JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. LEJEUNE-DIRICHLET

Sur la réduction des formes quadratiques positives à trois indéterminées entières

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 4 (1859), p. 209-232.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1859_2_4__209_0>

SUR

LA RÉDUCTION DES FORMES QUADRATIQUES POSITIVES A TROIS INDÉTERMINÉES ENTIÈRES;

PAR M. G. LEJEUNE-DIRICHLET.

LU A L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE BERLIN LE 31 JUILLET 1848.

On sait que Lagrange a le premier montré que chaque forme binaire quadratique peut être *réduite*, c'est-à-dire peut être transformée en une autre forme équivalente dont les coefficients remplissent certaines conditions d'inégalité; et il a en même temps fait voir que dans chaque classe de formes positives il n'y a jamais qu'une seule de ces formes, de manière que pour ce cas les diverses formes réduites qui correspondent à un déterminant donné peuvent servir de représentantes aux diverses classes. Lorsque plus tard, dans les *Disquisitiones arithmeticæ*, les formes ternaires eurent été considérées d'un point de vue général, il devint nécessaire, pour le développement ultérieur de cette théorie, d'étendre aux formes ternaires positives les recherches que Lagrange avait faites sur les formes binaires, c'est-à-dire de trouver entre les coefficients des conditions d'inégalités telles, qu'elles fussent remplies dans chaque classe par une forme, et rien que par une. Cette extension, qui présente de grandes difficultés, a été faite par Seeber, dans un travail spécialement consacré aux formes ternaires positives, travail que Gauss, dans une Note très-intéressante (Journal de Crelle, t. XX, p. 312), caractérise comme il suit : « Nous
» devons rendre pleine justice à l'esprit de profondeur avec lequel ce
» sujet (la résolution du problème de trouver dans chaque classe
» une forme réduite, et la démonstration qu'il ne s'y en trouve qu'une
» seule) a été développé; et si nous devons en même temps regretter
» la longueur de ces recherches, qui découragera peut-être beaucoup
» de lecteurs, puisque la solution du problème occupe 41 pages, et la

» démonstration du théorème 91 pages, nous n'entendons cependant » en aucune manière blâmer cette longueur. Lorsqu'il se présente un » problème ou un théorème difficile à résoudre ou à démontrer, la » première chose à faire, et qui doit toujours être acceptée avec » reconnaissance, c'est avant tout de trouver une solution ou une » démonstration. La question de savoir si cela n'aurait pas pu avoir » lieu d'une manière plus facile et plus simple, demeure une question » oiseuse aussi longtemps que la possibilité n'en est pas en même » temps démontrée par le fait. Il est donc intempestif de s'arrêter ici » à cette question. »

La grande complication de la méthode de Seeber m'a engagé depuis longtemps à essayer d'établir la théorie des formes ternaires réduites d'une manière plus simple. En communiquant aujourd'hui à l'Académie le résultat de mes efforts, je crois, dans l'intérêt de la brièveté, et, si je puis m'exprimer ainsi, de la limpidité de l'exposition, devoir conserver la forme géométrique que j'ai employée dans mes recherches où j'ai pris pour base les rapports remarquables qui ont lieu entre les formes quadratiques à deux ou trois éléments et certaines constructions géométriques à trois dimensions. Je commence par le développement des indications déjà données par Gauss sur ces rapports dans la Note mentionnée plus haut.

§ I.

La forme ternaire

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2a'yz + 2b'xz + 2c'xy = \varphi, \tag{1}$$

dans laquelle nous considérons x, y, z comme premier, deuxième et troisième élément, s'appelle *positive* lorsque φ ne devient jamais négatif pour des valeurs réelles de ces éléments. Dans une pareille forme les coefficients

$$a,\ b,\ c,$$

sont toujours positifs, tandis que les fonctions de coefficients

$$\left\{\begin{array}{c} a'^2 - bc,\quad b'^2 - ac,\quad c'^2 - ab, \\ aa'^2 + bb'^2 + cc'^2 - abc - 2a'b'c' = -\mathrm{D}, \end{array}\right. \tag{2}$$

dont la dernière $-$ D s'appelle le *déterminant de la forme*, sont négatives [*]. En vertu de ces conditions, il y a toujours trois angles aigus ou obtus entièrement déterminés par les équations

$$\cos\lambda = \frac{a'}{\sqrt{bc}}, \quad \cos\mu = \frac{b'}{\sqrt{ac}}, \quad \cos\nu = \frac{c'}{\sqrt{ab}},$$

et avec lesquels on peut former un angle trièdre, puisque la condition nécessaire pour cela

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu - 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu < 1$$

coïncide avec $D > 0$. Mais comme avec les mêmes angles λ, μ, ν on peut former deux angles trièdres symétriques l'un de l'autre, nous conviendrons de choisir toujours celui de ces deux angles trièdres dont les arêtes, respectivement opposées à ces angles, se suivent de droite à gauche par rapport à une droite qui, partant du sommet O, irait en s'élevant dans l'intérieur de l'angle solide. Si nous considérons maintenant les trois arêtes comme les axes positifs d'un système de coordonnées, nous pouvons rapporter tout l'espace infini à notre forme, en regardant les produits $x\sqrt{a}$, $y\sqrt{b}$, $z\sqrt{c}$ comme les coordonnées d'un point quelconque de cet espace, et φ exprime alors le carré de la distance de ce point au sommet, ou encore, plus généralement, le carré de la distance de deux points dont les coordonnées correspondantes ont ces produits pour différences. Si l'on forme maintenant avec trois nouveaux éléments indéterminés, x', y', z', les expressions linéaires

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \alpha x' + \beta y' + \gamma z', \quad y = \alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z', \\ z &= \alpha'' x' + \beta'' y' + \gamma'' z', \end{aligned} \right.$$

avec la seule restriction que le déterminant formé des neuf coefficients $\alpha, \beta, \ldots$, savoir :

$$(4) \qquad \alpha\beta'\gamma'' + \beta\gamma'\alpha'' + \gamma\alpha'\beta'' - \gamma\beta'\alpha'' - \alpha\gamma'\beta'' - \beta\alpha'\gamma'' = \mathrm{E},$$

ne soit pas nul, φ sera transformée en une nouvelle forme φ', par rap-

[*] *Disquisit. arithm.*, art. 271.

port à laquelle toutes les quantités correspondantes seront désignées par les mêmes lettres accentuées. Si l'on fait encore correspondre un espace infini à cette nouvelle forme, deux espaces infinis se trouveront rapportés l'un à l'autre point par point, puisque deux points se correspondent toujours lorsque dans les expressions de leurs coordonnées

$$x\sqrt{a},\quad y\sqrt{b},\quad z\sqrt{c};\quad x'\sqrt{a'},\quad y'\sqrt{b'},\quad z'\sqrt{c'},$$

les éléments x, y, z, x', y', z' se trouvent liés par les équations (3). Lorsque les expressions ci-dessus sont les différences de coordonnées pour deux couples de points correspondants, les mêmes rapports ont évidemment encore lieu entre $x, y, \ldots$; d'où il suit, d'après ce qui précède, et à cause de $\varphi = \varphi'$, que la distance de deux points d'un des espaces est égale à la distance des points correspondants de l'autre.

Les deux espaces comparés point par point l'un à l'autre sont donc égaux ou symétriques, c'est-à-dire qu'on peut, en faisant coïncider les points initiaux O et O′, les mettre dans une position telle, que chaque point tombe ou sur son point correspondant ou sur le point opposé de celui-ci, si nous appelons, pour abréger, *points opposés* deux points du même espace qui se trouvent à égale distance à partir de l'origine et sur des directions opposées. Pour déterminer lequel de ces deux cas a eu lieu, il faut, dans l'un des espaces, tirer à partir du sommet des droites vers trois points quelconques, ensuite examiner si les droites tirées dans l'autre espace à partir de son sommet vers les points correspondants présentent une succession semblable ou inverse. Si l'on prend, par exemple, dans le second espace, les droites tirées aux points ayant pour coordonnées

$$\sqrt{a'},\ 0,\ 0;\quad 0,\ \sqrt{b'},\ 0;\quad 0,\ 0,\ \sqrt{c'};$$

ces lignes, qui tombent sur les axes positifs du second espace, se suivront, d'après la convention ci-dessus, de droite à gauche. Pour les points correspondants dans le premier espace, on a les coordonnées

$$\alpha\sqrt{a'},\ \alpha'\sqrt{a'},\ \alpha''\sqrt{a'};\quad \beta\sqrt{b'},\ \beta'\sqrt{b'},\ \beta''\sqrt{b'};\quad \gamma\sqrt{c'},\ \gamma'\sqrt{c'},\ \gamma''\sqrt{c'}.$$

Pour déterminer si les lignes dirigées vers ces points se suivent de droite à gauche, c'est-à-dire comme les axes du premier espace, ou dans l'ordre inverse, on peut se servir de la proposition connue [*], ou qu'on peut du moins facilement déduire de propriétés connues, d'après laquelle les droites menées aux trois points de coordonnées

$$\xi,\ \eta,\ \zeta;\quad \xi',\ \eta',\ \zeta';\quad \xi'',\ \eta'',\ \zeta'',$$

se suivent ou dans le même ordre que les axes des ξ, η, ζ, ou dans l'ordre contraire, selon que le déterminant formé des neuf coordonnées est positif ou négatif, lorsqu'on y donne au terme $\xi\eta'\zeta''$ le signe positif. Pour notre cas ce déterminant devient $E\sqrt{a'b'c'}$; il y a donc congruence ou symétrie, selon que E est positif ou négatif.

Jusqu'ici les éléments x, y, z avaient des valeurs quelconques. Si maintenant ils ne doivent plus exprimer que des nombres entiers, nous aurons, au lieu de l'espace entier, un système infini de points disposés en forme de parallélipipèdes, c'est-à-dire un système de points formé par les sections de trois systèmes de plans parallèles équidistants.

Si nous supposons encore que les coefficients de substitution $\alpha, \beta, \ldots$ sont aussi des nombres entiers, et que E a la valeur ± 1, il correspondra à chaque combinaison de nombres entiers x, y, z une combinaison de nombres entiers x', y', z', et réciproquement. Les systèmes parallélipipédiques, comparés de cette manière l'un à l'autre, peuvent, d'après ce qui précède, être mis dans une position telle, que l'un coïncide avec l'autre ou avec les points opposés de celui-ci. Ces deux cas ne diffèrent cependant pas l'un de l'autre, puisque les points opposés des points d'un pareil système forment de nouveau le même système. Cela résulte aussi de ce que φ' reste invariable lorsqu'on prend $\alpha, \beta, \ldots$ avec des signes contraires, ce qui change E en $-$E. Les deux systèmes sont donc toujours égaux, et l'on voit que les systèmes correspondants à deux formes ternaires équivalentes φ et φ' répondent à la même figure dans l'espace avec deux dispositions différentes. Réciproquement, à deux dispositions parallélipipédiques différentes quelconques du même système correspondent des formes équivalentes. Car si l'on prend un point quelconque du système pour origine commune, on a entre les coordonnées relatives aux deux systèmes d'axes, et par con-

[*] *Disquisit. gen. cir. superf. cur., auct.* C.-F. Gauss, § I, VII.

séquent aussi entre les éléments qui leur sont proportionnels x, y, z; x', y', z' des équations linéaires sans terme constant, c'est-à-dire des équations de la forme (3), et comme, d'après notre supposition, lorsque x, y, z sont des nombres entiers, x', y', z' doivent l'être aussi, et réciproquement, il suit que α, β,... sont également des nombres entiers, et que $E = \pm 1$. D'un autre côté, pour des valeurs entières correspondantes des éléments, on a $\varphi = \varphi'$, et cette équation a donc aussi identiquement lieu; ce qui était à prouver.

Des relations semblables ont lieu entre une forme binaire positive

$$lx^2 + 2mxy + ny^2$$

et un système de points disposés parallélogrammatiquement. Si l'on prend ici deux axes inclinés l'un sur l'autre d'un angle θ déterminé par l'équation

$$\cos\theta = \frac{m}{\sqrt{ln}},$$

en agissant toujours d'une manière uniforme pour distinguer ces axes et choisissant, par exemple, le second axe à gauche du premier après qu'un côté déterminé du plan a été désigné comme le côté supérieur, et si l'on considère $x\sqrt{l}$, $y\sqrt{n}$ comme des coordonnées, on obtient un système de points entièrement déterminé par la forme quadratique, lesquels points peuvent être considérés comme les intersections de deux systèmes de lignes parallèles équidistantes. S'il existe alors entre deux formes ce qu'on appelle l'équivalence propre, de manière que dans les équations de substitution

$$x = \alpha x' + \beta y', \quad y = \gamma x' + \delta y',$$

$\alpha\delta - \beta\gamma$ soit égal à l'unité positive, les systèmes correspondants pourront, par un mouvement dans le plan, être amenés à coïncider, tandis que dans l'autre cas, où $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$, il faut généralement pour atteindre ce but retourner un des systèmes.

§ II.

Après avoir établi dans ce qui précède la relation qui existe entre les formes quadratiques et certaines constructions géométriques, il reste à développer quelques autres propriétés de ces constructions. Pour abréger, nous appellerons un système de points disposés parallélogrammatiquement ou parallélipipédiquement un système de deuxième ou de troisième ordre, et une suite infinie de points équidistants en ligne droite un système de premier ordre.

Le caractère commun de ces trois sortes de systèmes consiste évidemment en ceci, que lorsque, par un mouvement sans rotation que nous nommerons translation, un de ces systèmes est amené dans une position différente telle, qu'un de ses points arrive à la place occupée auparavant par un autre de ces mêmes points, la même chose a lieu pour tous les points, de manière que le système, dans sa nouvelle position, coïncide complétement avec le système dans sa position initiale. Il est facile de voir que la faculté de translation dont nous venons de parler caractérise complétement les trois sortes de systèmes, et qu'un système doué de ce caractère, lorsqu'il est situé sur une droite et qu'il contient deux points, lorsqu'il est situé dans un plan et qu'il contient trois points non placés sur une droite, ou enfin lorsqu'il contient au moins quatre points non placés dans un plan, sera respectivement un système de premier, de deuxième et de troisième ordre.

Si l'on a, par exemple, un système de points situés tous sur la même droite et que a et a' soient deux points voisins, un glissement qui fera arriver a en a' amènera a' en a'', d'où

$$a'a'' = aa';$$

le point a'', qui est aussi éloigné de a' que a' l'est lui-même de a, appartient donc également au système, et ce système n'a pas de point entre a' et a'', puisqu'un tel point se serait trouvé avant le mouvement entre a et a'. Comme cette considération peut se continuer des deux côtés du point a indéfiniment, la proposition est démontrée.

Soient maintenant dans un système plan, doué de la propriété relative à la translation, a et a' deux points voisins, de manière que sur la droite aa' il ne se trouve entre a et a' aucun point du système. Puisque par la translation de a en a' la droite infinie aa' glisse sur elle-même, il en résulte que tous les points du système sur cette droite forment un système ...$''a\,'aaa'\,a''$... du premier ordre. Comme le système, d'après la supposition, a au moins encore un point en dehors de cette droite, soit b un des points les plus voisins de cette droite. Si maintenant on effectue une translation par laquelle a arrive en b, le système de premier ordre prendra la nouvelle position $\ldots{}''b\,'bbb'\,b''\ldots$, et appartiendra dans celle-ci au système primitif; il est clair en même temps qu'aucun point du système ne peut se trouver ni entre les points $\ldots{}''b, {}'b, b, b', b'', \ldots$ ni entre les droites $\ldots{}'bbb'\ldots$, $\ldots{}'aaa'\ldots$.

Si l'on continue à raisonner ainsi, on voit que tout le système peut être disposé parallélogrammatiquement et qu'on peut choisir $aa'b'b$ pour parallélogramme fondamental de ce système. Nous ajouterons encore que par la construction indiquée on pourra évidemment obtenir tous les arrangements parallélogrammatiques dont le système est susceptible. Cela résulte de ce que le choix de a', sauf la restriction évidemment nécessaire qu'il ne se trouve pas de point entre a et a', est arbitraire, et qu'ensuite b peut être pris arbitrairement dans la ligne parallèle la plus proche.

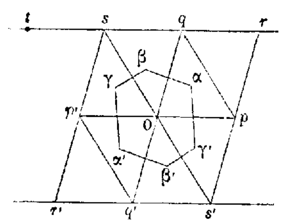
Si l'on a enfin un système doué de la faculté de translation et contenant au moins quatre points non situés dans le même plan, faisons passer un plan par trois points quelconques de ce système non situés en ligne droite. Comme par chaque translation effectuée parallèlement à ce plan celui-ci glisse sur lui-même, les points qui y sont situés forment, d'après ce qui précède, un système de second ordre. Après avoir partagé ce système parallélogrammatiquement d'une manière quelconque, prenons un des autres points du système de troisième ordre les plus rapprochés du plan, et faisons subir au système un déplacement tel, qu'un point quelconque du plan arrive au point déjà choisi en dehors de ce plan. Par la répétition de ce mouvement et du mouvement en sens contraire, on obtient évidemment une disposition parallélipipédique du système donné, et en même temps il est clair que la construction indiquée a la généralité nécessaire, puisque le choix du premier plan, la disposition du système de deuxième ordre dans ce plan, et enfin le choix du point dans le plan immédiatement voisin sont arbitraires.

Nous montrerons encore, pour finir ce paragraphe, que de quelque manière qu'on partage le même système de deuxième ou de troisième ordre, le parallélogramme ou le parallélipipède servant de base à chaque division conservent toujours la même aire ou le même volume, ce qui est l'interprétation géométrique de cette proposition, que des formes équivalentes ont des déterminants égaux. En effet, si l'on imagine dans le plan d'un système de deuxième ordre une ligne fermée, par exemple une circonférence de cercle, qu'on désigne par z la surface qu'elle renferme et par s le nombre des points dans l'intérieur de la ligne, en remarquant qu'il est indifférent de compter ou non les points qui se trouvent sur la circonférence, le quotient $\frac{z}{s}$, pour des valeurs croissantes du rayon, aura évidemment pour limite l'aire d'un parallélogramme fondamental, d'où ressort la proposition pour les systèmes de deuxième ordre, puisque s et z sont indépendants du mode d'arrangement du système. L'exactitude de la proposition pour des systèmes du troisième ordre se démontre tout à fait de la même manière.

§ III.

Nous allons maintenant faire voir qu'un système de deuxième ordre peut toujours se diviser en prenant pour base un parallélogramme dont les côtés ne sont pas plus grands que ses diagonales.

1. Soit o un point quelconque du système. Les autres points sont



toujours situés par couples à égale distance de o et sur des directions opposées. Soit maintenant p un des points du couple pour lequel la distance à o est plus petite que pour tout autre couple. Si cette plus courte distance est la même pour plusieurs couples, on peut choisir p arbitrairement dans l'un de ces couples. Le système donné consiste en un nombre infini de systèmes de premier ordre égaux et équidistants entre eux, et dont fait partie celui auquel o et p appartiennent. Dans l'un des deux systèmes qui avoisinent celui-ci, prenons le point q qui est le plus rapproché de o, ou, si la plus courte distance est la même pour deux points, prenons arbitrairement l'un quelconque d'entre eux. Le parallélogramme $poqr$ ainsi obtenu jouit des propriétés demandées, puisque, d'après la construction,

$$op \lesseqgtr oq, \quad oq \lesseqgtr or, \quad oq \lesseqgtr os = pq.$$

Nous appellerons dorénavant parallélogramme réduit un parallélogramme fondamental qui remplit ces conditions.

2. Nous avons maintenant à établir les relations entre un pareil parallélogramme et le système plan auquel il appartient. Si $poqr$ est un parallélogramme réduit, nous pouvons, sans nuire à la généralité, supposer que l'angle poq n'est pas obtus, puisque, dans le cas contraire, l'angle en o pour le parallélogramme adjacent et appartenant au même arrangement est aigu, et de même nous pouvons supposer $op \leqq oq$. Alors il est évident que $or > oq$, et nous n'avons plus à considérer que la condition $pq \geqq oq$. Cela posé, en faisant, pour abréger,

$$op = \sqrt{l}, \quad oq = \sqrt{n},$$

de manière, par conséquent, que $l \leqq n$, la relation de notre parallélogramme avec l'ensemble du système de points pourra s'exprimer en disant que le minimum de la distance d'un point quelconque du système au point o est égal à $\sqrt{l}$, et que, après qu'on a choisi un point à cette distance, alors, en considérant toutes les autres directions, c'est-à-dire en excluant la droite menée de o à ce point, le second minimum est égal $\sqrt{n}$. Ce que nous venons de dire est vrai d'une manière tout à fait générale. Ce que nous allons maintenant ajouter, savoir que le premier minimum n'a lieu que pour le point p (de deux points opposés nous n'en mentionnons jamais qu'un) et le second minimum que pour le point q, est soumis aux exceptions suivantes :

1°. Si

$$op < oq, \quad oq = pq = os,$$

le premier minimum n'a lieu que pour p, le second que pour q ou s.

2°. Si

$$op = oq, \quad oq < pq = os,$$

les minima sont égaux et l'on peut échanger entre eux p et q.

3°. Enfin si

$$op = oq = pq = os,$$

on peut choisir l'un des points p, q, s comme premier point, et ensuite prendre l'un des autres comme second point.

Pour prouver ce que nous avançons, il suffit évidemment, puisque des points opposés sont toujours à égale distance de o, de faire voir que q est situé plus près de o, 1° que tous les autres points situés sur la droite sqr, à l'exception du point s dont la distance au point o est par supposition $= os = pq \geqq oq$, et 2° que tous les points des lignes parallèles suivantes.

Puisque l'on a

$$pq \geqq op, \quad pq \geqq oq,$$

et que l'angle poq n'est pas obtus, il en résulte que le triangle opq, et par conséquent aussi le triangle oqs qui lui est égal, n'ont pas d'angle obtus. La perpendiculaire abaissée de p sur qs tombe donc entre s et q (inclusivement), ce qui prouve le premier point.

Si l'on pose

$$\cos poq = \frac{m}{\sqrt{ln}},$$

où par conséquent m n'est pas négatif, on a

$$\overline{pq}^2 = l - 2m + n \geqq \overline{oq}^2 = n,$$

et, par conséquent,

$$2m \leqq l, \quad 2m \leqq n, \quad 4m^2 \leqq ln.$$

Si l'on fait encore le carré de la hauteur de notre parallélogramme $= k$ ($op = \sqrt{l}$ étant considéré comme base), on obtient, pour le carré Δ de son aire,

$$\Delta = lk = ln - m^2 \geqq \frac{3}{4} ln,$$

et, par conséquent,

$$\sqrt{k} \geqq \frac{1}{2} \sqrt{3n}.$$

D'après cela, la seconde ligne parallèle est déjà éloignée d'au moins

$$\sqrt{3n} = \overline{oq}.\sqrt{3},$$

et ainsi se trouve également prouvé le deuxième point.

3. Comme les minima successifs $\sqrt{l}$, $\sqrt{n}$ se trouvent déterminés par le système même et indépendamment de tout arrangement déterminé de ce système, et que, d'autre part, ainsi que nous venons de le voir, ils coïncident quant à la grandeur avec les côtés du parallélogramme réduit, on voit que, lorsque le système permet divers arrangements de cette sorte, les côtés des parallélogrammes réduits conserveront toujours les valeurs $\sqrt{l}$ et $\sqrt{n}$. On obtiendra donc nécessairement tous les parallélogrammes fondamentaux possibles, en menant à partir de o des lignes vers tous les points les plus rapprochés (toujours à l'exclusion des points opposés), et prenant ensuite sur une des lignes parallèles les plus voisines dans chaque cas le point ou les deux points les plus voisins; et comme, d'après ce qui vient d'être démontré (nº **2**), ce point ou ces deux points les plus voisins sont situés plus près de o que tous les points des lignes parallèles suivantes, on peut faire abstraction de la condition qui veut que les seconds points soient pris sur la première ligne parallèle. On obtiendra donc tous les arrangements possibles du système en combinant o successivement avec tous les couples de points pour lesquels les minima successifs ont lieu, d'où il résulte de suite, en se reportant au nº **2**, que dans le cas général et dans le deuxième des cas mentionnés ci-dessus, il n'existe qu'un de ces arrangements, tandis que dans le premier et dans le troisième cas exceptionnel il y a respectivement deux et trois arrangements du système.

Dans notre notation actuelle, les cas singuliers que nous venons de mentionner correspondent aux suppositions

$$2m = l < n, \quad 2m < l = n, \quad 2m = l = n.$$

§ IV.

Nous n'avons traité jusqu'ici que des propriétés des figures géométriques qui peuvent être considérées comme la représentation graphique de propositions connues de la théorie des formes, et qui ont déjà été indiquées dans le Mémoire mentionné dans l'Introduction. Il y a maintenant encore un problème d'un autre genre à résoudre, problème qui consiste, étant donné un système de deuxième ordre et dans ce système un point déterminé o, à trouver la partie du plan dans l'intérieur de laquelle chaque point est plus près du point o que de tout autre point du système. Comme la condition qu'un point ne soit pas plus éloigné de o que d'un autre point v consiste en ce que ce point se trouve avec o du même côté de la perpendiculaire élevée sur le milieu de ov, nous aurons donc à combiner o avec tous les autres points du système et à construire le polygone convexe formé par toutes les perpendiculaires correspondantes. Mais, parmi ces perpendiculaires en nombre infini, on n'en a à considérer qu'un nombre limité, puisque les autres ne rencontrent pas le polygone déterminé par celles-ci. Nous conservons toutes les suppositions précédentes, de telle sorte que, dans le parallélogramme réduit poq, on a

$$op \leqq oq,$$

l'angle poq n'est pas obtus et opq, oqp sont aigus. Cela posé, on prouve facilement qu'on n'a à considérer que les six sommets p, q, s, p', q', s' des quatre parallélogrammes qui se touchent en o, et que les perpendiculaires elles-mêmes correspondantes à s et s' ne font que raser la figure à former, dans le cas particulier où poq est un angle droit; mais, dans ce cas, la même chose a lieu pour les perpendiculaires correspondantes à r et r'. Si l'on mène les droites pq, os, $p'q'$, os', on obtient les six triangles égaux

$$poq,\quad qos,\quad sop',\quad p'oq',\quad q'os',\quad s'op.$$

En ne considérant que les points p, q, s, p', q', s', on a à élever des perpendiculaires aux milieux des droites allant de ces points à o, c'est-à-dire à faire la même construction que si l'on voulait trouver pour les triangles en question les centres des cercles circonscrits. Comme dans ces triangles il ne se trouve pas d'angles obtus, deux perpendiculaires consécutives ne se couperont pas en dehors du triangle correspondant. On obtient ainsi l'hexagone $\alpha\beta\gamma\alpha'\beta'\gamma'$ ayant pour centre o

et dont les angles et les côtés opposés sont égaux, pour l'espace dans l'intérieur duquel chaque point est moins éloigné de o que de l'un des points p, q, s, p', q', s', et l'on se convainc facilement que, à l'exception de r et r', les perpendiculaires correspondantes aux autres points n'atteignent pas notre hexagone. On peut, pour cette démonstration, se borner, à cause de la symétrie, aux points situés au dedans et au-dessus de pop'. Pour les points situés au dedans de pop', cela est évident; pour les autres, cela résulte de ce que leur distance à o est plus grande que le diamètre du cercle circonscrit à l'hexagone. Si l'on appelle ρ le carré de son rayon, on aura

$$4\rho = \frac{ln(l-2m+n)}{\Delta},$$

d'où, à cause de

$$2m \leqq l, \quad 2m \leqq n, \quad \Delta \geqq \frac{3}{4} ln,$$

il suit

$$4\rho \leqq \frac{4}{3}(l-2m+n) \leqq \frac{8}{3} n.$$

Maintenant comme pour les points de la deuxième ligne parallèle et des suivantes, ainsi que nous l'avons déjà remarqué, le carré de leur distance à o est au moins égal à $3n$, il ne reste plus qu'à considérer les points situés sur $tsqr$, à l'exception de s, q, r. Mais de tous ceux-ci aucun n'est plus près de o que t, pour lequel le carré de la distance $= 4l - 4m + n > 4\rho$, ainsi qu'on le voit de suite en multipliant par Δ et en ayant égard ensuite à ce que $2m \leqq l \leqq n$. Quant au point r, on se convainc de la même manière que le carré de sa distance à o, c'est-à-dire $l + 2m + n$ est $> 4\rho$, en exceptant le seul cas de $m = 0$, dans lequel la perpendiculaire correspondante rase la figure. Il est donc démontré que chaque point dans l'intérieur de l'hexagone $\alpha\beta\gamma\alpha'\beta'\gamma'$ est plus près du point o que d'aucun autre point du système, et qu'il n'y a que ces points intérieurs qui soient dans ce cas. De chaque côté, la distance à o devient égale à la distance à un deuxième point, qui est, par exemple pour $\alpha\beta$, le point q, et chaque sommet de la figure est à égale distance de o et de deux autres points du système. Ce dernier énoncé ne subit de modification que dans le cas particulier où l'angle poq est droit; alors β et γ, β' et γ' coïncident et l'hexagone devient un rectangle dont les sommets sont également éloignés de o et de trois autres points du système.

Il va sans dire qu'on obtiendra toujours le même hexagone quel que soit celui des parallélogrammes réduits qu'on prenne pour base de la construction dans les cas singuliers où il en existe plus d'un; de même il est clair que les hexagones ou les quadrilatères correspondants à tous les points du système sont égaux et couvrent tout le plan de ce système.

Nous remarquerons encore, comme il est facile de s'en convaincre, que l'expression $\rho = \frac{ln(l - 2m + n)}{4(ln - m^2)}$ va en décroissant, lorsque, l et n étant supposés constants, on y fait croître m de zéro jusqu'à sa limite $\frac{1}{2}l$, de manière que l'on a, par conséquent,

$$(1) \qquad \rho \leqq \frac{1}{4}(l + n) \leqq \frac{1}{2}n.$$

On a encore l'inégalité suivante

$$(2) \qquad 2\Delta(n - \rho) \geqq ln^2,$$

dont l'exactitude devient manifeste lorsque après avoir multiplié par 2, on transporte tous les termes dans le même membre, et qu'on y fait ensuite

$$\Delta = ln - m^2, \quad 4\Delta\rho = ln(l - 2m + n),$$

ce qui la change en

$$ln(l - 2m) + 2mn(n - l) \geqq 0.$$

§ V.

Nous arrivons maintenant à notre objet principal, et nous avons à montrer que chaque système du troisième ordre peut avoir pour base un parallélipipède dont les faces sont des parallélogrammes réduits et dont les arêtes, qui sont toujours égales quatre à quatre, ne surpassent pas ses diagonales. Après avoir fixé un point quelconque (o) du système, choisissons un point (1) dans le couple de points opposés pour lesquels la distance à (o) est un minimum, ou, si le minimum de distance a lieu pour plusieurs couples, choisissons-le dans un quelconque de ces couples. Parmi tous les points en dehors de la droite (o1) choisissons encore un des deux plus voisins (2), en remarquant que le choix est encore arbitraire entre des couples pour lesquels la plus courte distance est la même. Comme dans tout le système, à l'exception des points de la droite (o1), aucun point n'est situé plus près de (o) que (2), la même chose a aussi lieu pour le plan (1o2), et pour le système contenu dans ce plan, (1o2) est un parallélogramme réduit (§ III, n° 3). Si l'on prend maintenant dans l'un des deux plans parallèles les plus voisins le point le plus rapproché de (o) ou l'un des plus rapprochés lorsque le minimum a lieu pour plus d'un point, et qu'on joigne (o) avec le point choisi (3), le parallélipipède construit sur les arêtes (o1), (o2), (o3) satisfera à la condition voulue, ainsi qu'il est facile de le voir. D'abord il résulte de la construction que l'on a

$$(o1) \leqq (o2) \leqq (o3).$$

Comme il est déjà prouvé pour les bases du parallélipipède (nous nommerons toujours ainsi les faces opposées dans lesquelles se trouvent les deux arêtes qui ne surpassent pas la troisième en grandeur, et nous appliquerons le nom de *faces latérales* aux quatre autres) qu'elles sont réduites, il ne nous reste plus qu'à montrer, au moyen de la double inégalité ci-dessus, que les quatre diagonales des faces latérales, ainsi que les quatre diagonales du solide, ne sont pas plus petites que (o3). Mais ces huit diagonales, comme on le voit de suite, sont égales en grandeur aux huit lignes de jonction qui peuvent être menées de (o) aux huit points situés dans le plan de la base supérieure autour de (3), en désignant ainsi, pour plus de commodité, les huit sommets des quatre parallélogrammes qui se touchent en (3). Or il résulte de la condition d'après laquelle (3) a été choisi, qu'aucune de ces lignes de jonction n'est plus petite que (o3).

Après nous être convaincu qu'un système du troisième ordre peut toujours être divisé suivant un parallélipipède réduit, nous avons maintenant à établir les relations entre un tel parallélipipède et le système, et en particulier à comparer entre elles les distances des points du système à (o). Nous poserons

$$(o1) = \sqrt{a}, \quad (o2) = \sqrt{b}, \quad (o3) = \sqrt{c},$$

et nous conserverons toujours la supposition $a \leqq b \leqq c$.

1°. Dans le plan de la base les relations discutées plus haut (§ III, n° 2) ont lieu de telle manière, que les minima successifs de la distance sont toujours ici, par ordre de grandeur, $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$. Dans les cas singuliers mentionnés au même endroit, le choix des points est alors arbitraire.

2°. Considérons maintenant les points en dehors du plan de la base inférieure, et d'abord ceux qui sont situés dans le plan de la base supérieure. Comme, d'après la supposition que notre parallélipipède est un parallélipipède réduit, la ligne (o3) n'est pas plus grande qu'une des droites menées de (o) aux huit points situés autour de (3), alors le pied de la perpendiculaire abaissée de (o) sur le plan de la base supérieure ne sera pas plus éloigné de (3) que de l'un des huit points en question. Ce pied, par conséquent, ne tombe pas en dehors de l'hexagone ou du rectangle appartenant à (3) et construit dans le paragraphe précédent. Il peut arriver que de ces huit points, par exception, l'un soit situé aussi près du pied de la perpendiculaire que le point (3) lorsque ce pied tombe sur un côté, ou que cela arrive pour deux (ou pour trois quand le polygone devient un rectangle) quand le pied coïncide avec un sommet, tandis que tous les autres points du plan en sont plus éloignés. Il s'ensuit que la plus courte distance de (o) à un point de la base supérieure est $\sqrt{c}$, qu'elle n'a cette valeur en général que pour (3), mais qu'elle peut, par exception, avoir encore cette même valeur pour un, deux et même trois autres points.

3°. Pour l'examen des plans parallèles suivants, nous avons à déterminer une limite pour le carré h de la perpendiculaire déjà mentionnée. Comme le pied de cette perpendiculaire ne tombe pas en dehors de l'hexagone appartenant à (3), l'on a

$$h \geqq c - \rho,$$

ρ indiquant le carré du rayon du cercle circonscrit. Mais, d'après le § IV, on a aussi

$$\rho \leqq \frac{1}{2} b \leqq \frac{1}{2} c, \quad \text{donc} \quad h \geqq \frac{1}{2} c.$$

Comme, par conséquent, le deuxième plan parallèle est déjà éloigné d'au moins $\sqrt{2c}$, il ne se trouve au-dessus de la base supérieure que des points dont la distance à (o) est plus grande que $\sqrt{c}$.

Si l'on récapitule ce que nous avons dit, on verra que le minimum de la distance a la valeur $\sqrt{a}$ pour tout le système, qu'après qu'un point a été choisi à cette distance, le minimum dans les autres directions est de $\sqrt{b}$, et qu'enfin, après que le deuxième point a aussi été fixé, la plus petite distance de (o) pour tous les points en dehors du plan déterminé par o et les deux premiers points se réduit à $\sqrt{c}$. Mais bien que les minima successifs $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ soient toujours entièrement déterminés quant à leur grandeur, cette détermination, quant à leur situation, présente quelques exceptions faciles à énumérer. Si par exemple $a \leqq b$, $b < c$, il faudra choisir les deux premiers points sur la base inférieure, et les cas singuliers mentionnés (§ III, n° **2**) peuvent alors avoir lieu, tandis que le troisième point est situé sur la base supérieure, où il a en général une position déterminée, mais où il peut cependant, dans des cas singuliers, occuper deux, trois ou quatre positions différentes. On voit avec la même facilité quelles sont les diverses circonstances qui peuvent avoir lieu dans les autres cas où l'on a

$$a < b = c, \quad \text{ou bien} \quad a = b = c.$$

Puisque de la supposition d'un parallélipipède réduit ayant pour arêtes $\sqrt{a} \leqq \sqrt{b} \leqq \sqrt{c}$, il est résulté que les longueurs de ces arêtes se sont trouvées être les minima successifs du système, il s'ensuit immédiatement que s'il existe plusieurs parallélipipèdes réduits suivant lesquels le système puisse être ordonné, ils s'accorderont tous quant à la longueur des arêtes, et il est facile de montrer que trois lignes ayant pour longueurs $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, et dirigées de (o) vers des points du système, pourvu qu'elles ne soient pas situées dans un même plan, sont toujours les arêtes d'un parallélipipède réduit. Il suffit, pour cela, des simples considérations déjà employées dans un cas semblable (§ III, n° 3). Comme d'après cela on obtient tous les parallélipipèdes réduits du système en construisant les minima successifs de toutes les manières possibles, il est clair que lorsque cela ne peut avoir lieu que d'une seule manière (et nous y comprenons le cas où deux des trois quantités $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, ou même toutes les trois étant égales entre elles, les trois lignes sont complétement déterminées de position, et qu'il ne peut y avoir qu'un échange entre deux d'entre elles ou entre toutes les trois), le système de troisième ordre n'admet qu'un seul arrangement suivant un parallélipipède réduit. Dans tous les autres cas, il y a plusieurs de ces arrangements qui ont pour bases des parallélipipèdes qui sont ou tous différents les uns des autres, ou qui peuvent être en partie ou même tous ensemble égaux les uns aux autres (c'est ainsi que, dans les deux cas singuliers d'un système de deuxième ordre dont il a été question plus haut, les parallélogrammes réduits servant de bases aux deux ou trois arrangements différents étaient égaux entre eux).

Pour décider la question de savoir si un système du troisième ordre n'admet qu'un seul arrangement suivant un parallélipipède réduit, ou en admet plus d'un, il suffira par conséquent de connaître un seul arrangement du système, et le premier cas aura toujours lieu (et n'aura jamais lieu autrement), lorsque le parallélipipède réduit, donné par cet arrangement, est de telle nature, que toutes les lignes qui ne sont pas surpassées par d'autres surpassent réellement celles-ci, c'est-à-dire lorsque toutes les diagonales des faces sont plus grandes que les côtés de ces faces, et que de même toutes les diagonales du parallélipipède sont plus grandes que les arêtes de ce solide.

§ VI.

En appliquant maintenant aux formes ternaires les résultats du paragraphe précédent, nous supposerons, pour l'uniformité et pour éviter des distinctions inutiles, qu'on a donné à chaque forme ternaire

$$(1) \qquad ax^2 + by^2 + cz^2 + 2a'yz + 2b'xz + 2c'xy,$$

par une permutation ou par un changement de signe des éléments indéterminés tels, que la forme ne cesse pas d'appartenir à la même classe, une expression telle, que l'on ait, en premier lieu, $a \leq b \leq c$; en second lieu, qu'aucun des coefficients a', b', c', s'ils ne sont pas tous les trois différents de zéro et négatifs, n'ait le signe négatif, et qu'enfin, en troisième lieu, quand on a $b = c$, alors c', abstraction faite du signe, ne soit pas plus grand que b'; que quand $a = b$, b' ne soit pas plus grand que a'; et enfin quand $a = b = c$, c' ne soit pas plus grand que b', ni b' plus grand que a'. Comme il est facile de le voir, on ne peut jamais satisfaire à ces conditions que d'une seule manière, et leur introduction procure l'avantage que, comme à chaque forme ternaire répond déjà, sans ces conditions, un parallélipipède entièrement déterminé, maintenant aussi à chaque parallélipipède répond une expression analytique dont les coefficients sont aussi entièrement déterminés quant à leur succession et à leurs signes. Cela posé, nous appellerons la forme (1), dans laquelle on a, par conséquent, $a \leqq b \leqq c$, une forme réduite, lorsqu'elle correspond à un parallélipipède réduit. Comme les diagonales des faces ne doivent pas être plus petites que les côtés, on a

$$a \pm 2c' + b \geqq b, \quad a \pm 2b' + c \geqq c, \quad b \pm 2a' + c \geqq c.$$

Si l'on pose $\sigma = -1$, lorsque a', b', c' sont tous les trois négatifs, et $\sigma = 1$ dans les autres cas, alors ces conditions sont équivalentes à

$$(2) \qquad a \geqq 2c'\sigma, \quad a \geqq 2b'\sigma, \quad b \geqq 2a'\sigma;$$

et dans le cas seulement où le signe d'égalité a lieu, l'une des diagonales sera égale à l'un des côtés dans le parallélogramme correspondant. Les conditions relatives aux diagonales du parallélipipède donnent

$$a + b + c + 2a'\varepsilon + 2b'\delta + 2c'\delta\varepsilon \geqq c,$$

les signes de $\delta = \pm 1$, $\varepsilon = \pm 1$ étant arbitraires. Si l'on examine d'abord le cas où aucun des coefficients a', b', c' n'est négatif, et que l'on prenne en considération les quatre combinaisons de signes, et la circonstance que, quand $a = b$, on a

$$b' \leqq a',$$

on voit de suite que notre inégalité est toujours satisfaite d'elle-même en vertu des conditions déjà obtenues, et que le cas limite du signe d'égalité où la diagonale devient égale à l'arête $\sqrt{c}$, ne peut se présenter qu'une fois, et seulement quand l'une des grandeurs b', c' est zéro, et qu'en même temps la condition (2) qui correspond à l'autre, et celle qui correspond à a', présentent aussi le cas limite de l'égalité. Si a', b', c' sont négatifs, notre inégalité est toujours satisfaite, et l'est de telle sorte, que le cas limite ne peut pas avoir lieu, si ce n'est quand $\delta = \varepsilon = 1$, de manière qu'il faut établir la nouvelle condition

$$(3) \qquad a + b + 2a' + 2b' + 2c' \geqq 0,$$

où le signe inférieur se rapporte de nouveau au cas où une diagonale devient égale à l'arête $\sqrt{c}$.

Lorsque les conditions (2) que nous venons de développer, et de plus la condition (3) lorsque a', b', c' sont négatifs, sont remplies de telle façon, que dans aucune des inégalités le cas limite de l'égalité ne se rencontre, il n'existera, dans la classe à laquelle appartient la forme, aucune autre forme différente de celle-ci avec ou sans signe d'égalité dans les conditions de définition, puisque, d'après ce que nous avons fait remarquer à la fin du paragraphe précédent, le système de points correspondant ne peut se partager que suivant un seul parallélipipède réduit. Il en est autrement lorsque les signes supérieurs ne se rencontrent pas dans toutes les conditions; il peut alors se trouver dans la même classe plusieurs formes réduites susceptibles de se déduire d'une forme donnée. Il suffira de montrer cette assertion pour un cas principal. Nous choisirons, à cet effet, le cas où $b < c$.

Si l'on suppose d'abord $a > 2c'\sigma$, on ne pourra changer que la direction de l'arête $\sqrt{c}$, et cela dans le cas où il se trouve encore dans le plan de la base supérieure un ou plusieurs points dont la distance au sommet est $\sqrt{c}$. Soient ξ, η, 1 les valeurs des éléments correspondantes à un tel point; alors, si la troisième arête est dirigée vers ce point, tous les coefficients, excepté a', b', resteront invariables, et a', b' se changeront respectivement en

$$a' + c'\xi + b\eta, \quad b' + a\xi + c'\eta,$$

comme il est facile de s'en assurer presque sans calcul. Mais, d'après l'énumération faite précédemment, les valeurs de ξ, η qui remplissent la condition sont

$$\xi = -\sigma, \quad \eta = 0,$$

lorsqu'on a

$$a = 2b'\sigma.$$

Lorsque

$$b = 2a'\sigma,$$

on a

$$\xi = 0, \quad \eta = -\sigma.$$

Lorsqu'on a simultanément

$$a = 2b', \quad b = 2a', \quad c' = 0,$$

alors

$$\xi = -1, \quad \eta = -1,$$

et lorsqu'enfin a', b', c' sont négatifs et qu'ils remplissent la condition

$$a + b + 2a' + 2b' + 2c' = 0,$$

il faut poser

$$\xi = 1 \quad \text{et} \quad \eta = 1.$$

Dans ces quatre suppositions, il faut donc changer respectivement

$$\begin{array}{rcl} a';\ b' & \text{en} & a' - c'\sigma,\ b' - a'\sigma,\ (= -b'); \\ -a' & \text{en} & b' - c'\sigma; \\ -a' & \text{en} & -b'; \\ a' + b + c' & \text{en} & a + b' + c'. \end{array}$$

On peut faire abstraction du troisième cas, et en général de la supposition $c' = 0$, puisqu'à cette supposition correspond une nouvelle forme qui, après qu'on y a opéré les changements de signes prescrits au commencement du présent paragraphe, devient évidemment identique avec la forme d'où l'on est parti. Dans chacune des trois autres suppositions on obtient, après avoir fait les changements de signes nécessaires, une nouvelle forme réduite appartenant à la même classe (si elle ne coïncide pas avec la forme originaire), et l'on obtient deux formes pareilles lorsque deux de nos suppositions sont réalisées en même temps. Ici se termine l'énumération des formes, puisque évidemment la simultanéité des trois suppositions ne saurait avoir lieu. Si (toujours dans la supposition de $b < c$), on avait eu $a = 2c'\sigma$, il aurait fallu, dans le cas de $a < b$, faire tourner la deuxième arête dans le plan de la base; pour $a = b$, il eût fallu faire aussi prendre à la première arête la position primitive de la seconde, et comparer cette nouvelle ou ces deux nouvelles positions des deux premières arêtes avec toutes les directions de la troisième, sans excepter la direction primitive.

On peut facilement remédier à l'inconvénient résultant de ce que plusieurs formes réduites peuvent, dans des cas singuliers, se trouver dans la même classe et écarter ces exceptions, en admettant, pour ces cas singuliers, dans la définition générale certaines conditions secondaires que l'on découvre sans peine, en exigeant, par exemple, que le dernier coefficient c', dans le cas où il n'est pas entièrement déterminé, reçoive la valeur numérique la plus petite dont il soit susceptible dans les formes réduites de cette classe, et en agissant ensuite de la même manière par rapport à b'. Pour en donner un exemple, nous examinerons parmi les cas singuliers traités précédemment, celui où, en supposant $b = c$, aucune des trois conditions (2) n'a lieu avec le signe inférieur, et où, par contre, les trois valeurs négatives a', b', c' satisfont à l'équation

$$a + b + 2a' + 2b' + 2c' = 0.$$

D'après la remarque précédente, c' est déterminé, et il n'existe pour ce cas que deux formes réduites. Si a' et b' sont les valeurs du quatrième et du cinquième coefficient dans l'une de ces formes, elles seront dans l'autre $a' + b + c'$, $a + b' + c'$, ou plutôt, comme ces dernières valeurs sont évidemment positives, mais que c' est négatif, et que par conséquent, pour avoir des signes satisfaisant aux règles prescrites, il faut changer z en $-z$, elles seront $-(a' + b + c')$, $-(a + b' + c')$; et ces valeurs, comme le veut la nature de la question, étant substituées à la place de a', b', satisfont à leur tour à l'équation

$$a + b + 2a' + 2b' + 2c' = 0;$$

ensuite les valeurs a', b' se déduisent des valeurs en question, de la même manière que celles-ci se déduisent elles-mêmes de a', b'. Comme d'après cela le cinquième coefficient n'admet que les deux valeurs négatives b' et $-(a + b' + c')$, dont la somme $= -a - c'$, on voit que si aux conditions de définition on ajoute encore la condition

$$-b' \leqq \frac{1}{2}(a + c'),$$

la classe ne contiendra qu'une seule forme réduite.

En terminant ce Mémoire, nous déduirons encore de nos principes une belle proposition, que Seeber a trouvée par induction, et que Gauss a démontrée dans la Note dont il a déjà été question plusieurs fois. D'après cette proposition, le produit des trois premiers coefficients, dans une forme réduite, n'est pas plus grand que deux fois la valeur absolue du déterminant.

Comme la valeur absolue du déterminant est égale au carré du volume du parallélipipède correspondant à la forme, nous avons donc, en conservant la notation dont nous nous sommes servi au § V, à prouver l'inégalité

$$abc \leqq 2\Delta h,$$

dans laquelle Δ représente le carré de l'aire de la base. Posons

$$c = b + t,$$

où par conséquent t n'est pas négatif; et de l'inégalité obtenue au § V,

$$h \geqq c - \rho = b - \rho + t,$$

après l'avoir multipliée par 2Δ, tirons l'équation

$$abc = ab^2 + abt;$$

nous aurons

$$2\Delta h - abc \geqq 2\Delta(b - \rho) - ab^2 + (2\Delta - ab)t.$$

Comme d'après l'inégalité démontrée à la fin du § IV, $2\Delta(b - \rho) - ab^2$ n'est pas négative, et que $2\Delta - ab \geqq \frac{1}{2}ab$ est positif, la vérité de la proposition se trouve établie.