JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. DE JONQUIÈRES

Note sur un problème de géométrie à trois dimensions

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 3 (1858), p. 53-56.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1858_2_3__53_0>

NOTE

SUR UN PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE A TROIS DIMENSIONS;

PAR M. É. DE JONQUIÈRES,

Lieutenant de Vaisseau.

I.

PROBLÈME. *Étant donnés neuf points d'une surface du second degré, reconnaître si un dixième point donné est intérieur ou extérieur à la surface.*

Il s'agit, bien entendu, de résoudre la question sans construire la surface, et en n'employant, comme cela doit être, que la règle et le compas.

Solution. Soient a, b, c, d, e, f, g, h, i les neuf points, et O celui dont il faut reconnaître la position par rapport à la surface du second ordre S que les neuf points déterminent.

Le point O est extérieur ou intérieur à la surface, selon que la courbe d'intersection de cette surface par le plan polaire du point O est réelle ou imaginaire. Qu'on fasse passer un plan par le point O et par deux des points donnés, a et b par exemple; soient Σ la conique d'intersection de ce plan et de la surface, et L la droite suivant laquelle il coupe le plan polaire. La question se réduit à savoir si le point O est extérieur ou intérieur à la courbe Σ, ou, en d'autres termes, si les points de rencontre de Σ et de L sont réels ou imaginaires. On trouvera ci-après, § VI, la solution très-simple de cette question. Mais pour prouver que cette solution satisfait pleinement aux conditions du problème proposé, il faut montrer comment on peut déterminer cinq points de la conique Σ en n'employant que des constructions élémentaires. Cette détermination fait l'objet des trois paragraphes qui suivent.

II.

On va construire les points a' et b' où les droites Oa et Ob respectivement traversent une seconde fois la surface S, et pareillement les deux points λ, λ' où une droite quelconque Ol du plan Oab rencontre S; on aura de la sorte six points de la conique Σ. Ensuite les points α et β, conjugués harmoniques du point O par rapport aux segments aa', bb' respectivement, détermineront la polaire L, dont il suffira enfin de reconnaître la position relativement à cette conique.

III.

Pour trouver les points a', b', λ et λ', il faut savoir résoudre la question suivante :

Étant donnés une droite A *et six points* a, b, c, d, e, f *d'un hyperboloïde à une nappe, construire les autres génératrices rectilignes de la surface.*

Par la droite A et les cinq points a, b, c, d, e, on fait passer cinq plans. On mène les quatre droites fa, fb, fc, fd, qu'un plan quelconque T coupe en α, β, γ, δ respectivement, et l'on détermine sur ce plan [par des constructions linéaires (voir *Géométrie supérieure*)] la conique C qui est *capable* du rapport anharmonique des quatre plans Aa, Ab, Ac, Ad. Toutes les génératrices du cône (fC) qui a cette conique pour base et pour sommet le point f, sont telles, que le rapport anharmonique des quatre plans menés par chacune d'elles et par les quatre points a, b, c, d, est constant.

On détermine pareillement le cône (fC') qui est capable d'un rapport anharmonique constant et égal à celui des quatre plans Aa, Ab, Ac, Ae.

Ces deux cônes se coupent suivant une arête ff' telle, que les deux faisceaux de plans

$$A[a, b, c, d, e] \quad \text{et} \quad ff'[a, b, c, d, e]$$

sont homographiques. Donc (*Géom. sup.*, n° **411**), ces deux faisceaux de plans engendrent l'hyperboloïde à une nappe, qui est déterminé par les données de la question, et dont on obtiendra ainsi autant de génératrices rectilignes qu'on le voudra.

Il est d'ailleurs évident que l'arête ff' se construit linéairement, puisqu'il suffit de trouver sur le plan T le quatrième point d'intersection de deux coniques C et C', qui ont trois points communs connus à priori, savoir α, β et γ.

IV.

Actuellement, *Etant donnés neuf points $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ d'une surface du second degré* S, *et une droite* aO *menée par l'un a de ces points, on demande de construire le deuxième point a' de rencontre de cette droite avec la surface.*

Qu'on imagine l'hyperboloïde à une nappe H qui passe par la droite ib et par les six points c, d, e, f, g, h; et pareillement, l'hyperboloïde K qui passe par la droite ic et par les six points b, d, e, f, g, h. Les surfaces S, H et K ont huit points communs; donc une droite quelconque les rencontre en six points en involution. Soient h, h' et k, k' les points de rencontre de la droite aO avec H et K respectivement; les six points h, h', k, k', a, a' sont en involution. Les cinq premiers étant connus, le sixième se construit aisément. On admet ici que les points h, h' (et de même k et k') sont connus; car, pour les obtenir, il suffit de mener par la droite aO un plan quelconque tel que aOb; de déterminer, par la construction du problème précédent (III), cinq génératrices rectilignes de la surface H, et par suite leurs intersections avec le plan aOb, et enfin de chercher les deux points de rencontre de la droite aO avec la conique que ces cinq points déterminent, ce qui n'exige pas qu'elle soit tracée (voir *Géom. sup.*, n° **646**).

V.

Il faut encore indiquer comment on trouve les deux points λ, λ', où la surface S est traversée par une droite Ol qui ne passe par aucun des points donnés de S.

Soient toujours H et K les deux hyperboloïdes du numéro précédent, et soient H' et K' deux autres hyperboloïdes menés, l'un par la droite id et par les six points b, c, e, f, g, h, l'autre par la droite ie et par les six points b, c, d, f, g, h.

Soient mm', nn', pp', qq' les segments interceptés sur Ol par les hyperboloïdes H, K, H', K' respectivement.

Chacune de ces surfaces ayant huit points communs avec S, il s'ensuit que les segments mm', nn', $\lambda\lambda'$ sont en involution, et pareillement les segments pp', qq', $\lambda\lambda'$. Donc le segment $\lambda\lambda'$ se construira comme il est dit n° **271** de la *Géométrie supérieure*.

VI.

On connaît donc enfin six points a, a', b, b', λ, λ' de la conique Σ, et l'on connaît aussi la polaire $\alpha\beta$ (II), ou L du point O par rapport à cette conique. Il ne reste plus qu'à reconnaître si L coupe ou non Σ.

Or les rayons ab, ab', $a\lambda$ coupent L en trois points 1, 2, 3, et les rayons homologues $a'b$, $a'b'$, $a'\lambda$ la coupent en trois points 1', 2', 3'. Ces deux systèmes de trois points déterminent sur L deux divisions homographiques dont on cherchera les deux *points doubles* qui sont précisément les points d'intersection de L et de Σ. Donc, selon que ces points doubles seront réels, coïncidents ou imaginaires (*Géom. sup.*, chap. VIII), le point donné O sera extérieur, adhérent ou intérieur à la surface.

Ainsi le problème est complétement résolu par une méthode purement géométrique, et l'on voit que le § V donne la solution de cette autre question importante : *Etant donnés neuf points d'une surface du second degré, construire la surface.*

Octobre 1857.