_{-i-1,j,0},$$

ou bien

$$(j+1-i) N_{-i+1,j,0} = (j+1+i) N_{-i-1,j,0}.$$

Si dans cette identité nous changeons $i-1$ en i, nous aurons

$$(j-i) N_{-i,j,0} = (j+2+i) N_{-i-2,j,0}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Corollaire I. — Nous avons vu (théorème II) que

$$j - i = 2k,$$

k entier et positif. Donc en remplaçant i par sa valeur, il vient

$$N_{2k-j,j,0} = \frac{j-k+1}{k} N_{2k-j-2,j,0}.$$

Si dans cette formule nous faisons successivement $k = 1, 2, 3, \ldots$ et si nous remarquons que $N_{-j,j,0} = 1$, nous aurons la série des identités

$$N_{2-j,j,0} = \frac{j}{1},$$

$$N_{4-j,j,0} = \frac{j-1}{2} N_{2-j,j,0},$$

$$N_{6-j,j,0} = \frac{j-2}{3} N_{4-j,j,0},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$N_{2k-j,j,0} = \frac{j-k+1}{k} N_{2k-2-j,j,0},$$

d'où, en multipliant,

$$N_{2k-j,j,0} = \frac{j(j-1)(j-2)\ldots(j-k+1)}{1.2.3\ldots k},$$

c'est-à-dire le coefficient de y^k dans le développement du binôme $(1+y)^j$ ou de x^{j-2k} dans le développement de $\left(x + \frac{1}{x}\right)^j$.

C'est au reste ce qu'il est facile de voir directement, car on a pour ce développement un polynôme de la forme

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^j = x^j + H_1 x^{j-2} + H_2 x^{j-4} + \ldots + H_k x^{j-2k} + \ldots + x^{-j};$$

multiplions les deux membres par $x^{2k-j} du$ et intégrons de 0 à 2π, il vient

$$H_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x^{2k-j} \left(x + \frac{1}{x}\right)^j du = N_{2k-j,j,0}.$$

Ainsi les nombres de Cauchy comprennent comme cas particulier les nombres figurés, et ils permettent d'en déterminer la formule générale.

Corollaire II. — On arriverait par une démonstration toute semblable à la relation

$$N_{-i,0,p} = -\frac{p+2+i}{p-i} N_{-i-2,0,p},$$

d'où l'on tirerait

$$N_{2k-p,0,p} = -\frac{p-k+1}{k} N_{2k-2-p,0,p} = (-1)^k \frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-k+1)}{1.2.3\ldots k},$$

et l'on verrait facilement que cette quantité est le coefficient de y^k dans le développement du binôme $(1-y)^p$, ou de x^{p-2k} dans le développement de $\left(x-\frac{1}{x}\right)^p$.

Corollaire III. — Il serait maintenant facile de donner la formule générale du nombre $N_{-i,j,p}$, car on connaît les coefficients des deux développements

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^j = x^j + A_1 x^{j-2} + A_2 x^{j-4} + A_3 x^{j-6} + \ldots + A_k x^{j-2k} + \ldots,$$

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^p = x^p - B_1 x^{p-2} + B_2 x^{p-4} - B_3 x^{p-6} + \ldots \pm B_k x^{p-2k} + \ldots;$$

d'où l'on déduirait

$$x^{-i}\left(x+\frac{1}{x}\right)^j\left(x-\frac{1}{x}\right)^p = x^{j+p-i} + H_1 x^{j+p-i-2} + H_2 x^{j+p-i-4} + \ldots + H_k x^{j+p-i-2k} \ldots,$$

et si l'on a

$$j+p-i = 2k,$$

le nombre N n'est autre chose que H_k; donc on pourrait poser l'équation

$$N_{-i,j,p} = H_k = A_k - A_{k-1}B_1 + A_{k-2}B_2 - \ldots \pm B_k,$$

ce qui fournirait la valeur générale du nombre N.

Mais nous allons voir qu'il est inutile de calculer N par cette formule, et qu'on peut former avec la plus grande facilité des tableaux aussi étendus qu'on voudra de ces quantités, par un procédé qui permet d'éviter à coup sûr toute erreur de calcul.

3. *Construction d'une table des nombres de Cauchy.* — La table de ces nombres se composera d'autant de tables partielles qu'il y a de valeurs de p; et ce nombre, comme nous l'avons vu, peut recevoir les valeurs :

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\ldots$$

Nous désignerons chacun de ces tableaux par la valeur de p qui lui correspond.

Tableau où $p = 0$.

p	j	VALEURS DE i.																				
		−10	−9	−8	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0											1										
	1										1*		1*									
	2									1		2**		1								
	3								1		3		3		1							
	4							1		4		6		4		1						
	5						1		5		10		10		5		1					
	6					1		6		15		20		15		6		1				
	7				1		7		21		35		35		21		7		1			
	8			1		8		28		56		70		56		28		8		1		
	9		1		9		36		84		126		126		84		36		9		1	
	10	1		10		45		120		210		252		210		120		45		10		1

Pour le former :

1°. J'observe que $N_{0,0,0} = 1$, puisque la somme des indices est nulle, je l'écris en tête du tableau.

2°. Si à partir de ce nombre je marche en diagonale vers la gauche, je rencontre une série de cases qui correspondent encore à une somme d'indices égale à zéro, j'y place l'unité.

3°. En partant de la case (0,0,0) j'avance en diagonale vers la droite, je dois y placer l'unité en vertu du théorème III.

4°. Actuellement il est facile de continuer indéfiniment le tableau sans crainte de se tromper; car, en vertu du théorème IV, chacun des nombres se forme en prenant la somme de celui qui est immédiatement à droite et au-dessus, et de celui qui est immédiatement à gauche et au-dessus. Ainsi, à la case marquée **, il faut mettre la somme des nombres que renferment les cases marquées *; et la règle est générale.

5°. Les cases vides correspondent à des N nuls.

Tableau où $p = 1$.

p	j	VALEURS DE i.																		
		− 9	− 8	− 7	− 6	− 5	− 4	− 3	− 2	− 1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0									1		1								
	1								1		2		1							
	2							1		3		3		1						
	3						1		4		6		4		1					

6°. Au moyen du tableau qui se rapporte à $p = 0$, et en faisant usage du théorème V, il est facile de former la première ligne horizontale du tableau où $p = 1$. Cette première ligne étant écrite, le procédé qui a servi à construire le tableau précédent s'applique encore et permet de continuer ce dernier indéfiniment.

7°. La première ligne du tableau ($p = 1$) servirait de même à former la première ligne du tableau ($p = 2$), que l'on achèverait encore par le même procédé; et ainsi de suite indéfiniment.

Remarque. — Au lieu de faire autant de tableaux qu'il y a de valeurs de p, on pourrait en faire autant qu'il y a de valeurs de j, par des procédés analogues à ceux que nous venons d'indiquer; la difficulté n'est pas plus grande. Les applications qu'on en veut faire règlent elles-mêmes l'argument à choisir. Le tableau $j = 0$ est particulièrement utile.

§ II. — *Généralisation des transcendantes de Bessel.*

1. *Définitions.* — On sait que Bessel a introduit dans la Mécanique céleste la transcendante

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{-i} c^{\frac{ne}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)}\,du,$$

où

$x = c^{u\sqrt{-1}}$,
$c =$ la base des logarithmes népériens,
$e =$ l'excentricité d'une planète,
$n =$ un nombre entier positif ou négatif.

Cette quantité n'est pas autre chose que le coefficient de x^i dans le développement de

$$c^{\frac{ne}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)},$$

suivant les puissances de x. Cauchy a donné des applications nouvelles de cette transcendante, dans les Notes annexées au Mémoire de M. Le Verrier sur les inégalités de Pallas [*], et dans divers autres articles insérés aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* [**]. M. Hansen de Gotha en a fait usage pour le calcul des perturbations absolues des planètes, il en a même completé les tables.

Je vais donner une légère extension à la définition de Bessel, et je formerai une transcendante dont la précédente ne sera qu'un cas particulier. On verra qu'elle fournit une solution simple de questions compliquées.

Désignons par

$$(j, n)_i$$

---

[*] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XX.

[**] Tome XII.

le coefficient de x^i dans le développement de la fonction

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^j c^{\frac{ne}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)}$$

suivant les puissances de x; en d'autres termes, posons

$$(j,n)_i = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{-i}\left(x+\frac{1}{x}\right)^j c^{\frac{ne}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)}\,du,$$

la transcendante de Bessel se déduira de celle-ci en faisant $j=0$.

2. *Propriétés de la transcendante* $(j,n)_i$. — Cette transcendante se lie intimement aux nombres $N_{-i,j,p}$, comme nous allons le faire voir, et ses propriétés découlent immédiatement des propriétés de ces nombres.

Théorème I. — *Le calcul de la transcendante* $(j,n)_i$ *se ramène au calcul de l'exponentielle* $c^{\frac{ne}{2}}$, *au moyen des nombres de Cauchy.*

En effet, nous avons

$$c^{\frac{ne}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)} = \sum_{0}^{\infty}{}_p \frac{\left(\frac{ne}{2}\right)^p}{1.2.3\ldots p}\left(x-\frac{1}{x}\right)^p,$$

donc

$$(j,n)_i = \sum_{0}^{\infty}{}_p \frac{\left(\frac{ne}{2}\right)^p}{1.2.3\ldots p}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{-i}\left(x+\frac{1}{x}\right)^j\left(x-\frac{1}{x}\right)^p du,$$

ou bien

$$(j,n)_i = \sum_{0}^{\infty}{}_p \frac{\left(\frac{ne}{2}\right)^p}{1.2.3\ldots p} N_{-i,j,p}.$$

La transcendante de Bessel en particulier sera donnée par l'équation

$$(o,n)_i = \sum_{o}^{\infty}{}_p \frac{\left(\frac{ne}{2}\right)^p}{1.2.3\ldots p} N_{-i,o,p}.$$

Ces formules montrent, qu'une fois construites les tables des nombres N, le calcul des transcendantes n'est pas plus difficile que celui qui conduit à la détermination de $c^{\frac{ne}{2}}$, seulement la série est moins convergente.

Théorème II. — *La transcendante $(j, n)_i$ peut se calculer au moyen des transcendantes $(j-1, n)_i$, par la formule*

$$(j,n)_i = (j-1,n)_{i-1} + (j-1,n)_{i+1}.$$

C'est une conséquence du théorème IV du § I.

Théorème III. — *Si i change de signe, $(j,n)_i$ garde la même valeur numérique, mais il change de signe si $j-i$ est impair.*

Théorème IV. — *Si n change de signe, $(j,n)_i$ garde la même valeur numérique, mais il change de signe si $j-i$ est impair.*

Théorème V. — *$(j,n)_i$ reste le même quand i et n changent tous deux de signe.*

On trouvera sans peine les démonstrations de ces théorèmes à l'aide des propriétés des nombres N.

Théorème VI. — *On a entre $(1,n)_i$ et $(o,n)_i$ la relation*

$$(1,n)_i = \frac{i}{\left(\frac{ne}{2}\right)}(o,n)_i.$$

On peut déduire cette relation de l'intégration par parties appliquée directement à l'équation qui définit la transcendante; mais on y arrive plus simplement encore au moyen des propriétés des nombres de

Cauchy. On a

$$(1, n)_i = \sum_0^\infty {}_p \frac{\left(\frac{ne}{2}\right)^p}{1 \cdot 2 \ldots p} \mathrm{N}_{-i,1,p}.$$

Or (théorème VI, § I)

$$\mathrm{N}_{-i,1,p} = \frac{i}{p+1} \mathrm{N}_{-i,0,p+1};$$

donc

$$(1, n)_i = \frac{i}{\left(\frac{ne}{2}\right)} \sum_0^\infty {}_p \frac{\left(\frac{ne}{2}\right)^{p+1}}{1.2.3 \ldots p(p+1)} \mathrm{N}_{-i,0,p+1},$$

ou bien

$$(1, n)_i = \frac{i}{\left(\frac{ne}{2}\right)} (0, n)_i.$$

Théorème VII. — *Il existe entre trois transcendantes consécutives, relativement aux valeurs de j, la relation*

$$(j+2, n)_i = \frac{i}{\left(\frac{ne}{2}\right)} (j+1, n)_i - \frac{j+1}{\left(\frac{ne}{2}\right)} [(j, n)_{i-1} - (j, n)_{i+1}].$$

En effet, nous avons

$$\begin{aligned}(j, n)_{i-1} - (j, n)_{i+1} &= \sum_0^\infty {}_p \frac{\left(\frac{ne}{2}\right)^p}{1.2.3 \ldots p} (\mathrm{N}_{-i+1,j,p} - \mathrm{N}_{-i-1,j,p}) \\ &= \sum_0^\infty {}_p \frac{\left(\frac{ne}{2}\right)^p}{1.2.3 \ldots p} \mathrm{N}_{-i,j,p+1}.\end{aligned}$$

Or, en vertu du théorème VI du § I,

$$\mathrm{N}_{-i,j,p+1} = \frac{i}{j+1} \mathrm{N}_{-i,j+1,p} - \frac{p}{j+1} \mathrm{N}_{-i,j+2,p-1};$$

donc

$$(j, n)_{i-1} - (j, n)_{i+1} = \frac{i}{i+1} (j+1, n)_i - \frac{\left(\frac{ne}{2}\right)}{j+1} (j+2, n)_i,$$

ou bien

$$(j+2,n)_i = \frac{i}{\left(\frac{ne}{2}\right)}(j+1,n)_i - \frac{j+1}{\left(\frac{ne}{2}\right)}[(j,n)_{i-1} - (j,n)_{i+1}],$$

C. Q. F. D.

Théorème VIII. — *Une transcendante de Bessel peut se calculer, au moyen des précédentes, par la formule*

$$(0,n)_{i+1} = \frac{i}{\left(\frac{ne}{2}\right)}(0,n)_i - (0,n)_{i-1}.$$

En effet, le théorème II donne

$$(1,n)_i = (0,n)_{i-1} + (0,n)_{i+1};$$

d'autre-part, le théorème VI donne

$$(1,n)_i = \frac{i}{\left(\frac{ne}{2}\right)}(0,n)_i;$$

donc

$$\frac{i}{\left(\frac{ne}{2}\right)}(0,n)_i = (0,n)_{i-1} + (0,n)_{i+1},$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

Remarque. — Les théorèmes qui précèdent font voir que le calcul des transcendantes généralisées se ramène, si l'on veut, à celui des transcendantes de Bessel; ils fournissent d'ailleurs des relations d'identité précieuses pour vérifier leur exactitude.

§ III. — *Applications des nombres de Cauchy et des transcendantes de Bessel au problème de Képler.*

1. Dans une Note présentée à l'Académie [*], j'ai montré avec

[*] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XXXVIII, p. 807.

quelle élégance l'emploi des nombres N résolvait le problème de Képler; je vais résumer ici ce travail, et y ajouter les perfectionnements qui résultent de l'introduction des nouvelles transcendantes.

2. *Développement de l'anomalie excentrique.* — L'anomalie excentrique u est liée à l'anomalie moyenne T par l'équation transcendante

$$\mathrm{T} = u - e\sin u.$$

Il s'agit de trouver u en fonction de T.

On peut développer u suivant les puissances de l'exponentielle imaginaire $c^{\mathrm{T}\sqrt{-1}}$; posons

$$u - \mathrm{T} = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_{i}\, \mathrm{A}_i c^{i\mathrm{T}\sqrt{-1}}.$$

Cauchy a démontré [*] que pour obtenir A_i, coefficient de $c^{i\mathrm{T}\sqrt{-1}}$, il suffit de chercher le coefficient de $x^i = c^{iu\sqrt{-1}}$ dans le développement de la même fonction multipliée par

$$(1 - e\cos u)\, c^{\frac{ie}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)} = \left[1 - \frac{e}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right] c^{\frac{ie}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)},$$

suivant les puissances de x. Appliquons ce théorème, facile d'ailleurs à démontrer, nous aurons

$$\mathrm{A}_i = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{-i} e\sin u \left[1 - \frac{e}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right] c^{\frac{ie}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)} du.$$

En développant, nous trouvons

$$\mathrm{A}_i = \frac{e}{2\sqrt{-1}}\left[(0, i)_{i-1} - (0, i)_{i+1} - \frac{e}{2}(1, i)_{i-1} + \frac{e}{2}(1, i)_{i+1}\right].$$

---

[*] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XII, p. 85.

et si nous invoquons les théorèmes VI et VIII du § I, nous obenons

$$A_i = \frac{e}{2i\sqrt{-1}}(1, i)_i,$$

ou encore

$$A_i = \frac{1}{i\sqrt{-1}}(0, i)_i.$$

Le terme conjugué du développement sera

$$A_{-i} = -\frac{1}{i\sqrt{-1}}(0, i)_i = -A_i,$$

donc la réunion de ces deux termes donnera pour terme général de $u - T$

$$\frac{2}{i}(0, i)_i \sin iT.$$

Si l'on veut se dispenser de l'emploi des transcendantes de Bessel, on introduira leur valeur, et le terme général du même développement deviendra

$$\frac{2}{i}\sin iT \sum_p^{\infty}{}_{0} \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^p}{1.2\ldots p} N_{-i, 0, p}.$$

C'est sous cette forme que nous l'avons présenté autrefois.

3. *Développement du rayon vecteur.* — Le rayon vecteur est donné par la formule

$$r = a(1 - e\cos u);$$

il s'agit de trouver sa valeur en fonction de l'anomalie moyenne T. Posons

$$\frac{r}{a} = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_i B_i c^{iT\sqrt{-1}}$$

il viendra en vertu du théorème de Cauchy

$$B_i = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{-i}\left[1 - \frac{e}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right]^2 c^{\frac{ie}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)} du$$

et en développant

$$B_i = (0, i)_i - e(1, i)_i + \frac{e^2}{4}(2, i)_i.$$

Si maintenant nous invoquons les théorèmes II et VI, nous ramènerons tout aux transcendantes de Bessel, et il viendra simplement

$$B_i = -\frac{e}{2i}[(0, i)_{i-1} - (0, i)_{i+1}].$$

Le terme conjugué B_{-i} est égal à B_i, en réunissant ces deux termes nous avons pour le terme général de $\frac{r}{a}$

$$-\frac{e}{i}[(0, i)_{i-1} - (0, i)_{i+1}] \cos i\mathrm{T}.$$

Si l'on veut se dispenser de l'emploi des transcendantes, on les remplacera par leur valeur en fonction des nombres de Cauchy, et l'on obtiendra pour la formule du terme général de $\frac{r}{a}$ l'expression

$$-\frac{e}{i}\cos i\mathrm{T}\sum_0^\infty{}_p \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^p}{1.2.3\ldots p}[\mathrm{N}_{-i+1,0,p} - \mathrm{N}_{-i-1,0,p}],$$

ou bien encore

$$-\frac{e}{i}\cos i\mathrm{T}\sum_0^\infty{}_p \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^p}{1.2.3\ldots p}\mathrm{N}_{-i,0,p+1}.$$

Quant à B_0, on le déduit directement de la formule primitive qui donne B_i par l'intégrale définie, et l'on trouve sans peine qu'il est égal au terme indépendant de x dans le développement du carré

$$\left[1 - \frac{e}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right]^2,$$

donc

$$B_0 = 1 + \frac{e^2}{2}.$$

4. *Développement du logarithme népérien du rayon vecteur.* — Désignons par B'_i le coefficient de l'exponentielle

$$c^{i\mathrm{T}\sqrt{-1}},$$

dans ce développement, nous aurons

$$B'_i = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c^{-i\mathrm{T}\sqrt{-1}}\, l\frac{r}{a}\,.\,d\mathrm{T};$$

remplaçons $\frac{r}{a}$ par sa valeur en u; intégrons par parties, nous aurons

$$B'_i = \frac{e}{i\sqrt{-1}}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c^{-i\mathrm{T}\sqrt{-1}}\frac{\sin u}{1-e\cos u}\,du;$$

développons $(1-e\cos u)^{-1}$, il viendra

$$\left[1-\frac{e}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]^{-1} = \sum_0^{\infty}{}_j\left(\frac{e}{2}\right)^j\left(x+\frac{1}{x}\right)^j,$$

puis observons que

$$c^{-i\mathrm{T}\sqrt{-1}} = c^{-iu\sqrt{-1}}\quad c^{\frac{ie}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)} = x^{-i}\,c^{\frac{ie}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)},$$

nous aurons

$$B'_i = -\frac{e}{2i}\sum_0^{\infty}{}_j\left(\frac{e}{2}\right)^j.\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{-i}\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)^j c^{\frac{ie}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)}du.$$

A l'aide des transcendantes de Bessel généralisées, cette formule devient simplement

$$B'_i = -\frac{e}{2i}\sum_0^{\infty}{}_j\left(\frac{e}{2}\right)^j[(j,i)_{i-1}-(j,i)_{i+1}];$$

de là nous concluons

$$\mathrm{B}'_{-i} = \frac{e}{2i}\sum_{1}^{\infty}{}_{j}\left(\frac{e}{2}\right)^{j}[(j,i)_{i+1} - (j,i)_{i-1}] = \mathrm{B}'_{i};$$

donc, en réunissant les deux termes conjugués, nous aurons pour le terme général du développement de $l\frac{r}{a}$

$$-\frac{e}{i}\sum_{0}^{\infty}{}_{j}\left(\frac{e}{2}\right)^{j}[(j,i)_{i-1} - (j,i)_{i+1}]\cos i\mathrm{T}.$$

Si l'on veut éviter l'emploi des transcendantes, on substituera leurs valeurs et le terme général prendra la forme

$$-\frac{e}{i}\sum_{0}^{\infty}{}_{j}\sum_{0}^{\infty}{}_{p}\left(\frac{e}{2}\right)^{j}\frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{p}}{1.2\ldots p}\mathrm{N}_{-i,j,p+1}\cos i\mathrm{T}.$$

Pour trouver B'_0, j'observe qu'il est d'abord donné par la formule

$$\mathrm{B}'_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} l(1 - e\cos u).d\mathrm{T}.$$

Prenons u pour variable indépendante, et développons le logarithme en série par la formule

$$l(1 - e\cos u) = -\sum_{1}^{\infty}{}_{j}\frac{1}{j}\left(\frac{e}{2}\right)^{j}\left(x + \frac{1}{x}\right)^{j},$$

nous obtiendrons

$$\mathrm{B}'_0 = -\sum_{1}^{\infty}{}_{j}\frac{1}{j}\left(\frac{e}{2}\right)^{j}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[1 - \frac{e}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right]\left(x + \frac{1}{x}\right)^{j}du,$$

et en introduisant les nombres de Cauchy,

$$\mathrm{B}'_0 = -\sum_{1}^{\infty}{}_{j}\frac{1}{j}\left(\frac{e}{2}\right)^{j}\left[\mathrm{N}_{0,j,0} - \frac{e}{2}\mathrm{N}_{0,j+1,0}\right].$$

5. *Développement de l'équation du centre.* — La recherche du terme général du développement de l'équation du centre est un problème regardé comme difficile. Bessel et Poisson s'en sont occupés; les recherches de Bessel datent de 1816, celles de Poisson se trouvent dans les *Additions à la Connaissance des Temps* pour 1825 et 1826. M. Lefort a résolu complétement le problème dans un Mémoire qui fait partie du t. XI du *Journal de Mathématiques* de M. Liouville. Toutefois la formule de M. Lefort est si longue, qu'il paraît impossible d'en faire usage; nous allons voir que l'introduction des nombres N et des transcendantes $(j, n)_i$ lui donne une forme extrêmement simple.

Désignons par w l'anomalie vraie, l'équation du centre sera $w - \mathrm{T}$; posons

$$w - \mathrm{T} = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_i \, \mathrm{C}_i c^{i\mathrm{T}\sqrt{-1}},$$

il vient

$$\mathrm{C}_i = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c^{-i\mathrm{T}\sqrt{-1}}(w - \mathrm{T})\,d\mathrm{T}.$$

Intégrons par parties, nous trouverons simplement

$$\mathrm{C}_i = \frac{1}{i\sqrt{-1}}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c^{-i\mathrm{T}\sqrt{-1}}\,dw.$$

Introduisons partout l'anomalie excentrique u au moyen de la formule

$$\cos w = \frac{\cos u - e}{1 - e\cos u};$$

il viendra, en posant

$$f = \sqrt{i - e^2}$$

et nommant j un nombre entier,

$$\mathrm{C}_i = \frac{f}{i\sqrt{-1}}\sum_0^{\infty}{}_j \left(\frac{e}{2}\right)^j \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{-i}\left(x + \frac{1}{x}\right)^j c^{\frac{ie}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)}\,du,$$

ou bien

$$\mathrm{C}_i = \frac{f}{i\sqrt{-1}}\sum_0^{\infty}{}_j \left(\frac{e}{2}\right)^j (j, i)_i.$$

Le terme conjugué est

$$C_{-i} = -\frac{f}{i\sqrt{-1}}\sum_{0}^{\infty}{}_j \left(\frac{e}{2}\right)^j (j,i)_i = -C_i;$$

donc le terme général de l'équation du centre qui résulte de l'addition des deux termes conjugués sera

$$\frac{2f}{i}\sin iT\sum_{0}^{\infty}{}_j \left(\frac{e}{2}\right)^j (j,i)_i,$$

expression extrêmement simple si on la compare à celle que M. Lefort a donnée à la page 151 du tome XI.

Si l'on veut éviter l'emploi des transcendantes, on substituera leur valeur en fonction des nombres de Cauchy, et l'on trouvera la formule à somme double

$$\frac{2f}{i}\sin iT\sum_{0}^{\infty}{}_j \sum_{0}^{\infty}{}_p \left(\frac{e}{2}\right)^j \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^p}{1.2.3\ldots p} N_{-i,j,p}.$$

6. *Développement de* $\frac{a}{r}$. — Ce développement se trouve indiqué à la page 30 du Mémoire de M. Hansen sur la détermination des perturbations absolues (traduction de M. Mauvais); on l'effectue encore avec la plus grande facilité au moyen du procédé que nous avons employé pour les fonctions précédentes.

Posons

$$\frac{a}{r} = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_i D_i c^{iT\sqrt{-1}},$$

il viendra

$$D_i = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1 - e\cos u)^{-1} c^{-iT\sqrt{-1}}\,dT,$$

ou bien

$$D_i = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{-i} c^{\frac{ie}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)}\,du;$$

donc

$$D_i = (o, i)_i,$$

et comme

$$D_{-i} = (o, i)_i = D_i,$$

le terme général du développement de $\frac{a}{r}$ qui résulte de la somme des deux termes conjugués

$$D_i c^{iT\sqrt{-1}}, \quad D_{-i} c^{-iT\sqrt{-1}}$$

sera

$$2 \cos iT.(o, i)_i,$$

ou bien

$$2 \cos iT \sum_{o}^{\infty}{}_p \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^p}{1.2.3\ldots p} N_{-i,o,p}.$$

Quant au terme D_0, on trouve qu'il est égal à l'unité. Cela résulte immédiatement de l'intégration qui en donne la valeur.

7. Nous pourrions multiplier encore les applications des transcendantes de Bessel et des nombres N; mais ce que nous venons d'exposer et les Notes de Cauchy (*Comptes rendus de l'Académie*, t. XIII, p. 682 et 850) montrent suffisamment toute leur importance en mécanique céleste. Nous avons pu, à l'aide de ces quantités, simplifier notablement les belles méthodes d'interpolation de Cauchy (*Comptes rendus de l'Académie*, t. XX, p. 769). Nous réservons pour un autre Mémoire l'exposition détaillée de cette nouvelle application.