

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

J. LIOUVILLE

**Sur quelques formules générales qui peuvent être utiles dans  
la théorie des nombres; deuxième article**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 2<sup>e</sup> série*, tome 3 (1858), p. 193-200.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1858\\_2\\_3\\_\\_193\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1858_2_3__193_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

SUR

QUELQUES FORMULES GÉNÉRALES QUI PEUVENT ÊTRE UTILES  
DANS LA THÉORIE DES NOMBRES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

DEUXIÈME ARTICLE.

Dans ce second article, au lieu de considérer un nombre  $2m$  simplement pair, nous prenons un nombre  $2^\alpha m$  divisible par une puissance quelconque de 2. Ainsi l'exposant  $\alpha$  est pris à volonté dans la suite naturelle 1, 2, 3, 4, ...; mais il ne peut pas se réduire à zéro, en sorte que  $2^\alpha m$  est toujours un nombre pair. Quant au facteur  $m$ , il est impair : nous posons comme d'habitude  $m = d\delta$ , représentant ainsi par  $d$  un quelconque des diviseurs de l'entier  $m$ , et par  $\delta$  le diviseur conjugué ou complémentaire à  $d$ .

Décomposons  $2^\alpha m$  en deux parties impaires  $m'$ ,  $m''$  dont  $2^\alpha m$  soit la somme. En d'autres termes posons

$$2^\alpha m = m' + m'',$$

$m'$  prenant les valeurs successives

$$1, 3, 5, \dots, 2^\alpha m - 1,$$

tandis que  $m''$  prend les valeurs correspondantes

$$2^\alpha m - 1, 2^\alpha m - 3, \dots, 3, 1.$$

Nous faisons d'ailleurs

$$m' = d' \delta', \quad m'' = d'' \delta'',$$

à l'imitation de ce qu'on a fait tout à l'heure pour le nombre  $m$ .

Cela posé, désignons par  $f(x)$  une fonction arbitraire, mais telle pourtant que l'on ait

$$f(-x) = f(x)$$

pour toutes les valeurs de  $x$  qu'on aura à placer sous le signe  $f$ ; et considérons, comme dans notre premier article, la somme triple

$$S = \sum \left\{ \sum \sum [f(d' - d'') - f(d' + d'')] \right\},$$

dans laquelle les deux premières sommations portent sur les diviseurs  $d'$ ,  $d''$  des deux entiers impairs  $m'$ ,  $m''$  composant un quelconque des groupes dont il vient d'être question et qui donnent  $m' + m'' = 2^\alpha m$ .

Le troisième  $\sum$  indique qu'après avoir trouvé les sommes partielles, on doit en faire le total pour tous ces groupes. Ce total  $S$  peut s'exprimer très-simplement au moyen des seuls diviseurs  $d$  du nombre  $m$ . En effet, je me suis assuré que

$$S = 2^{\alpha-1} \sum d [f(0) - f(2^\alpha d)].$$

Ainsi, l'on a cette formule remarquable

$$(a) \sum \left\{ \sum \sum [f(d' - d'') - f(d' + d'')] \right\} = 2^{\alpha-1} \sum d [f(0) - f(2^\alpha d)],$$

qui complète heureusement la formule (A) de notre premier article. Ce serait la formule (A) elle-même, si l'on avait  $\alpha = 1$ .

En prenant

$$f(x) = x^2,$$

la formule (a) nous donne

$$\sum \left( \sum \sum d' d'' \right) = 2^{3\alpha-3} \sum d^3.$$

Représentons à notre ordinaire par  $\zeta_\mu(m)$  la somme des puissances de degré  $\mu$  des diviseurs  $d$  du nombre  $m$ , et le second membre s'écrira

$$2^{3\alpha-3} \zeta_3(m).$$

Quant au premier membre, on remarquera d'abord que la double

somme

$$\sum \sum d' d''$$

équivalent au produit

$$\sum d' \cdot \sum d'',$$

c'est-à-dire à

$$\zeta_1(m') \zeta_1(m'')$$

En faisant donc le total pour tous les groupes  $m', m''$ , on aura finalement

$$\sum \zeta_1(m') \zeta_1(m'') = 2^{3\alpha-3} \zeta_3(m),$$

d'où il est aisé de conclure que le nombre des décompositions de l'octuple d'un entier quelconque, je veux dire de

$$4 \cdot 2^\alpha m,$$

en une somme de huit carrés impairs, est exprimé par

$$2^{3\alpha-3} \zeta_3(m).$$

En particulier soit  $m = 1$ , et nous voyons que le nombre des décompositions de

$$2^{\alpha+2}$$

en une somme de huit carrés impairs est égal à

$$2^{3\alpha-3};$$

on suppose, je le répète, l'exposant  $\alpha$  au moins égal à l'unité.

L'équation qui concerne ce cas particulier de  $m = 1$  semble mériter qu'on la transcrive. La voici :

$$\zeta_1(1)\zeta_1(2^\alpha-1) + \zeta_1(3)\zeta_1(2^\alpha-3) + \zeta_1(5)\zeta_1(2^\alpha-5) + \dots + \zeta_1(2^\alpha-1)\zeta_1(1) = 2^{3\alpha-3}.$$

Le théorème de Jacobi sur le nombre des décompositions du quadruple d'un entier impair en une somme de quatre carrés impairs revient à dire que l'on a l'identité

$$(x + x^3 + x^{25} + \dots)^4 = x^4 \zeta_1(1) + x^{12} \zeta_1(3) + \dots + x^{4m} \zeta_1(m) + \dots,$$

25..

le nombre  $m$  étant impair dans le second membre. C'est en effet de cette identité établie dans ses *Fundamenta nova* que Jacobi a d'abord tiré le théorème dont nous parlons; mais plus tard il en a donné une démonstration directe, de sorte qu'à son tour l'identité algébrique citée serait fournie par les seuls principes de la théorie des nombres.

La formule

$$\sum \zeta_1(m') \zeta_1(m'') = 2^{3\alpha-3} \zeta_3(m)$$

peut servir à son tour à trouver la huitième puissance de la série

$$x + x^9 + x^{25} + \dots$$

Elle montre en effet que le coefficient de  $x^{8\mu}$  dans le développement de

$$(x + x^9 + x^{25} + \dots)^8,$$

ou, ce qui revient au même, dans le développement de

$$[x^1 \zeta_1(1) + x^{12} \zeta_1(3) + \dots]^2,$$

s'obtiendra en posant

$$\mu = 2^{\alpha-1} m,$$

$m$  étant impair : il s'exprimera par

$$2^{3\alpha-3} \zeta_3(m).$$

Je n'ai pas besoin d'ajouter que tous les exposants de  $x$  dans le développement dont nous parlons sont des multiples de 8, et que c'est pour cela que j'ai parlé uniquement du coefficient de  $x^{8\mu}$ . L'équation qu'on obtient définitivement, savoir,

$$(x + x^9 + x^{25} + \dots)^8 = \sum \sum [2^{3\alpha-3} \zeta_3(m) x^{2^{\alpha+2} m}],$$

où la double sommation porte sur les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, ... de  $\alpha$ , et 1, 3, 5, 7, ... de  $m$ , s'accorde, bien entendu, avec les formules elliptiques de Jacobi.

Puisqu'il a été question de la série

$$x + x^9 + x^{25} + \dots,$$

je ferai observer qu'elle s'exprime par une suite infinie de fractions, savoir :

$$\frac{x}{1-x^2} - \frac{x^3}{1-x^6} - \frac{x^5}{1-x^{10}} - \frac{x^7}{1-x^{14}} + \frac{x^9}{1-x^{18}} - \dots$$

Le terme général est

$$\frac{\lambda(m) x^m}{1-x^{2m}},$$

$m$  étant un nombre impair et  $\lambda(m)$  une fonction numérique dont nous avons parlé ailleurs, et qui est égale à 1 ou à  $-1$ , suivant que le nombre total des facteurs premiers égaux ou inégaux dont  $m$  est le produit est pair ou impair.

Pour la série

$$x + x^4 + x^9 + x^{16} + \dots,$$

le terme général de l'expression en fractions de la forme

$$\frac{x^s}{1-x^t}$$

serait

$$\frac{\lambda(s) x^s}{1-x^t},$$

$s$  prenant successivement toutes les valeurs 1, 2, 3, 4, ...

Revenons à la formule (a) pour y faire

$$f(x) = x^4.$$

Il s'ensuivra facilement

$$\sum \zeta_1(m') \zeta_3(m'') = 2^{5\alpha-5} \zeta_5(m);$$

d'où l'on conclura que

$$2^{5\alpha-5} \zeta_5(m)$$

est le nombre des décompositions de

$$2^{\alpha+3} \cdot m$$

en une somme de huit carrés impairs, formant un multiple impair de 8, plus le double d'une autre somme de quatre carrés impairs.

Soit généralement

$$f(x) = x^{2\mu} :$$

il nous viendra

$$\begin{aligned} 2^{2\alpha\mu+\alpha-2} \zeta_{2\mu+1}(m) &= \frac{2^\mu}{1} \sum \zeta_1(m') \zeta_{2\mu+1}(m'') \\ &+ \frac{2^\mu(2\mu-1)(2\mu-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \sum \zeta_3(m') \zeta_{2\mu-3}(m'') + \dots \\ &\dots \dots \dots \\ &+ \frac{2^\mu}{1} \sum \zeta_{2\mu-1}(m') \zeta_1(m''). \end{aligned}$$

Enfin, soit

$$f(x) = \cos xt$$

$t$  désignant une constante quelconque. On trouvera

$$\sum \left( \sum \sin d't \cdot \sum \sin d''t \right) = 2^{\alpha-1} \sum d \sin^2(2^{\alpha-1} dt).$$

Je ne m'arrêterai pas à faire d'autres applications de la formule (a). Je passe de suite à une seconde formule qui comprend comme cas particulier la formule (a) et qui répond à la formule (B) de notre premier article.

Considérons la somme triple

$$\sum \left\{ \sum \sum [f(d' - d'', \delta' + \delta'') - f(\delta' + \delta'', d' - d'')] \right\}$$

où nous conservons toutes les notations ci-dessus, en sorte que  $d'$  et  $d''$  sont des diviseurs quelconques des deux nombres impairs  $m'$ ,  $m''$  dont la somme  $m' + m''$  forme le nombre donné  $2^\alpha m$  :  $\delta'$ ,  $\delta''$  sont les diviseurs complémentaires à  $d'$ ,  $d''$ . Les deux premières sommations con-

cernent les diviseurs  $d', d'', \delta', \delta''$  appartenant à un groupe  $(m', m'')$  pris à volonté, et le troisième  $\sum$  nous apprend qu'il faut ensuite réunir ces sommes partielles en un total qui comprenne tous les groupes. Enfin la fonction  $f(x, y)$  est arbitraire, mais telle pourtant que l'on ait

$$f(-x, y) = f(x, -y) = f(x, y),$$

pour toutes les valeurs de  $x, y$  dont on fera usage.

Cela posé, je dis que la somme triple dont il s'agit peut s'exprimer par une somme simple relative aux seuls diviseurs  $d$  de l'entier impair donné  $m$ . La valeur de la somme que voici

$$2^{\alpha-1} \sum d [f(0, 2^{\alpha}d) - f(2^{\alpha}d, 0)]$$

est en effet égale à celle de la somme triple.

En d'autres termes, on a

$$(b) \sum \left\{ \sum \sum [f(d' - d'', \delta' + \delta'') - f(\delta' + \delta'', d' - d'')] \right\} = 2^{\alpha-1} \sum d [f(0, 2^{\alpha}d) - f(2^{\alpha}d, 0)].$$

Cette formule répond, comme nous l'avions annoncé, à la formule (B) de notre premier article. Ajoutons-en une autre équivalente et qui répondra à la formule (C). On a

$$(c) \sum \left\{ \sum \sum [f(d' - d'', \delta' + \delta'') - f(d' + d'', \delta' - \delta'')] \right\} = 2^{\alpha-1} \sum d [f(0, 2^{\alpha}d) - f(2^{\alpha}d, 0)].$$

Je me contenterai, pour le moment du moins, d'indiquer une seule application. Prenons, dans la formule (c),

$$f(x, y) = \cos xt \cos yz,$$

$t$  et  $z$  désignant des constantes quelconques : faisons de plus, comme dans notre premier article, et relativement à tout entier impair  $m = d\delta$ ,

$$\sum \sin dt \cos \delta z = \psi(m), \quad \sum \cos dt \sin \delta z = \varpi(m);$$



et nous arriverons à la formule

$$\sum \psi(m') \psi(m'') - \sum \varpi(m') \varpi(m'') = 2^{z-1} \sum d[\sin^2(2^{z-1} dt) - \sin^2(2^{z-1} dz)],$$

que nous regardons comme importante.

Il serait aisé d'ajouter d'autres exemples; mais nous croyons en avoir assez dit pour que le sens de nos formules soit bien fixé et leur utilité mise hors de doute.

