JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

DIRICHLET

Extrait d'une Lettre de M. Dirichlet à M. Liouville

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 2 (1857), p. 375-376.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1857_2_2__375_0>

Extrait d'une Lettre de M. Dirichlet à M. Liouville.

« ... En jetant les yeux sur le Mémoire que M. Hoüel a traduit récemment (j'ai vu la traduction entre vos mains à Toul), je me suis aperçu qu'on pourrait rendre ce Mémoire plus complet, sans l'allonger, en profitant d'une remarque que j'ai eu occasion de faire dans mon Cours. Si donc ce Mémoire n'est pas encore imprimé, veuillez y faire le changement indiqué ci-après [*].

» Les deux derniers alinéas du § IV sont à remplacer par ce qui suit :

» Pour déterminer le coefficient b', on remarquera que la valeur réciproque de la première des racines appartenant à la forme (a', b', a'') devant être une quantité σ numériquement inférieure à l'unité et de même signe que a', on aura

$$\sigma = \frac{-b' + \sqrt{D}}{a'}, \quad b' = \sqrt{D} - a'\sigma,$$

c'est-à-dire que b' se trouve compris entre $\sqrt{D}$ et $\sqrt{D} - (a')$, (a') désignant la valeur absolue de a'. Cette condition jointe à la congruence $b' \equiv b \pmod{a'}$ sert à déterminer b' sans ambiguïté et d'une manière facile.

» On prouve d'une manière toute semblable qu'il existe toujours une réduite unique contiguë à la proposée vers la gauche, et cela ré-

[*] Cette Lettre ne m'est parvenue qu'au moment où j'allais donner le bon à tirer. Pour éviter un remaniement difficile, je laisse subsister la rédaction ancienne, qui, d'ailleurs, était déjà très-satisfaisante ; mais j'ajoute la rédaction nouvelle dont nos lecteurs feront leur profit suivant le vœu de l'illustre auteur. (J. Liouville.)

sulte aussi du cas précédent au moyen de la remarque faite plus haut.

» Nous terminerons ce paragraphe en faisant voir qu'on peut toujours obtenir une forme réduite équivalente à une forme quelconque donnée (a, b, a'). Pour cela on formera la suite de formes

$$(a, b, a'), (a', b', a''), (a'', b'', a'''), \ldots,$$

dont chacune se déduit de celle qui la précède par le procédé indiqué ci-dessus, la seconde par exemple de la première, en déterminant b' par la double condition de satisfaire à la congruence $b' \equiv -b \pmod{a'}$ et d'être compris entre $\sqrt{D}$ et $\sqrt{D} - (a')$. Il est facile de s'assurer que les formes ainsi obtenues finiront par être toutes des réduites, et que cela aura lieu au plus tard lorsqu'on sera arrivé à une forme dont le premier coefficient ne surpasse pas numériquement le troisième, circonstance qui ne pourra manquer de se présenter, les entiers positifs

$$(a), (a'), (a''), \ldots$$

ne pouvant aller indéfiniment en décroissant.

» Il s'agit donc de prouver qu'une forme telle que

$$(A, B, C),$$

où $A \overline{\overline{<}} (C)$ et B est compris entre $\sqrt{D}$ et $\sqrt{D} - (A)$ est une forme réduite.

» En vertu de la dernière condition, on a

$$B = \sqrt{D} - Ab, \quad \sigma = \frac{-B + \sqrt{D}}{A}, \quad \frac{1}{\sigma} = \frac{-B - \sqrt{D}}{C},$$

la quantité σ étant numériquement inférieure à l'unité et de même signe que A. Il résulte des deux dernières équations et de la condition $(A) \overline{\overline{<}} (C)$, que les deux racines

$$\frac{-B - \sqrt{D}}{C}, \quad \frac{-B + \sqrt{D}}{C},$$

qui appartiennent à notre forme, sont, quant à leurs valeurs absolues, la première supérieure, la seconde inférieure à l'unité. La première racine étant ainsi numériquement supérieure à la seconde, B sera nécessairement positif, et l'on conclura ensuite de l'avant-dernière des équations ci-dessus, dans laquelle σ et A ont le même signe, que $B < \sqrt{D}$; d'où il suit enfin, d'après les expressions des deux racines, que ces racines ont des signes opposés. C. Q. F. D. »