JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

LEJEUNE-DIRICHLET

Addition à ce mémoire

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 2 (1857), p. 373-375.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1857_2_2__373_0>

ADDITION A CE MÉMOIRE; PAR L'AUTEUR.

Pour que le lecteur soit dispensé de recourir aux écrits cités dans la Note relative au § VII, nous allons démontrer en peu de mots les formules rappelées à l'endroit auquel se rapporte cette Note.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que la substitution

$$\begin{pmatrix}\alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$$

change la forme (a, b, c) en elle-même, sont évidemment exprimées par ces équations

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1,\quad a(\alpha^2 - 1) + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2 = 0,\quad a\alpha\beta + 2b\beta\gamma + c\gamma\delta = 0,$$

dont la dernière a été simplifiée en ce qu'on y a remplacé $\alpha\delta$ par $\beta\gamma + 1$. En ajoutant les deux dernières après les avoir multipliées par δ et $-\gamma$, et ensuite après les avoir multipliées par $-\beta$ et α et ayant égard à la première, on obtient ce nouveau système d'équations

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1,\quad a(\alpha - \delta) + 2b\gamma = 0,\quad a\beta + c\gamma = 0,$$

système tout à fait équivalent au système primitif qui s'en déduit en faisant la somme des deux dernières équations du nouveau système après les avoir multipliées d'abord par α, γ, et ensuite par β, δ. Comme a n'est pas nul, si nous posons $\gamma = a\psi$, la quantité rationnelle ψ sera complétement déterminée par γ, et nos deux dernières équations pourront être remplacées par celles-ci :

$$(1)\qquad \delta - \alpha = 2b\psi,\quad \beta = -c\psi,\quad \gamma = a\psi.$$

Or $\delta - \alpha$, β, γ étant des entiers, et le plus grand diviseur commun de a, $2b$, c ayant été désigné par σ, ψ sera nécessairement de la forme $\frac{u}{\sigma}$, où u est un entier, et nous aurons

$$\delta - \alpha = \frac{2b}{\sigma}u,\quad \beta = -\frac{c}{\sigma}u,\quad \gamma = \frac{a}{\sigma}u.$$

Si maintenant, dans l'équation

$$(\delta + \alpha)^2 = (\delta - \alpha)^2 + 4\alpha\delta = (\delta - \alpha)^2 + 4\beta\gamma + 4,$$

nous substituons les expressions précédentes et si nous multiplions ensuite par σ^2, il viendra

$$[\sigma(\delta + \alpha)]^2 = 4[(b^2 - ac)u^2 + \sigma^2] = 4(\mathrm{D}u^2 + \sigma^2),$$

et nous en concluons que $\sigma(\delta + \alpha)$ est pair. En posant donc

$$\sigma(\delta + \alpha) = 2t,$$

t étant un entier, la dernière équation prendra la forme

$$(2)\qquad t^2 - \mathrm{D}u^2 = \sigma^2,$$

et nos entiers α, β, γ, δ se trouveront exprimés par les formules suivantes :

$$\alpha = \frac{t - bu}{\sigma},\quad \beta = -\frac{c}{\sigma}u,\quad \gamma = \frac{a}{\sigma}u,\quad \delta = \frac{t + bu}{\sigma}.$$

Après avoir prouvé que les coefficients de toute substitution qui change la forme (a, b, c) en elle-même, sont exprimables au moyen des formules précédentes par deux entiers t et u liés entre eux par l'équation (2), il nous reste à faire voir que, réciproquement, toute solution entière (t, u) de cette dernière donne des valeurs entières pour α, β, γ, δ, et que ces valeurs satisfont aux équations (1) qui expriment les conditions suffisantes pour que la substitution formée des coefficients α, β, γ, δ change la forme (a, b, c) en elle-même. Le premier point, qui est évident lorsque $\sigma = 1$, se prouve pour $\sigma = 2$ en observant que D et b étant impairs dans ce cas, t et u seront évidemment tous deux pairs ou tous deux impairs, et il n'est pas moins facile de vérifier la seconde assertion : il suffit de faire la substitution de α, β, γ, δ dans les équations (1), et d'avoir égard à l'équation (2).

(Toul, 14 août 1857).