JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. BRAVAIS

Note de dioptrique

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 1 (1856), p. 44-50.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1856_2_1__44_0>

NOTE DE DIOPTRIQUE,

Par M. A. BRAVAIS.

En traduisant le beau Mémoire de M. Gauss, intitulé : *Recherches dioptriques*, qui remplit les pages précédentes, j'ai été curieux d'étudier, d'une manière encore plus étendue, s'il était possible, le cas des lunettes, soit astronomiques, soit terrestres, soit construites d'après les principes de Galilée. En général, ces instruments sont considérés comme ayant le tirage de leurs tubes préparé pour un œil qui ne verrait nettement que les objets placés à l'infini, et les calculs qui les concernent se trouvent singulièrement simplifiés par cette hypothèse.

Un tel système optique, formé par une série de lentilles disposées suivant un même axe, est défini par cette propriété, que tout faisceau de rayons parallèles qui le pénètre, sans s'écarter beaucoup de la direction de l'axe, sort aussi à l'état de faisceau parallèle au delà de sa dernière surface réfringente. Il est remarquable que ces systèmes, dont l'importance pratique est si grande, échappent précisément aux lois générales développées par M. Gauss, et ne possèdent pas les quatre points *caractéristiques* signalés par l'illustre auteur, comme il le remarque lui-même [*].

Je supposerai que l'on ait son Mémoire sous les yeux, et j'en conserverai les notations. Je rappellerai que l'axe commun des surfaces réfringentes est pris pour axe des x; que N^o, N^* représentent les abscisses des points où la première et la dernière surface coupent cet axe, et que n^o, n^* sont les indices de réfraction des milieux initial et final.

Ceci posé,

$$y = \frac{\beta^o}{n^o}(x - N^o) + b^o,$$

$$z = \frac{\gamma^o}{n^o}(x - N^o) + c^o,$$

[*] Page 26 de ce volume.

étant les équations de la route initiale du rayon lumineux,

$$y = \frac{\beta^*}{n^*}(x - \mathrm{N}^*) + b^*,$$

$$z = \frac{\gamma^*}{n^*}(x - \mathrm{N}^*) + c^*,$$

étant les équations de la route finale du même rayon, après sa sortie du système, M. Gauss démontre que l'on a

$$b^* = gb^\circ + h\beta^\circ, \quad c^* = gc^\circ + h\gamma^\circ,$$
$$\beta^* = kb^\circ + l\beta^\circ, \quad \gamma^* = kc^\circ + l\gamma^\circ,$$

$\frac{g}{h}$ étant l'avant-dernière, et $\frac{k}{l}$ la dernière réduite d'une certaine fraction continue de la forme

$$u^\circ + \cfrac{1}{t' + \cfrac{1}{u' \ldots + \cfrac{1}{t^* + \cfrac{1}{u^*}}}};$$

les quotients incomplets de cette fraction dépendent des indices des milieux successifs, des rayons des sphères et des intervalles qui séparent leurs centres, de la manière qui a été indiquée par M. Gauss [*].

Le cas remarquable des systèmes dioptriques qui laissent aux rayons lumineux leur parallélisme primitif, se présente lorsque la fraction continue dont nous venons de parler devient nulle, c'est-à-dire lorsque l'on a $k = 0$, et l'illustre géomètre en examine les conséquences, dans les articles XI et XII de son Mémoire.

Les deux *points principaux* nommés E, E* par M. Gauss, ainsi que les deux *foyers principaux* F, F*, s'éloignent alors simultanément pour se porter à l'infini, et l'on ne peut plus se servir de la considération de ces points pour déduire la route finale de la route initiale, ou pour déterminer le lieu de l'image d'après celui de l'objet. Toutefois il existe alors encore un point remarquable situé sur l'axe, dont la connaissance

[*] Page 16 de ce volume.

permet de résoudre facilement le problème précédent, et dont le rôle est analogue à celui des quatre points mentionnés par M. Gauss.

Pour le faire voir, je reprends les formules données dans l'article XI, savoir :

$$\xi^* = \mathrm{N}^* - \frac{n^\circ h - g(\xi - \mathrm{N}^\circ)}{n^\circ l} n^*,$$

$$\eta^* = \frac{\eta}{l} = g\eta, \qquad \zeta^* = \frac{\zeta}{l} = g\eta;$$

dans ces formules, ξ, η, ζ sont les coordonnées du point lumineux arbitrairement choisi, mais à petite distance de l'axe; ξ^*, η^*, ζ^* sont les coordonnées du point où se forme le foyer réel ou virtuel des rayons qui ont complétement traversé le système des surfaces réfringentes successives.

De la première de ces trois équations on tire facilement

$$\xi^* n^\circ l - \xi n^* g = \mathrm{N}^* n^\circ l - \mathrm{N}^\circ n^* g - n^\circ n^* h,$$

et, si l'on pose

$$\frac{\mathrm{N}^* n^\circ l - \mathrm{N}^\circ n^* g - n^\circ n^* h}{n^\circ l - n^* g} = \mathrm{D},$$

celle-ci pourra être mise sous la forme

$$(\xi^* - \mathrm{D})\, n^\circ l - (\xi - \mathrm{D})\, n^* g = 0.$$

Ainsi le point de l'axe ayant D pour abscisse, jouira de cette propriété, 1° que tout objet situé dans un plan normal à l'axe donnera son image sur un deuxième plan pareillement normal à l'axe, et situé du même côté que lui par rapport au point D, et 2° que les distances du plan de l'objet et du plan de l'image à ce point D seront entre elles dans le rapport constant $n^\circ l : n^* g$.

En outre, on peut aussi déterminer sur l'axe un certain point C, dont l'abscisse sera donnée par l'équation

$$\mathrm{C} = \frac{l\xi^* - \xi}{l - 1} = \mathrm{D} + \frac{l(\xi^* - \mathrm{D}) - (\xi - \mathrm{D})}{l - 1} = \mathrm{D} + \frac{n^\circ l^{\frac{1}{2}} - n^* g^{\frac{1}{2}}}{l^{\frac{1}{2}} - g^{\frac{1}{2}}} \frac{\mathrm{D} - \xi}{n^\circ l},$$

et l'on aura alors

$$\xi^* - C = \frac{\xi - C}{l};$$

cette équation, étant rapprochée de

$$\eta^* = \frac{\eta}{l}, \quad \zeta^* = \frac{\zeta}{l},$$

montre que le point C, ainsi déterminé, est un centre de similitude entre l'image et l'objet. La similitude est directe, si l est positif; elle est inverse dans le cas contraire.

Dans le cas le plus ordinaire, le milieu initial et le milieu final parcourus par les rayons lumineux sont de même nature; c'est ce qui arrive entre autres dans les lunettes. Alors on écrira

$$n^* = n^0 = 1,$$

et, remarquant que l'on a $g = \frac{1}{l}$, on trouvera

$$D = \frac{N^* l^2 - N^0 - hl}{l^2 - 1},$$

$$\xi^* - D = \frac{\xi - D}{l^2},$$

$$C = D - \frac{\xi - D}{l}.$$

Le nombre l représente ce que l'on nomme, en dioptrique, *le grossissement de l'appareil;* cette quantité est négative dans les lunettes qui renversent, comme la lunette astronomique; elle est positive dans celles qui donnent des images droites. Dans le premier cas, le point C est situé entre les deux plans focaux conjugués à abscisses ξ, ξ^*; dans le second cas, il est situé au delà de la ligne de jonction de ces points et de l'autre côté du point D. De là résulte, pour trouver le foyer conjugué d'un point lumineux, tel que P, la construction suivante : « De P, abaissez sur l'axe la perpendiculaire Pp, et comptez, à partir » du point D vers p, une longueur Dp^* égale au quotient de Dp par » le carré du grossissement. Comptez aussi, à partir de D vers p, si la » lunette renverse, et en sens inverse dans le cas contraire, une lon-

» gueur DC égale à la longueur Dp divisée par le grossissement.
» Joignez PC et prolongez, s'il le faut, cette ligne jusqu'à sa rencontre
» en P^* avec le plan p^*P^* mené par p^* normalement à l'axe; P^* sera
» le point cherché. »

Le plan passant par D jouit de cette propriété importante, que tous les points qui y sont contenus ont leurs foyers conjugués en d'autres points du même plan; et quant au point D, considéré comme point lumineux, il coïncide avec le foyer de ses propres rayons. On pourrait même se servir de cette propriété pour trouver sa position; il suffirait, en effet, de faire $\xi = \xi^* = D$ dans l'équation

$$\xi^* = N^* - \frac{n^\circ h - g(\xi - N^\circ)}{n^\circ l} n^*.$$

On pourrait ainsi appeler le point D le point *confocal* du système.

Dans le cas des lunettes, on sait que l'image de la surface antérieure de l'objectif se forme un peu au delà de l'oculaire, et y détermine un petit disque lumineux connu sous le nom d'*anneau oculaire* (*Ort des Auges* en allemand). Ces deux plans sont l'image l'un de l'autre, et en écrivant, avec M. Gauss, que l'abscisse du plan de l'anneau oculaire est égale à N^{**}, on trouvera facilement

$$D - N^{**} = (N^{**} - N^\circ) \frac{n^* g}{n^\circ l - n^* g}.$$
$$D - N^{**} : D - N^\circ :: n^* g : n^\circ l,$$

et si l'on pose $n^* = n^\circ = 1$, $g = \frac{1}{l}$,

$$D - N^{**} = \frac{D - N^\circ}{l^2} = \frac{N^{**} - N^\circ}{l^2 - 1}.$$

D'où l'on voit que, dans les lunettes à fort grossissement, le point D sera toujours très-voisin de l'anneau oculaire, et situé un peu au delà dans les lunettes à anneau oculaire extérieur. Mais, dans les lunettes de Galilée, où l'anneau oculaire est intérieur, le point D est situé entre l'anneau oculaire et l'oculaire, et généralement plus rapproché du premier.

Il résulte de ce qui précède que, dans le cas des grossissements trèsforts appliqués aux objets très-éloignés, l'image se forme à une distance infiniment moindre que l'objet. Par exemple, si, avec une lunette astronomique grossissant mille fois, on regarde le globe lunaire, son image se formera à une distance de la lunette un million de fois moindre que la distance réelle, soit à environ 380 mètres, et l'image virtuelle formée en ce lieu aura des dimensions mille fois moindres que celles de l'objet.

Le point D jouit encore de la propriété remarquable que, si l'on y place un point lumineux, ou un foyer réel ou virtuel, tout le système optique agira sur les rayons pour augmenter ou diminuer leur divergence naturelle, sans déranger leur point de concours; de sorte qu'un tel appareil modifiera un cône donné de rayons, de manière à le rétrécir ou à l'élargir, mais sans déplacer en aucune façon le lieu de son sommet.

Lorsque la lunette se décompose en un système objectif et en un système oculaire indépendant du précédent, et pouvant glisser tout d'une pièce par rapport au système objectif immobile, nommons F, F' les foyers principaux de première et de deuxième espèce du système objectif; F^*, F'^* ceux du système oculaire; φ^0 la distance focale principale du système objectif; φ' celle du système oculaire; ξ l'abscisse du lieu de l'objet sur l'axe; ξ^* celle de son image; et ξ' celle du point de l'axe qui sert de foyer conjugué à ξ, par rapport au système objectif, et à ξ^* par rapport au système oculaire. Soient enfin η, ζ, η^*, ζ^*, η', ζ' les autres coordonnées de ces trois points.

On aura, par le passage à travers le système objectif,

$$F^* - \xi' = \frac{(\varphi^0)^2}{\xi - F},$$

et, par le passage à travers le système oculaire,

$$F'^* - \xi^* = \frac{\varphi'^2}{\xi' - F'};$$

d'où l'on tire

$$\frac{(\varphi^0)^2}{\xi - F} + \frac{\varphi'^2}{F'^* - \xi^*} = F^* - F'.$$

Lorsque l'on a profité du tirage de la lunette pour faire coïncider les points F′, F*, il est clair qu'elle est dans les conditions des systèmes à distance focale infinie, et l'on a alors

$$F - \xi : F'^{*} - \xi^{*} :: (\varphi^{o})^{2} : \varphi'^{2}.$$

Mais on peut appliquer au cas actuel les formules de M. Gauss [*], qui donnent les valeurs de g, h, k, l, dans le cas de deux lentilles, puisque chacun des deux systèmes oculaire et objectif agit comme une lentille simple ; on fera donc, dans ces formules,

$$t' = \varphi^{o} + \varphi',$$

d'où

$$g = -\frac{\varphi'}{\varphi^{o}}, \quad h = \varphi^{o} + \varphi', \quad k = 0, \quad l = -\frac{\varphi^{o}}{\varphi'};$$

donc on aura

$$F - \xi : F'^{*} - \xi^{*} :: l^{2} : 1,$$

proportion dans laquelle l continue à représenter le grossissement de la lunette. Les points F, F′* sont alors deux foyers conjugués. Cette relation nous fournit un nouveau procédé pour obtenir la position du point D, en y faisant

$$\xi = \xi^{*} = D.$$

Mais lorsque, par l'effet de la variation du tirage de la lunette, F′, F* ont cessé de coïncider, la proportion précédente n'a plus lieu, et l'on a alors

$$\frac{1}{F'^{*} - \xi^{*}} = \frac{l^{2}}{F - \xi} + \frac{F^{*} - F'}{\varphi'^{2}},$$

$$F^{*} - \xi^{*} = \frac{F - \xi}{l^{2}} \, \frac{1}{1 + \frac{(F - \xi)(F^{*} - F')}{(\varphi^{o})^{2}}}.$$

Quant au rapport de l'image à l'objet, on l'obtiendra en écrivant :

$$\frac{n'}{n} = \frac{\zeta'}{\zeta} = \frac{\varphi^{o}}{\xi - F},$$

$$\frac{n^{*}}{n'} = \frac{\zeta^{*}}{\zeta'} = \frac{F'^{*} - \xi^{*}}{\varphi'},$$

$$\frac{n^{*}}{n} = \frac{\zeta^{*}}{\zeta} = \frac{\varphi^{o}}{\varphi'} \, \frac{F'^{*} - \xi^{*}}{\xi - F} = -\frac{1}{l} \, \frac{F^{*} - \xi'}{F' - \xi'}.$$

[*] Page 33 de ce volume.