JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

CH. HOUSEL

Les porismes d'Euclide

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 1 (1856), p. 193-209.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1856_2_1__193_0>

LES

PORISMES D'EUCLIDE,

PAR M. CH. HOUSEL.

Outre ses *Éléments*, Euclide avait composé plusieurs traités, dont la plupart ne nous sont point parvenus. Le plus célèbre de tous, quoiqu'il soit perdu, et peut-être même à cause de cela, portait le titre de *Porismes*. Il nous est connu seulement par l'analyse que Pappus en a faite et par quelques mots de Proclus.

Plusieurs illustres géomètres ont émis à ce sujet des opinions très-diverses, et, par conséquent, douteuses; aussi n'aurions-nous jamais eu le courage de traiter une question aussi difficile, si nous n'avions eu entre les mains une publication récente de M. Breton de Champ, où l'auteur, ne se contentant pas des commentaires et des traductions latines, traduit lui-même le passage de Pappus, dont il cite même le texte dans les endroits obscurs.

Dans ce travail, d'une érudition si remarquable, l'auteur semble hésiter à poser des conclusions; nous aurions mieux fait peut-être d'imiter cette sage réserve, mais, avant d'exposer nos idées, nous devons faire voir en quoi consistent les difficultés de la question.

La première est dans le titre lui-même. On voit que *Porisme* est un mot grec, non pas traduit, mais francisé, ce qui prouve qu'on ne l'a pas bien compris. Nous allons donc remonter jusqu'à son étymologie, ce qui ne suffira pas sans doute pour l'expliquer complétement, mais il faut toujours commencer par là.

On trouve facilement pour racine le mot πόρος, qui signifie *passage*, comme l'indique le mot français *pore*, lequel est venu directement du grec sans l'intermédiaire du latin. De là vient πορίζειν, que l'on traduit quelquefois par *porismer*, mais qui, en général, veut dire *frayer un passage*, et, par conséquent, *découvrir*. Enfin le mot πορίσμα, en langage ordinaire, veut dire toute chose qu'on apporte, et, par suite, un gain. C'est dans ce sens, ainsi que l'explique Proclus, que ce mot, employé comme terme de géométrie, veut souvent dire une proposition qui s'ajoute à celle que l'on a démontrée, et, par conséquent, un corollaire; mais il a eu soin de prévenir que les *Porismes* d'Euclide ont un sens plus étendu; en effet, on ne concevrait pas un recueil de corollaires.

Mais en langage ordinaire, πορισμα veut dire encore *provisions* (que l'on apporte), et M. Terquem nous a dit avoir trouvé, dans Xénophon, ce mot signifiant *magasin* (pour les armées). De là ce savant conclut pour le traité d'Euclide une explication très-simple, qui consiste à y voir, non pas un ordre déterminé de questions, mais seulement un *magasin* ou un *recueil de propositions géométriques*. Cependant il ne faudrait pas exagérer cette idée en pensant que toutes les propositions de ce traité fussent isolées et décousues; M. Terquem lui-même admet qu'un certain nombre d'entre elles se rapportait à la théorie des transversales.

Avant d'aller plus loin, on pourrait s'étonner de voir que l'analyse de Pappus ait laissé tant d'incertitude sur la nature des propositions et sur l'esprit même de l'ouvrage, on pourrait surtout demander comment il se fait que l'on cherche encore le sens du mot *porisme* qui sert de titre. Cependant Pappus cherche à le définir; il expose, comme nous le verrons bientôt, les idées que les anciens et les modernes ont eues à ce sujet, mais ce qu'il en dit est assez obscur, et l'on est presque tenté de croire que lui-même ne comprenait pas bien clairement quelle avait été la pensée générale d'Euclide.

Nous ne parlons ici que de l'ensemble, car il est bien évident que Pappus était plus capable que personne de comprendre Euclide; mais il faut observer que ces deux illustres géomètres étaient séparés par un intervalle de six siècles, et que le sens d'un mot peut s'altérer dans un si long espace de temps. Euclide n'avait sans doute pas défini le *porisme* parce que tous les savants de son époque savaient ce qu'il voulait dire, mais ce mot n'étant pas de nature à s'expliquer par lui-même, comme par exemple le titre d'un traité sur les *contacts*, les contemporains de Pappus étaient divisés sur la signification des porismes, comme on l'est encore maintenant; à plus forte raison, il en était de même à l'époque de Proclus.

Aussi, pour trouver un sens aux définitions que ces deux géomètres donnent des porismes, nous jugeons nécessaire d'énoncer d'abord le porisme sur lequel ont porté spécialement les discussions des géomètres, car c'est à peu près le seul dont l'énoncé soit donné complétement par Pappus. Encore nous devons dire que cet énoncé n'avait pas été deviné avant Robert Simson.

Si, dans un système de quatre droites se coupant deux à deux en six points, les trois situés sur l'une d'elles sont donnés (ou les deux quand cette droite est parallèle à l'une des trois autres), et que deux des trois autres points soient assujettis à demeurer chacun sur une droite fixe, le dernier point demeurera pareillement sur une droite fixe qui passera par le point de concours des deux autres droites fixes.

La dernière partie, qui a rapport au point de concours des trois droites, n'est point énoncée par Pappus; nous croyons qu'elle est due à M. Chasles.

Sans donner ici la démonstration que Pappus indique seulement dans les lemmes qu'il joint à son analyse, nous remarquerons que la figure est facile à construire.

Soient A, B, C, D, E, F les six points en question, prenons pour points fixes les trois points F, A, D, et supposons, pour fixer les idées, que le point A soit situé entre F et D; par ce point A menons une droite quelconque qui coupe en B la droite fixe BH et en E l'autre droite fixe EH; enfin, joignons FB et ED qui se coupent en C. Si nous faisons la même construction avec une autre droite passant par le point A, ce qui donne les deux points B', E' et le troisième C', les trois points C, C' et H seront en ligne droite.

Il faut voir maintenant comment plusieurs illustres mathématiciens ont interprété les porismes, et leurs opinions nous faciliteront encore l'intelligence des définitions et des explications de Pappus.

Nous commencerons par Fermat, quoiqu'il soit antérieur à R. Simson, et par suite à la découverte de l'énoncé précédent, mais il est impossible de passer complétement sous silence l'opinion d'un homme aussi éminent. Il imagine plusieurs théorèmes qui valent peut-être mieux que ceux d'Euclide, mais cela ne prouve point que ce soient les mêmes. On remarque parmi les propositions de Fermat, le théorème de

Desargues sur l'involution des six points donnés par une transversale qui coupe un quadrilatère inscrit dans une conique. Du reste, il a la confiance d'avoir deviné, quoique avec peine, toute la pensée d'Euclide, et à cette occasion il s'enthousiasme au point de citer Virgile : *J'ai tâtonné longtemps dans les ténèbres,* s'écrie l'illustre Toulousain, *mais la vérité s'est présentée à moi :*

. . . Tandem se clara videndam
Obtulit, et purâ per noctem in luce refulsit [*].

Autant que nous pouvons juger de l'opinion de Fermat sur les porismes, elle se rapproche de celle de M. Chasles, que nous examinerons bientôt.

Cependant nous nous arrêterons sur les travaux de R. Simson, à l'occasion desquels nous jetterons un premier coup d'œil sur le texte et les définitions données par Pappus.

La principale gloire de R. Simson est d'avoir compris le porisme que nous avons énoncé précédemment. Puissamment secondé par ce premier succès, il s'attacha à compléter l'explication si ardemment désirée de cette grande énigme. Cependant il semble plutôt avoir deviné la forme sous laquelle Pappus présente les porismes, que le fond même de la pensée d'Euclide.

Nous allons citer le texte latin de R. Simson, qui demande à être commenté plutôt que traduit.

Porisma est propositio in quâ proponitur demonstrare rem aliquam, vel plures datas esse, cui, vel quibus, ut et cuilibet ex rebus innumeris non quidem datis, sed quæ ad ea quæ data sunt eamdem habent relationem, convenire ostendendum est affectionem quamdam communem in propositione descriptam.

Pour éclairer cette définition, il faut la comparer avec l'énoncé du porisme déjà connu et avec le texte de Pappus.

Dans les porismes, comme dans toutes les propositions de mathématiques ou autres, on distingue l'hypothèse (ἡ ὑπόθεσις) et le résultat (τὸ ζητούμενον, c'est-à-dire la chose que l'on cherche) ; mais ici Pappus fait observer que l'hypothèse elle-même se subdivise en deux parties,

---

[*] *Enéide*, liv. II, v. 590.

dont la première est l'hypothèse proprement dite, et dont la seconde peut prendre le nom d'*accident* (τὸ συμϐεϐηκος).

On peut appliquer au porisme déjà cité ces différentes subdivisions, qui deviendront plus faciles à comprendre par cet exemple : elles paraissent un peu subtiles, ce qui est particulier au génie grec, mais elles sont justes au fond, comme on va le voir.

Des deux parties de l'hypothèse, la première contient les *conditions fixes* du porisme, et la seconde, *l'accident*, contient les *conditions de la variabilité*. Ainsi, dans l'exemple précédent, où l'on considère les six sommets d'un quadrilatère complet, l'*hypothèse* consiste en ce que trois de ces six points sont fixes ; l'*accident* exige que deux des autres points glissent sur deux droites données : tout cela constitue l'hypothèse complète ; enfin le *résultat* consiste en ce que, d'après ces conditions, le dernier point décrit une droite.

On peut croire que nous nous hâtons d'étendre à tous les porismes une disposition établie pour un seul, mais il faut remarquer que ce porisme de Pappus en résume dix d'Euclide, et que, d'après Pappus, la même subdivision s'applique à tous les porismes, même à ceux qu'il n'énonce que d'une manière très-incomplète.

D'après cela, voici l'idée qui s'est emparée de nous à la lecture du travail de M. Breton de Champ, et qui s'est fortifiée par la réflexion, mais que nous n'osons énoncer qu'avec une crainte bien naturelle, quand il s'agit de prononcer sur un sujet où tant d'illustres géomètres se sont déjà exercés.

Nous pensons que l'ouvrage d'Euclide roulait sur des questions assez cultivées aujourd'hui, mais moins répandues chez les anciens, où l'on considère certaines parties des figures, mobiles sur certaines autres parties fixes : pour en donner un autre exemple, en dehors de Pappus et d'Euclide, nous considérons comme un porisme la description organique des coniques par Newton, conçue ainsi qu'il suit :

Si deux angles donnés tournent autour de leurs sommets de manière que deux de leurs côtés se coupent sur une droite fixe, les deux autres côtés se couperont sur une conique.

Ici, l'*hypothèse* consiste dans la fixité des sommets et la grandeur constante des angles ; l'*accident* exige que deux côtés mobiles se coupent sur une droite donnée; et enfin, le *résultat* établit que les deux autres côtés engendrent une conique.

On voit donc que nous rattachons la définition du porisme à l'idée du mouvement. Pour essayer de justifier cette opinion, nous ferons remarquer qu'elle s'accorde avec l'étymologie du mot *porisme,* puisque sa racine, πόρος, signifiant *passage*, entraîne l'idée de mobilité.

Ainsi, selon nous, le livre des Porismes pourrait s'intituler en français : *Traité des figures en mouvement.*

Il sera facile de constater, d'après le texte de Pappus, que tous les énoncés de porismes qu'il donne, même les plus incomplets, indiquent toujours, comme nous l'avons dit, quelque chose de mobile.

Mais avant d'exposer notre idée, nous aurions dû peut-être achever de résumer celles des géomètres qui ont discuté cette question; c'est ce que nous allons faire en prenant pour guide M. Breton de Champ; seulement nous en laisserons de côté quelques-unes auxquelles lui-même n'attribue qu'une importance secondaire.

Hoëne Wronski pensait que les porismes étaient des problèmes dont la solution était *nécessairement possible*, tandis que les problèmes ordinaires étaient ceux dont la solution était aussi possible, mais sans que cette possibilité fût évidente.

M. Poncelet croit que les porismes ont été découverts par Euclide au moyen des considérations de la perspective; il est vrai que les propriétés projectives peuvent y conduire, mais il n'est pas évident qu'elles aient été employées par Euclide.

M. Chasles adopte, quant à la forme des porismes, l'explication de Robert Simson, dont nous avons parlé précédemment, et sur laquelle nous reviendrons plus tard; mais il va plus loin et cherche quel but se proposait Euclide en composant cet ouvrage. Il pense que ce but était de faciliter les recherches des géomètres en leur montrant une série de questions dans lesquelles on obtenait pour lieux géométriques des droites, des cercles et peut-être même des coniques : de sorte que, si un mathématicien, cherchant un lieu géométrique, parvenait à le ramener à un de ceux dont Euclide indiquait l'espèce dans ses porismes, son travail se trouvait simplifié considérablement : de plus, la méthode employée par Euclide était encore utile pour diriger les recherches dans des cas non plus identiques, mais seulement analogues.

Nous adoptons volontiers l'opinion de M. Chasles, seulement il nous semble que cette méthode d'Euclide était la considération du mouvement.

Quoi qu'il en soit, on peut, d'après M. Chasles, comprendre le porisme comme le *passage d'un lieu à un autre*, ce qui s'accorde encore très-bien avec l'étymologie. Voici un exemple qui éclairera ce qui précède.

Si l'on cherche le lieu des points tels que le rapport de leurs distances à deux points fixes soit constant, on le ramènera au lieu des points tels, que si on les joint à deux points fixes (différents des premiers), l'angle de ces nouvelles droites soit un angle droit : alors on voit que c'est un cercle.

Si l'on veut appliquer à cette proposition la subdivision de Pappus, on dira que l'*hypothèse* consiste dans la fixité des deux points et la constance du rapport, que l'*accident* suppose le point dont on cherche le lieu, placé à la rencontre des droites mobiles, et qu'enfin le *résultat* établit que ce lieu est une circonférence.

Ainsi M. Chasles pense que les porismes jouaient dans la géométrie ancienne un rôle analogue à celui des coordonnées de Descartes dans la géométrie moderne. On sait, en effet, que la transformation des coordonnées permet souvent de passer d'une certaine définition d'un lieu géométrique à une autre définition du même lieu, considéré sous un tout autre point de vue.

Après nous être ainsi préparé par l'examen des opinions de différents géomètres, il est temps d'aborder d'une manière plus étendue l'étude de Pappus lui-même, en commençant par observer à quelle occasion il s'est occupé des porismes.

Pappus nous apprend que cette considération est utile pour la recherche des lieux géométriques. Voici comment il s'exprime dans la préface de son septième livre des *Collections mathématiques*, qui est consacré au *lieu résolu* (τόπος αναλυόμενος).

« Ce qu'on appelle le *lieu résolu*, ô mon fils Hermodore, est,
» dans son ensemble, une matière à l'usage de ceux qui, après avoir
» étudié les éléments de la géométrie, veulent encore se mettre en état
» de résoudre les problèmes qui peuvent leur être proposés; c'est là

» son utilité. Il se compose d'écrits dus à trois géomètres : Euclide,
» l'auteur des *Éléments ;* Apollonius de Perge et Aristée l'Ancien. On
» y procède par voie d'analyse et de synthèse.

» Voici la liste de ces écrits dont se compose, comme nous l'avons
» dit, le *lieu résolu ;* d'Euclide, un livre des *données ;* d'Apollonius,
» deux livres de la *section de raison*, deux de la *section de l'espace*,
» deux de la *section déterminée*, deux des *contacts ;* d'Euclide, trois
» livres des *porismes ;* d'Apollonius, deux livres des *inclinaisons*, du
» même, deux livres des *lieux plans*, huit des *coniques ;* d'Aristée,
» cinq livres des *lieux solides ;* d'Euclide, deux livres des *lieux à la*
» *surface ;* d'Eratosthènes, deux livres des *moyennes* : en tout, trente-
» trois livres. »

On voit par là que les porismes servaient en effet à la recherche des lieux géométriques, mais que beaucoup d'autres considérations étaient utiles pour le même objet. On voit de plus que les Anciens avaient l'habitude de donner à leurs ouvrages, non pas de vagues dénominations, mais des titres particuliers, indiquant le sujet spécial de chacun d'eux. On peut donc croire que les porismes contenaient, comme les autres Traités cités par Pappus, une classe particulière de questions. Or, bien qu'il soit toujours possible, à la rigueur, comme dans le dernier exemple où M. Chasles croit voir un porisme, d'introduire l'idée du mouvement dans tous les lieux géométriques, puisqu'ils sont décrits par un point qui se déplace, nous croyons néanmoins que, dans tous les porismes d'Euclide, une ou plusieurs parties de la figure étaient véritablement mobiles, comme nous l'avons vu dans l'exemple deviné par R. Simson et dans la description des coniques par Newton.

On remarquera d'ailleurs que cette opinion n'est contraire à aucune de celles que nous avons exposées. Par exemple, on peut joindre l'idée de mouvement à la plupart des questions de la théorie des transversales, sinon à toutes.

Nous allons continuer à citer la traduction de M. Breton de Champ, sauf quelques points où nous nous permettrons de nous en écarter.

« Après les *contacts*, viennent les Porismes d'Euclide, recueil que
» rendent très-utile, pour l'analyse des problèmes et des théories,
» beaucoup de choses dont la nature offre une abondance illimitée. »

Le mot que nous avons traduit par *des théories* est écrit γενῶν dans les manuscrits, ce qui signifie *des genres*. Nous entendons par là certains genres de problèmes, c'est-à-dire un ensemble de questions analogues entre elles. Cette expression *théorie* est un peu étendue pour cette idée; cependant on dit quelquefois : la théorie du quadrilatère inscrit, la théorie du contact des cercles, etc. M. Breton de Champ remplace γενῶν par γενομένων qu'il traduit*: des conséquences des hypothèses.*

« Il n'a toutefois été ajouté aucun porisme à ceux qu'Euclide le pre-
» mier a écrits, si ce n'est par certains géomètres qui, avant nous, ont
» mal à propos placé à la suite de quelques-uns de nouvelles dé-
» monstrations; chaque porisme étant à la vérité susceptible de plu-
» sieurs démonstrations, comme nous l'expliquerons, mais Euclide
» n'en donnant chaque fois qu'une seule extrêmement claire. »

Ici nous sommes, avec M. Breton de Champ, dans un dissentiment plus grave que le précédent; il traduit : « Chaque porisme étant, à la » vérité, *présenté plusieurs fois....* »

Du reste, voici le texte : ἑκάστου μὲν πλῆθος ὡρισμένον ἔχοντος ἀποδείξεων, ce qui veut dire, mot à mot : *Chacun à la vérité ayant un nombre limité de démonstrations.*

Mais nous admettons le sens de M. Breton de Champ, quand il parle d'une démonstration d'Euclide *extrêmement claire*. Néanmoins, le texte porte : ὑπεμφαίνουσαν, qui voudrait dire : *esquissée, indiquée à demi*. Cependant nous croyons qu'il a eu raison de traduire comme s'il y avait ὑπερφαίνουσαν.

« La théorie en est fine et naturelle, nécessaire et très-générale, et
» fait les délices de ceux qui savent voir et trouver (πορίζειν). Toutes
» ces choses ne sont, quant à leur *apparence* (εἴδη) [*], ni des théo-
» rèmes, ni des problèmes, mais tiennent en quelque sorte le milieu
» entre les deux; de sorte que les propositions qui ont ces choses pour
» objet peuvent être mises sous la forme de théorèmes ou de pro-
» blèmes; d'où il est résulté que, de beaucoup de géomètres, les uns
» estiment qu'elles doivent être classées parmi les théorèmes, tandis
» que d'autres, ne tenant compte que de la forme des propositions,
» les considèrent comme des problèmes. »

---

[*] Le traducteur rend ce mot par *nature*.

M. Breton de Champ cherche à éclaircir la confusion dont parle Pappus. L'énoncé du porisme que nous avons cité d'après R. Simson se terminait ainsi : ... *Le dernier sommet décrit une droite ;* alors la proposition a l'apparence τὸ εἶδος) d'un simple théorème. Mais M. Breton pense que, dans la rédaction d'Euclide, la fin du porisme précédent était conçue de la manière suivante : ... *Quel sera le lieu géométrique décrit par le dernier sommet ?*

On voit alors que la proposition présenterait l'apparence d'un problème, et cette idée se fonde sur le mot τὸ ζητουμένον (chose cherchée), qui indiquait chez les Anciens le résultat du porisme.

La question ainsi présentée devait être plus difficile pour ceux qui étudiaient la géométrie, aussi avait-on plus tard modifié les porismes en disant d'avance le résultat, qu'il suffisait ensuite de savoir démontrer. Cette observation explique, selon M. Breton de Champ, le passage suivant de Pappus [*].

« Mais les différences entre ces trois choses ont été mieux connues » des Anciens, ainsi qu'on le voit par leurs définitions ; car ils disaient : » Théorème est une vérité que l'on énonce et qu'il faut rendre évi- » dente par une démonstration ; problème est un but que l'on définit » et qu'il faut atteindre par une construction ; porisme est une chose » qu'on demande de découvrir. Cette définition a été changée par des » géomètres récents, lesquels, hors d'état de découvrir tous les po- » rismes (μὴ δυναμένων ἅπαντα πορίζειν), mais capables seulement, » à l'aide des éléments de géométrie, de démontrer le résultat sans » pouvoir le deviner (μὴ πορίζόντων δὲ τοῦτο), ont, sans tenir compte » de la définition précitée et de ce qui est enseigné, écrit ceci d'après » la condition accidentelle (l'*accident*, ἀπὸ συμβεβηκότος) : Le po- » risme est ce qu'il faut ajouter à l'hypothèse pour que celle-ci devienne » l'énoncé d'un théorème local. »

Nous nous sommes un peu écartés de M. Breton de Champ dans la traduction de ces mots : ἀπὸ συμβεβηκότος, qu'il rend ainsi : *d'après une circonstance particulière (à certaines propositions)*. Mais nous l'avons suivi dans la définition moderne du porisme, dont voici le texte : πόρισμά ἐστι τὸ λεῖπον ὑποθέσει τοπικοῦ θεωρήματος. En effet,

---

[*] Nous développerons bientôt nos idées à ce sujet.

nous avons vu que, si l'on ajoute *l'accident à l'hypothèse proprement dite*, cela complète cette hypothèse et permet d'arriver à l'énoncé du théorème local. Quant à la distinction à faire entre un lieu géométrique et un *théorème local*, elle est facile à saisir : Si l'on demande la nature de la ligne que décrit un point dans des circonstances données, la question s'appelle un *lieu géométrique;* si l'on donne d'avance la nature de cette ligne et qu'on demande seulement de démontrer le résultat, la question est un théorème local. Du reste, nous reviendrons sur cette définition du porisme.

L'ancienne définition, telle que la rapporte Pappus, est évidemment insuffisante pour donner l'idée du porisme; en voici le texte : *πόρισμα δὲ τὸ προτεινόμενον εἰς πορισμὸν αὐτοῦ τοῦ προτεινομένου.* Elle a l'inconvénient très-grave d'employer presque le mot à définir, car *πορισμὸς*, en langage ordinaire, signifie à peu près la même chose que *πόρισμα.*

Pappus observe ensuite que peu de géomètres ont compris les porismes (il n'est que trop facile de le croire), et qu'il est surtout presque impossible de réunir plusieurs porismes en un seul. Cependant il énonce, comme résumant dix des propositions du premier livre d'Euclide, le porisme que nous avons cité d'après R. Simson, et qui a rapport à un quadrilatère complet; il le généralise en l'étendant à un nombre quelconque de droites, et il ajoute avec une modestie bien remarquable :

« Il est vraisemblable que l'auteur des *Eléments* n'ignorait pas cette
» extension; mais il n'a fait qu'en poser le point de départ; et il pa-
» raît avoir répandu dans tous ses porismes les principes et les germes
» d'une foule de belles propositions. Il ne faut pas distinguer les po-
» rismes d'après les différences des *hypothèses*, mais d'après celles des
» *accidents* et des *résultats*. Toutes les hypothèses diffèrent les unes
» des autres, étant très-particulières, mais chacun des accidents ou des
» résultats se présente absolument le même dans plusieurs hypothèses
» différentes. »

On voit que ce passage justifie complétement ce que nous avons dit sur les trois parties de l'énoncé d'un porisme.

L'importance supérieure que Pappus attribue à l'*accident* et au *résultat*, sans doute d'après l'opinion d'Euclide lui-même, tient probablement à ce que l'*accident* indiquant la partie mobile de la figure, détermine l'essence même du porisme, et que le *résultat* donne la nature du lieu cherché, ce qui est, en général, le but de ces propositions.

Nous devons nous demander maintenant si tous les lieux géométriques étaient des porismes et si tous les porismes étaient des lieux géométriques.

Il est d'abord facile de reconnaître que tous les lieux n'étaient pas des porismes; cela se voit par la longue liste où Pappus indique tous les ouvrages nécessaires pour l'étude des lieux géométriques, et dans laquelle les porismes n'occupent pas une grande place; on le voit encore par une phrase qui précède celle que nous venons de citer, et où Pappus considère les lieux géométriques, *en mettant de côté les porismes*.

Quant à la question de savoir si tous les porismes étaient des lieux géométriques, elle est moins facile à résoudre; mais nous croyons que l'on peut encore répondre négativement. La preuve en est dans le porisme qui semble venir, dans le premier Livre, à la suite des dix porismes que Pappus résume en un seul.

Si de deux points fixes on mène deux droites se coupant sur une droite fixe, et que l'une des droites de jonction retranche d'une certaine droite fixe un certain segment à partir d'un point donné sur cette dernière, l'autre droite de jonction retranchera sur une autre droite un segment ayant avec le premier un rapport donné.

Cette traduction, presque littérale, présente quelque obscurité, que l'interprétation suivante, due encore à R. Simson, fait complétement disparaître.

Étant donnés deux points P, P′ *et une droite* IH, *si l'on mène les droites* PI, P′I *à un point quelconque de* IH, *et que* PI *détermine, sur une droite fixe* FH, *à partir du point donné* F, *un segment* FG, *on peut trouver une autre droite* F′H′, *et sur cette dernière un point* F′, *tels que le segment* F′G′, *déterminé par* P′I, *soit à* FG *dans un rapport donné.*

La droite et le point demandé peuvent s'obtenir comme il suit : Par le point P on mène PF, qui rencontre IH en R, et l'on joint RP′, qui passera en F′. D'autre part, on mène PQ parallèle à FH jusqu'à la rencontre de IH en Q, puis l'on joint QP′. La droite cherchée est parallèle à QP', et il ne reste plus qu'à la mener de manière que le segment F'G' soit à FG dans la raison donnée.

C'est surtout d'après cet énoncé que R. Simson semble avoir conçu la définition qu'il donne des porismes, et dont nous avons déjà cité le texte latin. Ici, en effet, on commence par affirmer la possibilité de trouver les choses que l'on doit déterminer ensuite.

Mais cet exemple montre que, si beaucoup de porismes se rattachaient à des lieux géométriques, il n'en était pas ainsi pour tous. En effet, il serait difficile, et surtout peu naturel, de transformer la question précédente de manière à en faire un lieu géométrique.

C'est ici que se termine ce que le texte de Pappus renferme de positif relativement aux porismes. Toutes les autres propositions que donnent sous ce nom divers auteurs, et notamment R. Simson, n'étant plus établies d'après des énoncés complets, ne sont que des restitutions douteuses, et personne ne peut affirmer qu'elles aient figuré dans le Traité d'Euclide.

Cependant nous ne pouvons nous dispenser d'examiner le reste du passage qui donne, sur la forme des porismes, des renseignements très-précieux. Pappus achève d'analyser Euclide d'une manière très-singulière, en supprimant les hypothèses des propositions, et conservant seulement les résultats. M. Breton de Champ observe judicieusement que cela ne doit pas tenir aux altérations des manuscrits, car il est impossible d'admettre un hasard systématique qui détruise toujours la même partie d'une foule d'énoncés. Cela tient donc à l'importance supérieure que Pappus accorde aux résultats sur les hypothèses, ainsi que nous l'avons déjà vu. Tous ces résultats, énoncés par Pappus, commencent par le mot ὅτι, *que*. Ici il y a évidemment quelque chose de sous-entendu : c'est sans doute le mot λέγω, *je dis*, comme dans la plupart des propositions de géométrie.

Comme nous allons le voir bientôt, Pappus cite, probablement d'après Euclide, un si grand nombre de résultats commençant tous par ce mot, ὅτι, qu'on ne peut se défendre de regarder cette formule comme générale dans tous les porismes d'Eulide. Cependant Pappus ne l'emploie pas dans ceux qu'il énonce complétement; mais puisqu'il lui arrive de réunir dix propositions en une seule, il est probable qu'il ne s'est pas toujours attaché à conserver la rédaction d'Euclide.

D'ailleurs il est facile de rétablir la formule indiquée dans les porismes que nous avons cités, et même le dernier énoncé devient plus clair. Ainsi, au lieu de dire : *L'autre droite de jonction retranchera,* etc., nous pouvons mettre : *Je dis que l'autre droite de jonction retranche,* etc. ; c'est-à-dire qu'il faut trouver une autre droite, et sur cette droite un point qui satisfassent aux conditions données.

Tout cela ne s'oppose nullement à la division que nous avons d'abord établie. Ainsi, l'hypothèse proprement dite consiste dans la fixité des points P et P′, des droites IH et FH et du point F ; l'*accident,* dans la mobilité des droites PI, P′I ; enfin le *résultat,* dans la détermination de la droite F′G′ et du point F′, d'après le rapport donné.

Il est aussi facile d'appliquer la formule indiquée au porisme du quadrilatère complet.

Voici, à ce qu'il nous semble, comment cet énoncé pouvait être rédigé par Euclide :

Si, dans un système de quatre droites se coupant deux à deux en six points, les trois situés sur l'une d'elles sont fixes, et que deux des trois autres soient assujettis à se mouvoir chacun sur une droite fixe :

Je dis que :

Le dernier sommet se meut aussi sur une droite.

En admettant la généralité de cette forme, nous croyons que ceux des porismes qui sont relatifs à des lieux géométriques étaient présentés sous l'apparence de théorèmes locaux. Cependant il restait toujours quelque chose à trouver ; car il ne suffit pas de connaître la nature d'une ligne, il faut encore déterminer ses éléments. C'est sans doute là ce qui, selon Pappus, embarrassait les géomètres modernes, lesquels, ne sachant pas résoudre tous les porismes (*μὴ δυναμένων ἅπαντα πορίζειν*), et se contentant de démontrer le résultat sans le trouver, faisaient consister la difficulté dans ce qui manquait à la proposition pour en faire un théorème local.

Cette difficulté est aussi frappante dans ceux des porismes qui ne se réduisent pas à des théorèmes locaux. Ainsi, dans celui que nous avons énoncé précédemment, *il fallait trouver une droite* F′H′, *et sur cette droite un point* F′, *tels que le segment* F′G′, *déterminé par* P′I, *fût à* FG *dans un rapport donné.* Pour cela, on devait d'abord, par la construction que nous avons indiquée, déterminer F′G′ et F′. Voilà ce qui embarrassait la plupart des contemporains de Pappus; ensuite il restait à démontrer que la droite et le point ainsi obtenus jouissaient effectivement de la propriété voulue. C'est à cela que se bornait le talent de plusieurs géomètres, *qui démontraient que telle solution était juste, mais ne savaient pas la trouver* : (δεικνύντων μόνον τοῦθ' ὅτι ἔστι τὸ ζητούμενον, μὴ ποριζόντων δὲ τοῦτο).

Pour donner l'idée de la manière dont Pappus tronque les énoncés des propositions d'Euclide, nous allons achever de citer l'analyse du premier Livre :

« Dans les porismes qui suivent, *je dis :*

» Que tel point décrit une droite donnée de position;

» Que le rapport de telle droite à telle autre est constant;

» Que le rapport de telle droite à une abscisse qu'elle détermine est
» constant;

» Que telle droite est donnée de direction;

» Que telle droite passe par un point fixe;

» Que telle droite a un rapport constant avec un segment intercepté
» entre elle et un point fixe;

» Que telle droite a un rapport constant avec une autre droite me-
» née de son extrémité variable;

« Que tel rectangle a un rapport constant avec le rectangle qui a
» pour côtés une certaine droite variable et une droite donnée;

» Que tel rectangle équivaut à un rectangle constant, plus un autre
» rectangle qui varie proportionnellement à une certaine abscisse.

» Que tel rectangle variable, pris seul ou avec un espace donné, a
» un rapport constant avec une certaine abscisse.

» Que telle droite variable, plus une autre droite proportionnelle à
» une seconde droite variable, est dans un rapport constant avec un
» segment mesuré à partir d'un point fixe.

» Que le triangle qui a pour sommet un point fixe et pour base une
» droite variable, est équivalent au triangle qui a pour sommet un
» autre point fixe, et pour base un segment mesuré à partir d'un
» point fixe.

» Que la somme de deux droites variables a un rapport constant
» avec un segment mesuré à partir d'un point fixe.

» Que telle droite détermine sur des droites données des droites » dont le produit est constant. »

Il serait trop long de copier tout ce qui a rapport aux deux autres Livres : les questions du second étaient relatives à des mesures de surfaces, et celles du troisième considéraient des circonférences, tandis que dans les deux premiers il ne s'agissait guère que de lignes droites. Mais l'on doit observer dans ces trois Livres, qu'il s'agit toujours *de lignes variables, de figures dont certaines parties étaient mobiles*, et c'est pour le faire voir que nous avons complétement transcrit tout ce que dit Pappus pour achever l'analyse du premier Livre.

L'auteur termine en disant que le *Traité des Porismes* contenait en tout cent soixante et onze théorèmes, et qu'il était accompagné de trente-huit lemmes : il donne même ces lemmes avec leurs démonstrations, faites, en général, au moyen des proportions que les anciens maniaient avec une grande habileté.

Ces lemmes sont peu remarquables en eux-mêmes; mais, pour en donner l'idée, nous citerons l'énoncé de celui que l'on appelait l'*autel*, parce que la figure présente à peu près la forme d'un autel ancien.

Dans un quadrilatère ABCD *dont les diagonales* AC, BD *se coupent en* O, *prenez respectivement sur* OB *et* OC *les distances* OE, OF, *telles que* EF *soit parallèle à* BC *et que* DF *soit parallèle à* AB; *la ligne* AE *sera parallèle à* DC.

Voici donc, en résumé, ce que nous croyons pouvoir conclure sur les porismes, et nous ferons observer de nouveau que notre opinion n'est essentiellement contraire à aucune de celles qui ont été émises jusqu'à présent, et qu'elle a pour but de les compléter plutôt que de les combattre.

Quant au fond,

Les porismes étaient des propositions relatives aux figures en mouvement, c'est-à-dire où diverses parties de la figure étaient mobiles.

Les conditions de la mobilité étaient contenues dans l'hypothèse, mais les conséquences de cette mobilité se retrouvaient nécessairement dans le résultat, où il est toujours question de lignes variables, comme nous l'avons vu précédemment.

De plus, certains porismes se rattachaient à des lieux géométriques; pour certains autres il n'en était pas de même.

Quant à la forme,

Les porismes pouvaient se présenter comme des problèmes ou comme des théorèmes; cependant les énoncés anciens, ceux d'Euclide, avaient l'apparence de problèmes. En effet, comme Robert Simson le fait observer, il fallait d'abord prouver qu'il était possible de découvrir certaines lignes ou certains points qui satisfissent à des conditions données; puis, quand on avait trouvé ces lignes ou ces points, il fallait démontrer qu'ils jouissaient en effet des propriétés indiquées. Pour cela, on pouvait procéder par analyse ou par synthèse.

Mais plus tard certains mathématiciens, peut-être dans le but de faciliter l'étude de la Géométrie, avaient préféré mettre les porismes sous forme de théorèmes, c'est-à-dire qu'ils donnaient d'avance la solution, et ne laissaient plus aux élèves que la peine de la démontrer.

Donc, ceux des porismes qui se rattachaient à des lieux géométriques étaient énoncés comme des théorèmes locaux; ce qui n'empêchait pas qu'il n'y eût quelque chose à trouver comme dans un problème, car Euclide donnait bien d'avance la nature du lieu géométrique, mais non pas ses éléments, et c'était là ce qu'il fallait découvrir.