JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

LÉOPOLD KRONECKER

Sur une formule de Gauss

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 1 (1856), p. 392-395.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1856_2_1__392_0>

SUR UNE FORMULE DE GAUSS;

PAR M. LÉOPOLD KRONECKER.

Si l'on désigne par n un nombre premier impair, par a et b respectivement les résidus et les non résidus (pris positivement) de n, et que l'on fasse

$$\omega = \cos\frac{2\pi}{n} + \sqrt{-1}.\sin\frac{2\pi}{n},$$

on aura l'équation

$$\text{(I)} \qquad \Sigma\omega^a - \Sigma\omega^b = \pm\sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}}.n},$$

que l'on déduit aisément de la théorie des équations binômes. Des méthodes dont l'usage est très-fréquent dans cette théorie suffisent même pour fixer le signe du radical, ce que je vais exposer en peu de mots.

On a par les considérations les plus simples

$$\text{(II)} \qquad \Pi\left[\omega^{2k-1} - \omega^{n-(2k-1)}\right] = +\sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}}.n},$$

où le signe Π s'étend à toutes les valeurs de $k = 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}$. Donc, pour faire disparaître l'ambiguïté de l'équation (I), il faut décider si, dans l'égalité

$$\text{(III)} \qquad \Sigma\omega^a - \Sigma\omega^b = \varepsilon.\Pi\left(\omega^{2k-1} - \omega^{n-2k+1}\right),$$

la lettre ε a la valeur $+1$ ou -1.

Désignons par $F(x)$ la fonction entière de x à coefficients entiers que voici :

$$\Sigma x^a - \Sigma x^b - \varepsilon.\Pi\left(x^{2k-1} - x^{n-2k+1}\right).$$

Cela posé, il résulte de l'équation (III) que la fonction $F(x)$ s'annule pour $x = \omega$; donc elle contiendra le facteur $(x - \omega)$. Or, ce facteur étant en même temps un des facteurs linéaires de la fonction irréductible $\frac{x^n - 1}{x - 1}$, il faut que le polynôme $F(x)$ soit divisible par cette fonction même. Observons enfin que la fonction $F(x)$ s'annule pour $x = 1$, c'est-à-dire qu'elle doit contenir le facteur linéaire $(x - 1)$, d'où l'on voit que la fonction $F(x)$ doit être divisible par $(x^n - 1)$, et le quotient sera évidemment une fonction entière de x à coefficients entiers. C'est pourquoi l'on peut poser

$$\begin{aligned} &\Sigma x^a - \Sigma x^b - \varepsilon . \Pi (x^{2k-1} - x^{n-2k+1}) \\ &= (x^n - 1)(A + Bx + Cx^2 + \ldots + Hx^h), \end{aligned}$$

A, B, C,..., H désignant des nombres entiers. En substituant e^z au lieu de x, il vient

$$\text{(IV)} \qquad \left\{ \begin{aligned} &\Sigma e^{az} - \Sigma e^{bz} - \varepsilon \Pi [e^{(2k-1)z} - e^{(n-2k+1)z}] \\ &= (e^{nz} - 1)(A + Be^z + Ce^{2z} + \ldots + He^{hz}). \end{aligned} \right.$$

En développant le facteur $[e^{(2k-1)z} - e^{(n-2k+1)z}]$ en série, le premier terme sera $(4k - 2 - n) . z$; par suite, le premier terme dans le développement du produit Π sera

$$z^{\frac{n-1}{2}} . \Pi (4k - 2 - n).$$

Donc en développant toutes les parties de l'équation (IV) en séries suivant les puissances de z, et en égalant les coefficients du terme $z^{\frac{n-1}{2}}$, on aura

$$\text{(V)} \qquad \frac{\Sigma a^{\frac{n-1}{2}} - \Sigma b^{\frac{n-1}{2}}}{1.2.3\ldots\frac{n-1}{2}} - \varepsilon . \Pi (4k - 2 - n) = \frac{M}{N},$$

M et N désignant des nombres entiers. Le numérateur M sera évidemment un multiple de n, parce que, dans le développement de $(e^{nz} - 1)$, les numérateurs des coefficients sont tous divisibles par n. Ensuite on voit aisément que le dénominateur N ne pourra contenir de facteurs premiers que ceux par lesquels le produit $1.2.3\ldots\frac{n-1}{2}$ soit divisible. Donc, N étant premier à n, l'équation (V) fournit la congruence

$$\Sigma a^{\frac{n-1}{2}} - \Sigma b^{\frac{n-1}{2}} \equiv \varepsilon.1.2.3\ldots\frac{n-1}{2}\cdot\Pi(4k-2n) \quad (\text{mod. } n),$$

ou, en observant que l'on a

$$a^{\frac{n-1}{2}} \equiv +1, \quad b^{\frac{n-1}{2}} \equiv -1,$$

il vient

$$n-1 \equiv \varepsilon.1.2.3\ldots\frac{n-1}{2}\cdot\Pi(4k-2-n) \quad (\text{mod. } n),$$

et comme, par le théorème de Wilson, le produit qui est multiplié par ε, se trouve congru à -1 suivant le module n, on a enfin

$$1 \equiv \varepsilon \quad (\text{mod. } n),$$

d'où il résulte que la lettre ε doit être déterminée par l'égalité $\varepsilon = +1$ dans l'équation (III), et qu'il faut rejeter par suite le signe inférieur dans l'équation (I).

J'ajoute encore une remarque : Le problème en question étant résolu par des considérations plus générales dans les deux Mémoires célèbres de Gauss et de M. Dirichlet, j'ai eu en vue seulement de donner une méthode qui puisse s'expliquer facilement dans des leçons sur la théorie des équations binômes. En considérant cette méthode que je viens d'exposer, on voit que j'ai réussi à trouver la valeur exacte de ε en me bornant à déterminer la valeur à laquelle ε est congrue suivant le module n. C'est en ce point que la méthode exposée ci-dessus ressemble à celle que M. Cauchy a donnée dans un Mémoire publié dans le tome V de ce Journal (page 161 et suivantes). Mais les moyens que j'ai employés pour obtenir le résultat

$$\varepsilon \equiv 1 \quad (\text{mod. } n),$$

sont tout à fait différents de ceux dont M. Cauchy s'est servi pour y parvenir. En effet, le moyen principal et fort ingénieux de cet illustre auteur consiste à remplacer dans l'équation (III) tous les termes ω^h par $\left(\frac{h}{n}\right)$, et à changer alors l'égalité en une congruence suivant le module n. Cela est permis, il est vrai, si préalablement on imagine que le produit du second membre de l'équation est développé suivant les puissances de ω; mais pour le démontrer, il faudrait encore quelques considérations assez simples, dont l'énonciation complète nuirait cependant à la brièveté.