JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. DE JONQUIÈRES

Note sur la géométrie organique de Maclaurin, contenant diverses applications des théories de la géométrie moderne

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 2 (1857), p. 153-165.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1857_2_2__153_0>

NOTE

SUR

LA GÉOMÉTRIE ORGANIQUE DE MACLAURIN,

CONTENANT

DIVERSES APPLICATIONS DES THÉORIES DE LA GÉOMÉTRIE MODERNE;

PAR M. E. DE JONQUIÈRES.

I.

Les sections II et III de la *Géométrie organique*, qui forment plus de la moitié de cet ouvrage célèbre, traitent exclusivement des courbes du troisième et du quatrième degré, et font connaître divers moyens de les décrire par les intersections de droites tournant autour de pôles fixes, ou par celles des côtés d'angles mobiles d'après des lois déterminées. Les propositions, qui établissent le degré des courbes engendrées dans chaque cas, sont démontrées par la méthode des coordonnées de Descartes, et c'est d'après la composition des équations algébriques que l'auteur fait rentrer dans la classification newtonienne les courbes du troisième degré que ces équations représentent.

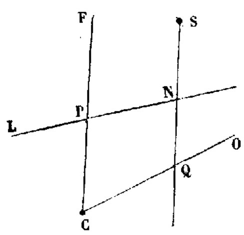
C'est sans doute dans le but de rendre ce rapprochement plus facile, que Maclaurin, qui affectionnait particulièrement les méthodes géométriques, comme Newton et tous les mathématiciens anglais de ce temps, a eu souvent recours à l'analyse dans sa *Géométrie organique*. Peut-être aussi le degré d'avancement où se trouvait alors la géométrie pure ne lui offrait-il pas toutes les ressources désirables pour traiter l'ensemble des questions qu'il avait en vue.

Quoi qu'il en soit, les méthodes modernes permettent de s'affranchir dans la circonstance du secours de l'algèbre. Je me propose, dans la présente Note, de faire l'application de quelques-unes de ces méthodes aux principaux théorèmes démontrés par Maclaurin dans la première partie de son livre. Je donnerai par là un nouvel exemple des ressources qu'elles présentent, et en même temps j'appellerai l'attention des jeunes géomètres sur un ouvrage qui est l'une des plus belles productions de son illustre auteur.

II.

Les propositions contenues dans la IIᵉ section, qui se rapportent aux courbes à point double du troisième ordre, peuvent, ainsi que Maclaurin en fait la remarque, se résumer en une seule, qui est la suivante :

Si l'on donne sur un plan deux points fixes C, S, *une droite* SN *avec laquelle une autre droite* NL *fait en* N *un angle constant dans un sens de rotation déterminé, enfin un angle constant* FCO *tournant autour de son sommet* C; *qu'on désigne par* P *le point de rencontre des côtés* CF *et* NL, *et par* Q *le point de rencontre des côtés* CO *et* SN, *on formera un quadrilatère variable* CQNP. *Si deux des trois sommets mobiles de ce quadrilatère se meuvent sur des droites données, le troisième décrira une courbe du troisième degré qui aura un point double, soit en* C, *soit en* S.



Il y a trois cas à considérer.

III.

Premier cas. — Les deux points P, Q se meuvent sur deux droites données Λ, Λ'; on demande le degré de la courbe décrite par le point N.

Les points variables P et Q marquent sur Λ et Λ' deux divisions homographiques, parce que l'angle pivotant FCO est constant (*Géométrie supérieure*, nº **145**); soient p, p', p'', etc.; q, q', q'', etc., ces deux divisions. L'angle N étant aussi constant, ses deux côtés NL, NS marquent deux divisions homographiques sur la droite située à l'infini (*Géom. sup.*, nº **652**). Mais celle de ces deux divisions que décrit le côté NS est homographique à la division q, q', q'', etc., puisque le rayon NS passe constamment par le point S. Donc la division marquée à l'infini par le côté NL, est homographique à la division p, p', p'', etc., que ce même côté marque sur A. D'après cela, la droite NL enveloppe une parabole Σ (*Géom. sup.*, n° 555).

Cela posé, pour connaître le degré du lieu géométrique que décrit le point N, il suffit de déterminer en combien de points il est coupé par une droite quelconque X.

Soit a un point quelconque de cette droite; de ce point, menons à la parabole Σ deux tangentes T, T' qui rencontrent la droite A aux points p, p'. Soient Cq, Cq' les seconds côtés des angles pCq, $p'Cq'$ égaux à l'angle donné FCO, et q, q' les points où ces côtés coupent la droite A'. Joignons Sq, Sq'; ces deux rayons iront couper la transversale X en deux points b, b', et feront avec les tangentes T, T' des angles égaux à l'angle donné N. Ces deux points seront, en général, distincts du point a, et l'un ou l'autre ne coïncidera avec a que dans les positions de ce point qui appartiennent au lieu géométrique cherché.

Il est évident, par ce qui précède, que, à chaque position du point a sur X, il correspond à la fois les deux points b, b' sur cette droite, et que réciproquement à chacun de ces deux points indistinctement il ne correspond qu'un seul point a. Donc, en vertu du *principe de correspondance anharmonique*, les segments bb', etc., sont en involution, et ils correspondent anharmoniquement aux points a, etc.; d'où l'on conclut qu'il n'existe sur X que trois positions où le point a coïncide avec l'un des deux points b, b' qui lui correspondent (voir les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, tome XLI, page 679. *Note de M. Chasles sur la construction des racines de l'équation du troisième degré*). Deux de ces trois positions peuvent d'ailleurs être imaginaires. Donc enfin la courbe cherchée est du troisième degré.

Cette courbe a un point double en S; car les deux tangentes à la parabole Σ, issues du point S, sont deux positions particulières que peut prendre la droite NL, et dans chacune de ces deux positions, l'autre côté SN de l'angle LNS coupe cette droite au point S, c'est-à-dire que le point S appartient deux fois à la courbe. C'est un nœud, un point de rebroussement ou un point conjugué, selon qu'il est extérieur, adhérent ou intérieur à la parabole Σ.

La discussion fait voir (*Géométrie organique*, page 45) qu'on n'obtient par cette construction que des *hyperboles défectives* douées d'une seule asymptote rectiligne avec ou sans diamètre. Ce sont les courbes nos 34, 41; 35, 42; 36, 43, 44 de la classification de Newton.

La même chose se voit ici; car le point N ne peut aller à l'infini qu'autant que la droite NL y est elle-même tout entière, c'est-à-dire que si elle est la tangente à l'infini de la parabole. Donc si l'on détermine l'axe de cette parabole, la droite Sn qui fera avec cet axe l'angle donné SNL dans le sens de rotation prescrit, sera parallèle à la seule asymptote que la courbe puisse avoir.

IV.

Deuxième cas. — Les points P et N décrivent deux droites données Λ, Λ'; on demande quel est le lieu du point Q.

On prouvera comme dans le premier cas que la droite mobile LN enveloppe une parabole Σ qui est tangente à Λ'; et l'on en conclut, par des raisonnements analogues, que le point Q décrit une courbe du troisième ordre.

Le point S est double; car si l'on fait l'angle $SCF' = OCF$, et qu'on nomme F' le point où le côté CF' coupe la directrice Λ, on pourra de ce point mener à la parabole Σ deux tangentes T, T′ qui seront deux positions distinctes du côté NL, et auxquelles correspondront deux rayons Sn, Sn'. Or chacun de ces deux rayons coupe CS au point S. Donc le point S est double, tandis que la courbe ne passe qu'une seule fois par le point C. L'*espèce* du point double dépend, comme dans le premier cas, de la position du point F' par rapport à la parabole Σ.

La discussion fait voir (*Géométrie organique,* page 39) qu'on obtient par cette construction les courbes nos 7, 8, 11, 13, 18, 19; 34, 35, 36, 41; 68, 69 et 70 de la classification newtonienne, c'est-à-dire des hyperboles redondantes, des hyperboles défectives, des courbes hyperbolo-paraboliques ou des paraboles divergentes.

V.

Troisième cas. — Les points N et Q se meuvent sur deux droites données Λ, Λ'; on demande le lieu du point P.

Des raisonnements analogues à ceux des deux premiers cas prouvent que le côté NL enveloppe encore une parabole Σ tangente à A, et que le point P décrit une courbe du troisième degré qui passe deux fois en C.

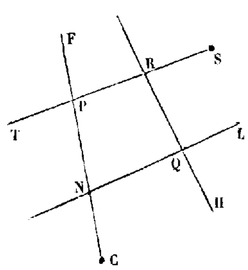
En effet on peut, du point C, mener à la parabole deux tangentes T, T′ qui sont deux positions particulières du côté mobile NL. Or les deux côtés Cf, Cf' de l'angle FCO, qui leur correspondent, les coupent toutes les deux en C. Donc ce point est double, et son espèce dépend de sa position par rapport à la parabole Σ.

Le côté NL, sur lequel se trouve constamment le point P générateur de la courbe, ne peut évidemment jamais passer par le point S. Donc ce point n'appartient pas à la courbe.

La discussion apprend (*Géométrie organique*, pages 17 et suiv.) que cette troisième construction peut, selon la position des lignes et la grandeur des angles de la figure, donner les courbes n^{os} 2, 7, 8, 25; 11, 18, 19, 20; 3, 12; 4, 13; 47, 53, 54; 48; 49; 34, 41; 35, 42; 36, 43, 44; 47, 48, 51, 49; 68, 69, 70; 57, 58, 59, 60; 64, 65, 66 de la classification de Newton.

VI.

La section III du livre I de la *Géométrie organique* traite du mode de description de certaines courbes du quatrième ordre qui, dans des cas particuliers, s'abaissent au troisième degré. Les diverses propositions qui s'y trouvent démontrées se résument dans le théorème général qui suit :



Théorème. — *On donne sur un plan deux points fixes* C *et* S, *deux angles constants* CNL, SRH *dont les côtés* CN *et* SR *passent constamment par les points* C *et* S *respectivement. Soient* P *et* Q *les points* (CN, SR) *et* (NL, RH); *si trois quelconques des sommets mobiles du quadrilatère* NQRP *se meuvent sur trois droites fixes, le quatrième décrira une courbe du quatrième degré.*

Il y a, comme dans le § II, trois cas à considérer.

VII.

Premier cas. — Les points R, N, Q se meuvent sur trois droites données Λ, Λ', Λ''; on demande le lieu du point P.

On prouve, comme plus haut, que le côté mobile RH enveloppe une parabole Σ tangente à Λ, et que le côté mobile NL en enveloppe une autre Σ' tangente à Λ'.

Cela posé, cherchons combien il existe, sur une transversale quelconque X, de points appartenant au lieu cherché. Soit q un point pris arbitrairement sur Λ''. De ce point, menons à Σ deux tangentes T, T' qui coupent Λ en r et r'; les rayons Sr, Sr' couperont X en deux points x et x'. Du point q, menons pareillement à Σ' deux tangentes t, t' qui coupent Λ' en n et n'; les rayons Cn, Cn' iront rencontrer X en deux points y, y'. Il est clair que, si le point q se meut sur Λ'', les points x, x' marqueront sur X une série de segments en involution, qui correspondront anharmoniquement à la division que les points q marquent sur Λ'', et de même pour les points variables y, y'. Donc les segments en involution xx', etc., correspondent anharmoniquement aux segments en involution yy', etc., et par conséquent il existe sur X quatre points (réels ou imaginaires par couples) tels, que l'une des extrémités d'un segment de la première série coïncide avec l'une des extrémités du segment correspondant de la seconde série. Or ces points de coïncidence appartiennent au lieu cherché; donc ce lieu est du quatrième degré. *Ce qu'il fallait démontrer.*

Le point C est double; car le rayon SR peut se confondre de deux manières avec la droite SC, savoir avec SC ou avec son prolongement, ce qui donne lieu à deux positions distinctes du rayon correspondant CF. Or, dans les deux cas, CF coupe SC au point C; donc le point C est double. Même raisonnement pour le point S.

Une construction géométrique très-simple indique ensuite *l'espèce* de chacun des deux points doubles (*voir* là-dessus la *Géométrie organique*, pages 47 et 48).

VIII.

S'il arrive que le rayon CP prenne la direction CS en même temps que le rayon SP qui lui correspond prend la direction SC, la droite indéfinie CS fait partie de la courbe; car il n'y a aucun des points de cette droite qui ne puisse être regardé, dans cette position particulière, comme étant le point d'intersection P des deux rayons générateurs. Donc, abstraction faite de cette droite, la courbe se réduit au troisième ordre; et puisque la droite CS passe déjà une fois par chacun des points C et S, la courbe du troisième ordre ne peut plus y passer qu'une seule.

Voilà donc un moyen bien simple de décrire une courbe du troisième ordre qui n'ait pas de points doubles. La discussion fait voir (*Géométrie organique*, page 49) qu'on obtient, moyennant des données convenablement choisies, les courbes n^{os} 10, 20, 21, 40, 39, etc., de Newton [*].

IX.

Deuxième cas. — Les points R, N, B se meuvent sur trois droites données Λ, Λ', Λ''; on demande quelle est la courbe décrite par le point Q.

Comme dans le premier cas, le côté RH enveloppe une parabole Σ, et le côté NL en enveloppe une autre Σ'.

Soit a un point pris arbitrairement sur une transversale quelconque X. De ce point, on mène à Σ deux tangentes T, T' auxquelles correspondent deux rayons Sr, Sr' qui coupent Λ'' en r et r' respectivement. Quand le point a se meut sur X, le segment rr' se déplace sur Λ'', et il est visible qu'en vertu du *principe de correspondance* déjà cité, les segments rr', etc., sont en involution et correspondent anharmoniquement aux points a, etc.

Pareillement si, du point a, on mène à Σ' deux tangentes t, t' qui

---

[*] Ainsi Maclaurin parvient à décrire, par des intersections de simples lignes droites, toutes les courbes du troisième ordre. Mais il est nécessaire d'ajouter que ces courbes ne sont soumises à aucune condition imposée *à priori*. Sauf le cas où la courbe doit avoir un point double et passer par six autres points donnés (problème résolu page 84), l'auteur anglais ne donne nullement la solution de la question générale où il s'agit de faire passer la courbe par neuf points. C'est M. Chasles qui a, comme on sait, résolu le premier ce problème, que Newton regardait comme très-difficile, *inter difficiliora numerandum*. Cette remarque s'étend aussi à la construction des courbes du quatrième degré, telle que la donne Maclaurin.

coupent A' en s et s', puis les rayons $\mathrm{C}s$, $\mathrm{C}s'$ qui rencontrent A'' en ρ et ρ', le segment $\rho\rho'$ fait partie d'une involution anharmonique à la division des points a. Donc les deux séries de segments rr', etc., et $\rho\rho'$, etc., sont anharmoniques, et il en résulte qu'il existe sur A'' quatre positions telles, que l'une des extrémités d'un segment de la première série coïncide avec l'une des extrémités du segment correspondant de la seconde. Or, quand cette coïncidence a lieu, le point a appartient au lieu géométrique cherché, qui a ainsi sur X quatre points, réels ou imaginaires par couples, et pas davantage. Donc ce lieu est une courbe du quatrième degré.

Il est clair que les pôles C et S n'appartiennent pas à la courbe.

X.

Si les directrices données A, A', A'' sont parallèles entre elles, il est facile de voir, par le raisonnement qui précède, que le point situé à l'infini, sur une transversale quelconque X, appartient à la courbe. Donc la courbe se compose alors de la droite située à l'infini et d'une autre branche; c'est-à-dire qu'elle devient, abstraction faite de la droite à l'infini, une courbe du troisième ordre.

XI.

Troisième cas. — Les points R, P, Q se meuvent sur trois droites données A, A', A''; on demande le lieu du point libre N.

On prouve, comme dans les deux cas qui précèdent, que la courbe décrite par le point N est du quatrième ordre. Maclaurin démontre très-élégamment qu'elle a un point triple en C (page 59).

XII.

La section IV de la première partie (pages 61 et suivantes) est consacrée à la démonstration de plusieurs théorèmes concernant la description des courbes d'ordres plus élevés par le moyen de droites et d'angles mobiles donnés. M. Poncelet en a reproduit plusieurs dans son *Traité des propriétés projectives* (section IV), en les démontrant par de belles méthodes qui lui sont propres. Je n'ai donc pas à revenir sur ce sujet, et je passe immédiatement à une question intéressante qui fait l'objet de la section III de la IIe partie de la *Géométrie organique.*

XIII.

Il s'agit de déterminer la nature de la courbe formée par les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point fixe sur les tangentes à une courbe géométrique donnée U.

Soient S le point fixe; OT une tangente à la courbe U; O le pied de la perpendiculaire abaissée du point S sur cette tangente. On demande quelle est la courbe Z que décrit le point O.

Soient X une transversale quelconque, et o son point de rencontre avec SO. Si l'on mène ot parallèle à OT, cette droite variable ot enveloppera une parabole Σ, qui aura son foyer en S et son sommet au pied de la perpendiculaire abaissée du point S sur X. Si le point o appartenait à la courbe cherchée Z, il coïnciderait avec O, et les deux lignes ot, OT se confondraient aussi. Donc, autant il existe de tangentes communes aux deux courbes Σ et U, autant il y a sur X de points appartenant à la courbe Z. Ainsi $2m(m-1)$ est, en général, le degré de cette courbe, si m exprime celui de la courbe donnée U.

Si la courbe U est une conique, la courbe Z est donc du quatrième degré. Mais si cette conique est une parabole, le degré s'abaisse au troisième. En effet, parmi les quatre tangentes communes à deux paraboles, se trouve la droite de l'infini. Donc le point situé à l'infini sur une transversale arbitraire, appartient à la courbe Z qui se compose ainsi de la droite située à l'infini dont on peut faire abstraction, et d'une courbe du troisième ordre.

Ces résultats sont conformes à ceux que Maclaurin trouve par une marche très-différente, pages 100, 101 et 102.

On voit sans difficulté que le point S, d'où partent les perpendiculaires aux tangentes de la courbe donnée U, est un point multiple de la courbe Z, dont l'ordre de la multiplicité est égal à la *classe* de la courbe U, et par conséquent un point double dans le cas d'une conique.

XIV.

Je ne multiplierai pas davantage ces applications des méthodes de la géométrie moderne. Les exemples précédents suffisent, je crois, pour montrer que ces méthodes ont (du moins dans cet ordre de recherches) autant de généralité, d'uniformité et de précision que l'analyse algébrique elle-même. La *Géométrie organique* fournirait matière à beaucoup d'autres rapprochements de ce genre. Je ne puis qu'y renvoyer le lecteur. Cet ouvrage, qui est l'un des titres de gloire de Maclaurin, est peut-être trop peu connu en France. Mais ce qui l'est sans doute encore moins, c'est la préface du livre. Cette préface, écrite en latin, est fort belle, et peut donner une juste opinion de l'esprit élevé de Maclaurin, que l'on ne connaît guère que comme géomètre. C'est tout à la fois un beau morceau de littérature et une protestation éloquente contre des tendances fâcheuses qui parfois se sont renouvelées depuis l'époque où le géomètre anglais tentait de les combattre.

La traduction qui suit pourra donner une idée de cette pièce :

« Quand on songe que c'est surtout aux progrès de la Géométrie » que l'esprit humain doit d'avoir enfin soulevé les voiles qui, pen- » dant tant de siècles, lui ont caché les lois sublimes de la philosophie » naturelle; quand on passe en revue les brillantes découvertes dont » cette science a été le principe dans les arts utiles à l'humanité, ce » serait se montrer bien ingrat envers elle que de mépriser les efforts, » quels qu'ils soient, qui tendent à agrandir son domaine, et de ne » pas reconnaître qu'elle mérite en première ligne d'être cultivée par » les hommes qui se vouent à la recherche de la vérité. Ceux mêmes » qui, au premier abord, ne saisiraient pas l'utilité pratique de ce » genre de spéculations, n'oseront pas blâmer les efforts qui ont pour » objet le progrès des mathématiques pures, quand ils se rappelleront » les conséquences aussi belles qu'imprévues que parviennent à en » tirer avec le temps les esprits ingénieux qui les mettent en œuvre.

» Mais si la Géométrie mérite d'être cultivée avec ardeur, ce n'est » pas, j'ose le dire, autant en vue des applications plus ou moins im- » portantes qu'on en peut faire, qu'à cause de cette beauté naturelle » dont elle brille, et de ces jouissances intimes et délicates qu'y puise » l'esprit humain et qui ont plus d'un rapport avec celles que font » naître les études littéraires si heureusement nommées par les Anciens » *humaniores litteræ*. En effet, quiconque a médité sur les choses qui » font le charme de la vie, reconnaît sans peine qu'elles ont toutes » pour fondement le sentiment de l'ordre et de la proportion, et que » là est la source de toute beauté. Notre intelligence a reçu du souve-

» rain Créateur cette faculté particulière de n'être sensible qu'aux » choses où elle distingue une harmonie naturelle, et d'éprouver une » répugnance instinctive pour toutes celles qui manquent de cette » juste proportion, quel que soit d'ailleurs leur degré d'importance.

» D'où provient, par exemple, le charme de la musique? Est-ce des » sons eux-mêmes? Non sans doute, puisqu'ils ne font éprouver aucun » plaisir quand on les entend isolément. Ce qui captive en eux, ce qui » émeut, c'est leur succession habilement ménagée, c'est l'harmonie » qui résulte du rapport commensurable de leurs vibrations concor- » dantes. Il en est de même en littérature. Ce qui plaît dans tous les » genres d'écrire, c'est, après la vérité, un sage arrangement des idées; » c'est l'ordre lumineux, la méthode nette et facile avec laquelle l'au- » teur a su les grouper et les exprimer. Et la vérité elle-même, dont » cette forme harmonieuse n'est que l'ornement, qu'est-elle si ce n'est » cet ordre resplendissant que l'esprit attentif parvient à découvrir, » soit dans la sphère immuable des idées abstraites, soit dans le do- » maine compliqué des faits contingents?

» Cette force irrésistible du sentiment de la proportion paraît avoir » été si bien appréciée par les anciens philosophes, qu'ils ont fait con- » sister la vertu elle-même dans un accord parfait, dans une juste » proportion des diverses affections de l'âme, et qu'ils n'ont pas craint » d'affirmer que *tout écart de passion a pour principe une violation des » lois de la mesure et des rapports;* violation qui conduit à établir » des rapprochements faux entre ce qui est fini et ce qui n'a pas de » bornes; entre les grandes choses et les petites; entre les parfaites et » les imparfaites; enfin entre le bien et le mal.

» Que faut-il de plus pour nous faire comprendre la cause précise » de ces jouissances que font éprouver à l'esprit les théories abstraites » de toutes les sciences et surtout des sciences mathématiques, et pour » faire ressortir tous les titres que la Géométrie présente à nos louanges » et à nos hommages?

» Sans doute il n'est personne aujourd'hui qui ne reconnaisse l'ex- » cellence et la grandeur de la philosophie mathématique. C'est elle » qui nous a initiés au langage sublime que parlent les cieux, et qui » nous a appris à lire dans le livre éclatant que l'univers étale à nos » regards. Soit que, nous attachant à un seul corps céleste, nous cher-

» chions à pénétrer les secrets de son mouvement propre, soit que, » jetant nos regards sur l'ensemble des mondes, nous nous efforcions » de découvrir la structure et la disposition du système, c'est cette » philosophie qui nous sert de guide, qui nous fait scruter l'ordre su- » prême et l'harmonie de l'univers, et qui nous laisse aussi éblouis de » la beauté de tant de merveilles, que confondus de la majesté et de la » puissance de son éternel Auteur.

» Les mathématiques pures, qui revendiquent à bon droit la plus » large part de cette gloire incontestée, ne semblent pas d'abord, il » est vrai, devoir procurer d'aussi vives jouissances; et pourtant com- » bien d'aperçus magnifiques elles ouvrent à l'esprit qui est sensible à » l'harmonie et à la proportion! Celui qui s'abandonne aux spécula- » tions abstraites de la Géométrie, soit qu'il cherche à découvrir les » diverses propriétés d'une ligne ou d'une figure particulière, soit qu'il » étudie celles d'une famille entière de lignes, ou de tout le groupe » qui réunit les familles distinctes, soit enfin qu'il s'attache aux carac- » tères plus généraux qui sont communs à tous ces groupes, celui-là, » disons-nous, peut suivre dans ses développements et dans son infinie » variété toute idée préconçue de proportion et par conséquent de » beauté. Car parmi toutes les lois existantes ou simplement possibles » d'harmonie et de proportion, il n'en est pas une seule qui ne trouve » son application dans quelque courbe, et qui n'ait ainsi sa représen- » tation sensible. C'est à la sagacité du géomètre qu'il appartient de » découvrir, dans chaque cas, cette courbe spéciale qui concrétise sa » conception abstraite, et ce travail qui la confirme est en même temps » merveilleusement propre à accroître les forces et la pénétration de » l'esprit. Mais cela même nous conduit à des considérations d'un » ordre plus élevé. En effet, soit que la Géométrie pure nous dévoile » les mystères du monde réel, soit qu'elle nous permette de prévoir et » de préciser les phénomènes d'un monde imaginaire qui serait gou- » verné par des lois différentes de celles que nous connaissons, elle » nous pénètre sans cesse de la sagesse profonde du grand Architecte » de l'univers, en nous faisant reconnaître partout, pendant la durée » limitée de notre vie et dans l'espace borné que nous embrassons, » des ouvrages dignes de sa providence et de sa toute-puissance.

» C'est ainsi que les théories de la Géométrie pure confinent aux

» questions les plus élevées de notre destinée et de notre nature mo-
» rale, auxquelles on les croirait d'abord si étrangères. Elles y ouvrent
» une voie naturelle et pleine de charme, dans laquelle on ne saurait
» s'engager avec trop de confiance, en suivant la trace de tous les
» grands hommes qui nous en ont donné l'exemple, soit dans l'anti-
» quité, soit dans les temps modernes »