JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. BRASSINE

Des termes qui complètent la formule générale de la mécanique analytique dans le cas du frottement

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 2 (1857), p. 145-148.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1857_2_2__145_0>

DES TERMES QUI COMPLÈTENT LA FORMULE GÉNÉRALE DE LA MÉCANIQUE ANALYTIQUE DANS LE CAS DU FROTTEMENT;

PAR M. E. BRASSINE.

Le principe des vitesses virtuelles, qui sert de base à la Mécanique analytique, a été étendu et généralisé par Lagrange au moyen de la méthode des multiplicateurs. Par cette méthode, les équations de condition, entre les points du système, sont employées comme des forces, et toutes les questions sont ramenées au cas le plus simple, celui d'un système libre. Si, par exemple, un point x', y', z' est assujetti à demeurer sur une surface $L = 0$, on ajoute aux moments des forces le terme $\lambda \delta L$; λ étant un multiplicateur dont le rapport à la pression normale N est donné par la relation

$$N = \lambda \sqrt{\left(\frac{dL}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz'}\right)^2}.$$

Si la pression N fait naître un frottement f N, que nous supposerons d'après Coulomb indépendant de l'étendue des surfaces en contact, nous pourrons considérer dans le plan tangent à la surface $L = 0$ un point retenu par une force de résistance f N, résistance qui devra entrer dans la formule d'équilibre, bien que sa direction ne soit pas complétement déterminée ; pour cet effet, prenons les équations de la normale au point x', y', z' de la surface $L = 0$: ces équations sont

$$\frac{dL}{dz'}(x - x') - \frac{dL}{dx'}(z - z') = 0, \quad \frac{dL}{dz'}(y - y') - \frac{dL}{dy'}(z - z') = 0.$$

En désignant par I une quantité indéterminée, un plan normal quelconque passant par le même point aura pour équation

$$\frac{dL}{dz'}(x - x') + I\frac{dL}{dz'}(y - y') - \left(\frac{dL}{dx'} + I\frac{dL}{dy'}\right)(z - z') = 0;$$

nous pourrons supposer la résistance f N perpendiculaire à ce plan, et exprimer les cosinus des angles qu'elle fait avec les axes des x, y, z par

$$\frac{1}{R}\frac{dL}{dz'},\quad \frac{I}{R}\frac{dL}{dz'},\quad -\frac{1}{R}\left(\frac{dL}{dx'} + I\frac{dL}{dy'}\right),$$

en faisant

$$R = \sqrt{(1+I^2)\left(\frac{dL}{dz'}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dx'} + I\frac{dL}{dy'}\right)^2}.$$

Mais la résistance fN agit en sens contraire d'une force perpendiculaire au plan normal, dont le moment serait estimé d'après le procédé de Lagrange; par conséquent, le terme qui devra être ajouté à $\lambda\delta L$ dans le cas du frottement sera

$$-\frac{fN}{R}\left[\frac{dL}{dz'}\delta x' + I\frac{dL}{dz'}\delta y' - \left(\frac{dL}{dx'} + I\frac{dL}{dy'}\right)\delta z'\right].$$

Les conditions du problème feront trouver dans chaque cas les valeurs de λ, I, et par suite de N et fN.

Si les surfaces en contact, dans un système de corps, sont de nature différente, il faudra pour chacune d'elles prendre une valeur particulière du coefficient f. Par cette extension de la formule de Lagrange, les questions d'équilibre dans lesquelles on fait entrer la considération du frottement, sont ramenées à un procédé analytique uniforme. De plus, la généralité de la méthode fait ressortir dans quelques cas l'insuffisance de solutions fondées sur des constructions géométriques.

Nous nous bornerons à indiquer succinctement l'application de la formule générale à deux problèmes :

1°. Supposons un point sollicité par des forces P, Q,..., en équilibre sur un héliçoïde, en tenant compte du frottement du point sur la surface.

L'équation d'un héliçoïde dont les génératrices font un angle $\frac{\pi}{2} - 6$

avec l'axe des z est

$$L = z - r \operatorname{tang} 6 - r \operatorname{tang} \alpha . \varphi - \gamma = 0 :$$

α est l'angle avec l'horizon des hélices que l'on obtient en assignant diverses valeurs à r; r et φ sont comptés sur un plan perpendiculaire aux z, et le pas des hélices $2\pi r \operatorname{tang} \alpha$ est constant.

Si le point placé sur l'héliçoïde a pour coordonnées z, r, φ, nous pouvons prendre le rayon r pour axe des x, une perpendiculaire à r pour axe des y, $dx = dr$, $dy = rd\varphi$; par suite et sans rapporter l'héliçoïde à ces nouvelles coordonnées, on aura pour le point que nous considérons

$$\frac{dL}{dr} = 1, \quad \frac{dL}{dx} = -\operatorname{tang} 6, \quad \frac{dL}{rd\varphi} = \frac{dL}{dy} = -\operatorname{tang} \alpha.$$

Si de plus ce point est retenu à une distance constante r de l'axe des z, la relation $x = r$ introduira dans l'équation d'équilibre un terme $\mu\delta x$. Mais, dans ce cas, le frottement qui n'a lieu que par un glissement possible du point sur la surface, sera nul dans le sens des x; la composante $\frac{-fN}{R}$, dans cette direction, étant égale à zéro, R et par suite I deviendra infini. Avec ces données, on peut écrire immédiatement les trois équations d'équilibre d'un point sollicité par des forces P, Q, N, $-f$N, et l'on trouve les résultats connus.

Si l'on suppose $\alpha = 0$, $6 = 0$, les formules de l'héliçoïde deviendront celles du plan incliné.

2°. Pour trouver l'équilibre d'un tour, dont les tourillons sont en contact avec deux surfaces $L = 0$, $L' = 0$, nous supposerons l'axe du tour pris pour la ligne des x, et les tourillons cylindriques de rayons ρ, ρ' en contact avec des plans tangents aux surfaces $L = 0$, $L' = 0$ aux points m, m'. Ces plans touchant aussi les tourillons seront perpendiculaires au plan des y, z, et leurs équations auront la forme

$$z - ay + \rho\sqrt{1 + a^2} = 0,$$

$$z - a'y + \rho'\sqrt{1 + a'^2} = 0.$$

Avec ces données, et en appelant N, N′ les pressions exercées au contact des tourillons, et P, P′,..., Q, Q′,..., les forces qui sollicitent le système, il suffira d'écrire les six équations d'équilibre d'un corps solide. Tous les cas particuliers se déduiront aisément des formules générales.