

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

F. REECH

**Récapitulation très-succincte des recherches algébriques faites sur la
théorie des effets mécaniques de la chaleur par différents auteurs**

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 1 (1856), p. 58-75.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1856_2_1__58_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

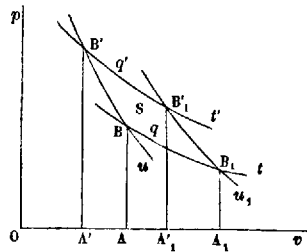
et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

RÉCAPITULATION TRÈS-SUCCINCTE

DES

RECHERCHES ALGÈBRIQUES FAITES SUR LA THÉORIE DES EFFETS MÉCANIQUES DE LA CHALEUR PAR DIFFÉRENTS AUTEURS ;

PAR M. F. REECH.



L'aire quadrilatérale ci-jointe $BB'B_1B_1$, fait partie de la *fig. 1* de mon Mémoire intitulé : « Théorie générale des effets dynamiques de la chaleur » (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. XVIII, 1853).

Cette aire me servait à représenter le maximum S de travail ou de puissance motrice susceptible d'être produit à l'aide d'un fluide élastique qu'on emploie à soutirer une certaine quantité de chaleur q' à une source chaude à la température t' et à verser une autre quantité de chaleur q dans une source froide à la température t .

La même aire quadrilatérale $BB'B_1B_1$, me servait à représenter le minimum de travail à dépenser pour que, en procédant en sens inverse, le même fluide élastique pût être employé à soutirer une quantité de chaleur q à une source froide à la température t , et à verser une autre quantité de chaleur q' dans une source chaude à la température t' .

La figure quadrilatérale $BB'B_1B_1$, et les premiers raisonnements qui s'y rapportent ont été empruntés au Mémoire de M. Clapeyron « sur

la puissance motrice de la chaleur » (*Journal de l'École Polytechnique*, tome XIV, 1834).

M. Clapeyron admettait avec M. Carnot l'égalité

$$q' = q,$$

et, dans cette hypothèse, il démontrait que l'on devait avoir

$$(1) \quad S = q \int_t^{t'} \frac{dt}{C},$$

la lettre C servant à désigner une certaine fonction de la température qui serait la même pour tous les corps de la nature.

L'égalité $q' = q$ ayant été contestée, je me suis attaché à généraliser le mode de raisonnement de MM. Carnot et Clapeyron, et je suis parvenu à démontrer que l'on devrait avoir

$$(2) \quad S = q' \Gamma(t') - q \Gamma(t) = \int_t^{t'} \frac{d[q \Gamma(t)]}{dt} dt,$$

la fonction $\Gamma(t)$ étant la même pour tous les corps de la nature.

A ce point de vue, $q \Gamma(t)$ sera la quantité de travail ou de force vive équivalente à une somme de chaleur q à une température donnée t . En d'autres termes, $q \Gamma(t)$ sera l'équivalent mécanique d'une somme de chaleur q à une température donnée t .

Mais, du moment où de la chaleur équivaldra à de la force vive, on sera conduit naturellement à supposer que ce que les physiciens parviennent à mesurer sous la dénomination d'une quantité de chaleur, n'est au fond que la somme de force vive susceptible d'être produite par une quantité de chaleur. Ce seraient des quantités de l'espèce $q \Gamma(t)$ que les physiciens parviendraient à mesurer, et, à ce point de vue, l'on devrait supposer

$$(3) \quad \Gamma(t) = \text{const. G.}$$

La même idée peut être présentée sous une forme un peu différente et plus explicite. Supposons que de la chaleur passe librement d'un corps chaud à un corps froid. Il n'y aura aucune production de travail ni aucune cause de perte, et, par conséquent, l'on devra ad-

mettre, non-seulement

$$q' = q,$$

mais encore

$$q' \Gamma (t') = q \Gamma (t);$$

par suite

$$\Gamma (t') = \Gamma (t) = \text{const. } G.$$

Quoi qu'il en soit de ces remarques, il est généralement admis aujourd'hui que l'on doit avoir

$$(4) \quad S = G (q' - q),$$

c'est-à-dire, en d'autres termes, que ma formule (2) doit être complétée par la relation (3).

Mais il reste encore à trouver la loi des quantités q , q' pour chaque espèce de fluide élastique.

On sera toujours libre de représenter par

$$\varphi (v, p) = t, \quad \varphi (v, p) = t',$$

les équations des courbes BB_1 , $B'B'_1$, et par

$$\psi (v, p) = u, \quad \psi (v, p) = u_1$$

les équations des courbes BB' , $B_1 B'_1$ de l'aire quadrilatérale à laquelle s'appliquera la formule (2).

Il sera permis aussi, au plus haut degré de généralité possible du sujet, de poser

$$(5) \quad q = \int_u^{u_1} f (t, u) du, \quad q' = \int_u^{u_1} f (t', u) du.$$

Il est encore évident que l'aire S représentée par la formule (2) pourra être exprimée au moyen des quantités t , t' , u , u_1 , d'après la nature des fonctions φ , ψ , en v , p , et que, par suite, une certaine condition devra être satisfaite entre les fonctions

$$\Gamma (t), f (t, u), \varphi (v, p), \psi (v, p).$$

On peut voir dans mon Mémoire de quelle manière je suis parvenu

à démontrer que cette condition reviendra exactement et uniquement à rendre une différentielle exacte le second membre de l'équation

$$(6) \quad dQ = \Gamma(t) f(t, u) du - pdv.$$

Il est d'ailleurs évident, à une simple inspection de l'équation (6), que Q représentera la quantité de travail susceptible d'être produite par la totalité de la chaleur qui se trouvera dans un fluide élastique. Q sera l'équivalent mécanique de cette quantité de chaleur.

Or j'ai voulu développer algébriquement à un aussi haut degré de généralité que celui-là toutes les questions susceptibles d'être posées au sujet d'un fluide élastique en ce qui concerne la chaleur latente, la chaleur sensible, la chaleur spécifique à pression constante, la chaleur spécifique à volume constant, la chaleur totale, et enfin la quantité de travail susceptible d'être produite ou d'être dépensée dans telle espèce d'opération expansive en même temps que calorifique qu'on voudra faire subir à un fluide élastique.

Mon but était d'avoir des formules préparées à l'avance pour le plus grand nombre sinon pour la totalité des expériences à venir des physiciens, et cela au plus haut degré possible de généralité du sujet.

En ce qui concerne les vapeurs, je n'ai pas été libre de conserver la relation générale

$$q = \int_u^{u_1} f(t, u) du.$$

D'après certaines propriétés physiques des vapeurs, il m'a fallu poser

$$(7) \quad \begin{cases} q = \int_u^{u_1} \gamma(t) du = \gamma(t)(u_1 - u), \\ q' = \int_u^{u_1} \gamma(t') du = \gamma(t')(u_1 - u), \end{cases}$$

mais je ne voyais pas de raison pour que la fonction $\gamma(t)$ dût être la même d'une espèce de vapeur à une autre.

J'ai d'ailleurs maintenu la variabilité de la fonction $\Gamma(t)$ dans tous mes calculs, en sorte que, si des expériences certaines sur des vapeurs faisaient trouver

$$\gamma(t) = \text{const.},$$

j'en conclurais

$$q' = q,$$

ce qui ramènerait ma formule (2) à la formule (1) de Clapeyron et Carnot.

Si, au contraire, des expériences sur des vapeurs faisaient trouver

$$\gamma(t') > \gamma(t) \text{ pour } t' > t,$$

il me faudrait rejeter la formule (1), et je serais libre encore d'admettre, ou la formule (2) seulement, ou à la fois les formules (2) et (3), c'est-à-dire la formule (4).

Mais en aucun cas je ne saurais admettre simultanément les formules (1) et (4). Toutes les recherches en assez grand nombre qui ont été effectuées à ce point de vue par différents auteurs sont radicalement inexactes selon moi.

La question se trouvait dans l'état que je viens d'exposer, quand M. Clausius a publié son dernier Mémoire intitulé : « Sur une forme nouvelle du second théorème principal de la théorie mécanique de la chaleur » (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, tome XX, 1855).

Dans ce Mémoire, M. Clausius admet ou comme principe, ou plutôt comme premier théorème principal, la relation (4), puis il démontre un second théorème que je vais présenter sous une forme équivalente à celle de l'auteur, de la manière que voici :

Je remonte à l'aire quadrilatérale $BB'B_1B$, de ma figure, et j'admets (à tort ou à raison) que, pour cette figure, on doit avoir

$$(a) \quad S = G(q' - q).$$

Je conçois un second fluide élastique pour lequel on aura, pareillement,

$$(b) \quad S_1 = G(q'_1 - q_1).$$

Je pose

$$(c) \quad \begin{cases} q_1 = q + k, \\ q'_1 = q' + k', \end{cases}$$

et je trouve en place de la formule (b)

$$(b') \quad S_1 = G(q' - q) + G(k' - k).$$

Or j'entends me servir du second fluide élastique, de manière que l'on ait

$$(d) \quad S_1 = S,$$

et pour que cette égalité puisse être satisfaite, il faudra que l'on ait

$$k' = k,$$

de telle sorte que les équations (c) deviendront

$$(c') \quad \begin{cases} q_1 = q + k. \\ q'_1 = q' + k. \end{cases}$$

Cela posé, je dis que l'équation (d) serait inadmissible si l'on n'avait pas en même temps

$$k = 0.$$

En effet, je pourrai me servir du premier fluide élastique en sens direct et du second fluide élastique en sens inverse, de manière à produire les effets que voici :

En me servant du premier fluide élastique, je produirai une quantité de travail S en soutirant une certaine quantité de chaleur q' à une source A' à la température élevée t' et en versant une autre quantité de chaleur q dans une source A à la température basse t .

Puis, en me servant du second fluide élastique, je dépenserai une quantité de travail S_1 , égale à S en soutirant une quantité de chaleur $q + k$ à la source A et en versant une quantité de chaleur $q' + k$ dans la source A' .

Il s'ensuit que la source A perdra

$$(q + k) - q = k,$$

et que la source A' gagnera

$$(q' + k) - q' = k,$$

c'est-à-dire que le résultat définitif de la double opération consistera

à faire passer une certaine quantité k de chaleur d'un corps froid dans un corps chaud avec une dépense de travail $S_1 - S$ égale à zéro, alors que chacun des deux fluides élastiques se trouvera ramené exactement à son état initial.

Si k était négatif, j'opérerais avec chacun des deux fluides élastiques en sens contraire, et le résultat final serait le même.

Or on doit admettre qu'il est *absurde*, non-seulement de *produire du travail avec rien* (axiome de Carnot), ce qui conduit généralement à l'équation (2) et exceptionnellement à l'équation (4), mais encore de *faire passer de la chaleur d'un corps froid dans un corps chaud avec rien* (axiome de M. Clausius), ce qui exigera que, pour

$$S_1 = S,$$

on ait

$$k = 0.$$

Il s'ensuit donc qu'avec des fluides élastiques quelconques auxquels s'appliqueront respectivement les équations (a), (b), il sera impossible que l'on ait

$$S_1 = S$$

sans que l'on n'ait en même temps

$$\begin{aligned} q_1 &= q, \\ q'_1 &= q'. \end{aligned}$$

Par suite il faudra que, pour

$$S_1 = nS,$$

on ait

$$\begin{aligned} q_1 &= nq, \\ q'_1 &= nq', \end{aligned}$$

et, par conséquent, dans l'entière généralité de la question (c'est-à-dire quel que soit n),

$$(e) \quad \frac{q'_1}{q_1} = \frac{q'}{q}.$$

Or il est directement évident qu'entre deux courbes données Bu ,

$B, u,$ de ma figure, pour un fluide donné, il y aura toujours à concevoir une certaine fonction $\gamma(t)$ qui sera telle, qu'entre les deux courbes données $Bu, B, u,$ de ce fluide-là, on aura

$$(f) \quad \frac{q'}{q} = \frac{\gamma(t')}{\gamma(t)},$$

ou, ce qui reviendra au même,

$$(f') \quad \frac{q'}{\gamma(t')} = \frac{q}{\gamma(t)},$$

et, d'après la formule (e), il faudra que la même relation soit applicable à tous les autres cas.

C'est en cela que consiste le second théorème principal de M. Clausius.

D'après ce théorème, mes formules (7) subsisteront non-seulement pour les vapeurs, mais aussi pour les gaz permanents, et la fonction $\gamma(t)$ que je regardais comme étant susceptible de varier d'un cas à un autre sera la même pour tous les fluides élastiques de la nature.

La formule (4) deviendra

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} S &= G(q' - q) = G(u_1 - u)[\gamma(t') - \gamma(t)] \\ &= G(u_1 - u) \int_t^{t'} \frac{d\gamma(t)}{dt} dt, \end{aligned} \right.$$

et de la comparaison de ce résultat définitif de la théorie de M. Clausius avec la formule (1) résultera cette conséquence singulière que ce sera la quantité $G(u_1 - u)$, dont la signification physique n'a pas encore été expliquée, qui jouera par rapport à une différence thermométrique $t' - t$, et au moyen d'une certaine fonction universelle

$$\gamma'(t) = \frac{d\gamma(t)}{dt},$$

le même rôle que celui que Carnot et Clapeyron voulaient faire jouer à une somme de chaleur q par rapport à la même différence $t' - t$, au moyen de leur fonction universelle

$$\frac{1}{C} [*].$$

[*] Mon but n'a jamais été de m'occuper de ces matières comme physicien, mais

Mais l'essentiel est, qu'au point de vue de M. Clausius, ma formule (6) se réduira à

$$dQ = G\gamma(t) du - p dv.$$

seulement comme logicien, particulièrement en ce qui concerne le perfectionnement de la théorie des machines motrices, et, à ce point de vue, le second théorème principal de M. Clausius combiné avec d'autres relations connues, entraînera les conséquences majeures que voici :

1°. De quelque espèce de vapeurs ou de gaz que l'on veuille faire usage entre deux températures données t, t' , pourvu que l'on satisfasse à toutes les conditions requises pour qu'aucune perte ne doive être mise en ligne de compte, il arrivera que, par rapport à une même quantité de chaleur initiale q' , une même partie aliquote $q' - q$ se trouvera détruite, et que, par suite (en physique rationnelle), toutes les espèces de vapeurs ou de gaz seront parfaitement équivalentes.

2°. Le point essentiel sera que chaque espèce de fluide élastique soit employé entre des températures t, t' aussi écartées que possible.

3°. L'emploi de vapeurs saturées ne permettant pas de faire augmenter la différence $t' - t$ au delà de 50 à 100 degrés, sans que les pressions à la chaudière ne deviennent très-grandes, on est conduit naturellement, soit à accoupler plusieurs espèces de vapeurs saturées (machines binaires à éther ou à chloroforme, etc.), soit à substituer à des vapeurs saturées des vapeurs surchauffées ou des gaz.

4°. Avec des vapeurs surchauffées ou avec des gaz, il faudra qu'on fasse usage de toiles métalliques.

5°. En employant soit des vapeurs accouplées, soit des vapeurs surchauffées ou des gaz, on ne saurait guère faire augmenter pratiquement la différence $t' - t$ au delà de 300 degrés, en sorte que, dans l'un comme dans l'autre cas [la fonction $\gamma(t)$ étant supposée approximativement de l'espèce $\gamma(t) = a + bt$] on ne saurait guère se flatter de parvenir à réduire la consommation de combustible d'une machine motrice au-dessous de

$$\frac{50}{300} = \frac{1}{6} \text{ à } \frac{100}{300} = \frac{1}{3}$$

de celle d'une machine à vapeur d'eau saturée.

Or toutes ces conséquences résultaient primitivement de la loi de Carnot. Il s'ensuit que les nouvelles doctrines sur la chaleur, complétées par le second théorème principal de M. Clausius, ramèneront la théorie des machines motrices à *très-peu près* au même point que celui où cette théorie se trouvait dès 1824 par la doctrine, reconnue inexacte aujourd'hui, de Carnot.

Pour qu'on pût avoir l'espoir de faire faire à la théorie des machines motrices des progrès plus considérables que ceux-là, il faudrait que de nouveaux faits physiques fussent découverts et pussent être invoqués dans le cours des raisonnements auxquels je me suis livré à ce sujet.

Quand ensuite il s'agira d'un gaz, on devra, en vertu de la loi de Mariotte, admettre une relation de la forme

$$p\nu = a(t).$$

Quand il s'agira d'un mélange de liquide et de vapeur saturée de ce liquide, on devra admettre une relation de la forme

$$p = \Omega(t).$$

Ces deux relations distinctes sont des cas particuliers de la relation plus générale

$$(9) \quad p = a(t) \frac{d\varepsilon(\nu)}{d\nu} = a(t) \varepsilon'(\nu).$$

Il s'ensuit que la théorie des gaz et celle des vapeurs pourront être envisagées comme des cas particuliers de la question plus générale qui aurait pour objet de rendre une différentielle exacte le second membre de l'équation

$$(8 \text{ bis}) \quad dQ = G\gamma(t) du - a(t) \varepsilon'(\nu) d\nu.$$

Or on peut voir dans mon Mémoire comment la résolution de cette question exigera que l'on ait

$$(10) \quad Gu = \frac{a'(t)}{\gamma'(t)} \varepsilon(\nu) + \int \frac{\beta'(t)}{\gamma(t)} dt,$$

$$(11) \quad Q = \left[\frac{\gamma(t)a'(t)}{\gamma'(t)} - a(t) \right] \varepsilon(\nu) + \beta(t),$$

$\beta(t)$ étant une fonction arbitraire de t qui pourra être différente d'un fluide élastique à un autre.

On peut vérifier à posteriori qu'au moyen des équations (10), (11), l'équation (8 bis) sera satisfaite.

On trouvera enfin que mes équations (7) pourront être remplacées par

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} Gdq = G\gamma(t) du \\ = \frac{\gamma(t)a'(t)}{\gamma'(t)} \varepsilon'(\nu) d\nu + \left\{ \varepsilon(\nu) \gamma(t) \frac{d}{dt} \left[\frac{a'(t)}{\gamma'(t)} \right] + \beta'(t) \right\} dt. \end{array} \right.$$

Les équations (9), (10), (11), (12) serviront aux usages que voici :
 Quand on regardera t comme constant, l'équation (9) représentera les courbes $BB_1, B' B'_1$ de la figure.

Quand on regardera u comme constant, l'équation (10) représentera les courbes BB', B, B'_1 de la figure.

Le second membre de l'équation (11) représentera la quantité de travail susceptible d'être produite par la totalité de la chaleur qui se trouvera dans un fluide élastique.

Le second membre de l'équation (12) représentera le produit de la constante G par la somme de chaleur dq qui devra être fournie à un fluide élastique pour que les variables indépendantes v, t éprouvent des accroissements arbitraires dv, dt .

En différentiant l'équation (9), on aura pour l'accroissement correspondant de p

$$(13) \quad dp = a(t) \varepsilon''(v) dv + a'(t) \varepsilon'(v) dt.$$

Cela posé, quand on fera $t = \text{const.}$, on trouvera de v à v_1 le long de la courbe BB_1 de la figure :

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q_1 - Q = \left[\frac{\gamma(t) a'(t)}{\gamma'(t)} - a(t) \right] [\varepsilon(v_1) - \varepsilon(v)], \\ Gq = G\gamma(t) (u_1 - u) = \frac{\gamma(t) a'(t)}{\gamma'(t)} [\varepsilon(v_1) - \varepsilon(v)]. \end{array} \right.$$

La seconde des équations (14) représentera le produit de la constante G par la quantité de *chaleur latente* d'un fluide élastique de v à v_1 .

Quand on fera $u = \text{const.}$, on trouvera de v à v' le long de la courbe BB' de la figure,

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q' - Q = - \int_v^{v'} p dv = + \text{aire } BB' A' A, \\ \int G dq = 0. \end{array} \right.$$

La chaleur spécifique c_p à pression constante et la chaleur spécifique c_v à volume constant pourront être déterminées comme il suit :

En supposant $v = \text{const.}$, on déduira immédiatement de l'équa-

tion (12):

$$(16) \quad G c_1 = \varepsilon(\nu) \gamma(t) \frac{d}{dt} \left[\frac{a'(t)}{\gamma'(t)} \right] + \beta'(t).$$

En supposant, au contraire, $p = \text{const.}$, on déduira de l'équation (13)

$$d\nu = - \frac{\varepsilon'(\nu)}{\varepsilon''(\nu)} \frac{a'(t)}{a(t)} dt,$$

et en substituant cette valeur de $d\nu$ dans l'équation (12), on trouvera

$$(17) \quad G c_0 = \left\{ \varepsilon(\nu) \gamma(t) \frac{d}{dt} \left[\frac{a'(t)}{\gamma'(t)} \right] + \beta'(t) \right\} - \frac{[\varepsilon'(\nu)]^2}{\varepsilon''(\nu)} \frac{\gamma(t)}{\gamma'(t)} \frac{[a'(t)]^2}{a(t)}.$$

De ces deux équations on conclura

$$(18) \quad G(c_0 - c_1) = - \frac{[\varepsilon'(\nu)]^2}{\varepsilon''(\nu)} \frac{\gamma(t)}{\gamma'(t)} \frac{[a'(t)]^2}{a(t)}.$$

Il y a à faire remarquer maintenant que les formules (9), ..., (18) conviendront spécialement au cas des gaz quand on y fera

$$\varepsilon'(\nu) = \frac{1}{\nu};$$

par suite

$$\varepsilon(\nu) = \log \text{hyp. } \nu,$$

$$\varepsilon''(\nu) = - \frac{1}{\nu^2},$$

et

$$- \frac{[\varepsilon'(\nu)]^2}{\varepsilon''(\nu)} = + 1;$$

ce qui fera trouver

$$(18 \text{ bis}) \quad G(c_0 - c_1) = + \frac{\gamma(t)}{\gamma'(t)} \frac{[a'(t)]^2}{a(t)}.$$

Les mêmes formules conviendront spécialement à un mélange de liquide et de vapeur saturée de ce liquide, quand on y fera

$$\varepsilon'(\nu) = 1,$$

par suite

$$\varepsilon(\nu) = \nu,$$

$$\varepsilon''(\nu) = 0.$$

On trouvera dans ce cas-là

$$G(c_0 - c_1) = \infty \quad \text{et} \quad c_0 = \infty,$$

et pour l'expression de la chaleur latente, d'après la seconde des formules (14),

$$(19) \quad Gq = \frac{\gamma(t) a'(t)}{\gamma'(t)} (v_1 - v).$$

Soient

w le volume d'un liquide à une température t et sous la pression de vaporisation $p = \Omega(t)$ ou $p = a(t)$ à cette température;

W le volume correspondant de vapeur du liquide à la température t ;

L la chaleur latente.

La formule (19) deviendra

$$(19 \text{ bis}) \quad GL = \frac{\gamma(t) a'(t)}{\gamma'(t)} (W - w),$$

ou, ce qui reviendra au même,

$$(20) \quad G \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} = \frac{W - w}{L} \frac{dp}{dt},$$

et comme, d'après le second théorème principal de M. Clausius, la fonction $\gamma(t)$ devra être la même pour tous les fluides élastiques de la nature, il faudra que la valeur du second membre de l'équation (20) soit absolument indépendante de la nature du liquide qui aura servi à produire une espèce de vapeur saturée.

De plus, on voit que si les physiciens parvenaient à déterminer expérimentalement les quantités

$$W - w, L, \frac{dp}{dt}$$

pour une espèce de vapeur saturée à différentes températures t , on trouverait, au moyen de l'équation (20), la nature de la fonction $\gamma(t)$ dans l'intervalle des expériences, au facteur G près.

Dans le cas d'un gaz, la seconde des formules (14) prendra la forme analogue

$$(21) \quad G \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} = \frac{\log \text{hyp. } v_1 - \log \text{hyp. } v}{q} a'(t) = \frac{\log \text{hyp. } \frac{v_1}{v}}{q} \frac{dp}{dt}.$$

Je remonte à la formule (12), et je la transforme en

$$(22) \quad G dq = \gamma(t) d \left[\frac{a'(t)}{\gamma'(t)} \varepsilon(v) \right] + \beta'(t) dt,$$

puis, en y faisant

$$\varepsilon(v) = v,$$

pour le cas d'un mélange de liquide et de vapeur saturée de ce liquide, je désigne par

$$c'(t) dt,$$

la quantité de chaleur sensible qui devra être fournie au liquide le long de la courbe

$$v = w,$$

et par

$$C'(t) dt$$

la quantité de chaleur qui devra être fournie à la vapeur de ce liquide le long de la courbe

$$v = W.$$

Je trouve de cette manière

$$(23) \quad \begin{cases} G c'(t) = \gamma(t) \frac{d}{dt} \left[\frac{a'(t)}{\gamma'(t)} w \right] + \beta'(t), \\ GC'(t) = \gamma(t) \frac{d}{dt} \left[\frac{a'(t)}{\gamma'(t)} W \right] + \beta'(t); \end{cases}$$

et en soustrayant les deux équations l'une de l'autre,

$$(24) \quad G [C'(t) - c'(t)] = \gamma(t) \frac{d}{dt} \left[\frac{a'(t)}{\gamma'(t)} (W - w) \right];$$

d'autre part, je conclus de la formule (19 bis)

$$\frac{a'(t)}{\gamma'(t)} (W - w) = \frac{GL}{\gamma(t)},$$

et, par suite, la formule (24) deviendra

$$C'(t) - c'(t) = \gamma(t) \frac{d}{dt} \left[\frac{L}{\gamma(t)} \right],$$

puis, en développant le second membre

$$C'(t) - c'(t) = \frac{dL}{dt} - L \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)},$$

d'où

$$(25) \quad \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} = \frac{1}{L} \left[\frac{dL}{dt} + c'(t) - C'(t) \right],$$

ce qui fera une autre équation dont le second membre devra être parfaitement indépendant de la nature du liquide qui aura servi à produire de la vapeur saturée.

Au delà de la courbe

$$v = W$$

une vapeur deviendra un gaz. A la jonction de ces deux états, la quantité Q devra être la même.

Or, en deçà de la courbe en question, la formule (11) sera

$$Q = \left[\frac{\gamma(t) a'(t)}{\gamma'(t)} - a(t) \right] v + \beta(t);$$

et si l'on suppose qu'à partir de la limite

$$v = W,$$

la loi de Mariotte sera immédiatement applicable, il faudra qu'au delà de cette limite on ait [en remplaçant $a(t)$, $\beta(t)$ par $a_1(t)$, $\beta_1(t)$]

$$Q_1 = \left[\frac{\gamma(t) a'_1(t)}{\gamma'(t)} - a_1(t) \right] \log \text{hyp. } v + \beta_1(t);$$

en faisant ensuite

$$v = W,$$

et

$$Q = Q_1,$$

on trouvera

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\gamma(t) a'(t)}{\gamma'(t)} - a(t) \right] W + \beta(t) \\ &= \left[\frac{\gamma(t) a'_1(t)}{\gamma'(t)} - a_1(t) \right] \log \text{hyp. } W + \beta_1(t), \end{aligned}$$

et de là aussi on pourrait dégager le rapport de $\gamma'(t)$ à $\gamma(t)$, etc.

La fonction $\gamma(t)$ devant être la même pour tous les fluides élastiques de la nature (d'après le second théorème principal de M. Clausius), il s'ensuit qu'il devra être possible de former une échelle thermométrique au moyen de laquelle on aura simplement

$$(26) \quad \begin{cases} \gamma(t) = t, \\ \gamma'(t) = 1, \end{cases}$$

et, en déplaçant l'origine,

$$\gamma(t) = B + t.$$

Mais il restera à savoir si une telle échelle thermométrique ne différencierait pas beaucoup de l'échelle ordinaire d'un thermomètre à mercure, ou bien de celle d'un thermomètre à air.

Quand on se servira d'un thermomètre à air pour mesurer les températures, et que la formule (9) devra être appliquée à une masse d'air, on aura pour la fonction $a(t)$ une expression de la forme

$$(27) \quad a(t) = A [m + t]$$

(le nombre m étant égal à 273 environ), et par suite

$$a'(t) = A.$$

Mais il restera à savoir si, dans ce cas-là, il sera permis de poser

$$(28) \quad \gamma(t) = B + t.$$

Si les deux relations étaient admissibles simultanément, les équations (10), (11), (12) deviendraient

$$(29) \quad \begin{cases} Gu = A \log \text{hyp. } v + \int \frac{\beta'(t)}{B+t} dt, \\ Q = A(B-m) \log \text{hyp. } v + \beta(t), \\ Gdq = A(B+t) \frac{dv}{v} + \beta'(t) dt, \end{cases}$$

et les équations (16), (17), (18),

$$(30) \quad \begin{cases} Gc_1 = \beta'(t), \\ Gc_0 = \beta'(t) + A \frac{B+t}{m+t}, \\ G(c_0 - c_1) = A \frac{B+t}{m+t}. \end{cases}$$

Il y a une expérience de M. Regnault qui consiste à faire communiquer tout à coup une capacité pleine d'air et une capacité vide, puis à constater le changement de température de la masse d'air dilatée. On sait que ce changement a été trouvé égal à zéro.

Or la loi algébrique de cette expérience (supposée faite dans une enveloppe non perméable à la chaleur) s'exprimera en égalant à une constante le second membre de l'équation (11).

Il s'ensuit que la température de l'air ne pourra être la même avant et après la dilatation qu'autant qu'on aura

$$0 = \frac{d}{dt} \left[\frac{a(t)}{\gamma(t)} \right],$$

c'est-à-dire

$$\frac{a(t)}{\gamma(t)} = \text{const. } C.$$

Or, avec un thermomètre à air, on aura

$$a(t) = A(m + t);$$

donc

$$(31) \quad \gamma(t) = \frac{A}{C}(m + t).$$

Les équations (10), (11), (12) deviendront

$$(32) \quad \begin{cases} Gu = C \log \text{hyp. } v + \frac{C}{A} \int \frac{\beta'(t)}{m+t}, \\ Q = \beta(t), \\ Gdq = A(m+t) \frac{dv}{v} + \beta'(t) dt, \end{cases}$$

et les équations (16), (17), (18),

$$(33) \quad \begin{cases} Gc_1 = \beta'(t), \\ Gc_0 = \beta'(t) + A, \\ G(c_0 - c_1) = A = \text{const.} \end{cases}$$

Il s'ensuit que la valeur de la constante C n'influera ni sur l'expression de Q ni sur celles de Gdq, Gc₀, Gc₁.

Il n'y aura que la quantité conventionnelle u qui changera proportionnellement à C , et le plus simple sera de faire

$$C = A.$$

Les résultats que l'on trouvera dans ce cas-là au moyen des formules (32), (33) seront les mêmes que ceux que l'on déduira des formules (29) et (30), quand on y fera

$$B = m.$$

Mais en supposant que de telles relations se vérifient pour de l'air, on ne saurait les appliquer à des gaz pour lesquels le nombre m de la relation

$$a(t) = A(m + t)$$

ne serait pas le même.

On ne saurait non plus les appliquer à des vapeurs saturées.

De l'équation (20) on conclurait pour une vapeur saturée quelconque

$$(34) \quad \frac{W - w}{L} \frac{dp}{dt} (m + t) = \text{const. } G.$$

Telles sont les relations les plus saillantes que l'on déduira des formules de ma *théorie générale des effets dynamiques de la chaleur* quand on y fera

$$\Gamma(t) = \text{const. } G,$$

et que de plus, d'après le second théorème principal de M. Clausius, on y regardera la fonction $\gamma(t)$ comme devant être la même pour tous les fluides élastiques de la nature.

