JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

C.-F. GAUSS

Recherches dioptriques

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 1 (1856), p. 9-43.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1856_2_1__9_0>

RECHERCHES DIOPTRIQUES,

PAR C.-F. GAUSS.

(Mémoire présenté à la Société royale de Gœttingue, le 10 décembre 1840, imprimé dans les *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, tome I).

TRADUIT PAR M. A. BRAVAIS [*].

La considération de la marche de la lumière à travers les lentilles, dans le cas d'une faible inclinaison des rayons sur l'axe, a conduit les géomètres à des résultats d'une élégance remarquable, mais qui, malgré les recherches de Cotes, Euler, Lagrange et Möbius, n'ont point encore complétement épuisé la question. La circonstance que l'épaisseur des lentilles se trouve négligée, dans les travaux de ces mathématiciens, leur ôte le caractère d'une rigueur absolue, et quoique, dans certains cas, l'hypothèse des épaisseurs infiniment petites simplifie beaucoup les formules, dans plusieurs autres on peut, sans sacrifier la simplicité des lois théoriques, tenir compte de la cause d'erreur que nous venons d'indiquer. Déjà cette hypothèse affecte d'une manière fâcheuse les premiers énoncés de la dioptrique, et entre autres la définition de la distance focale que la plupart des auteurs comptent à partir du centre de la lentille, en ajoutant que son épaisseur peut être considérée comme infiniment petite. Pour les lentilles de dimensions finies que l'on peut avoir à employer, il en résulte, dans la valeur de la distance focale, une indétermination de même ordre que l'épaisseur de la lentille. D'autres fois, on compte la distance focale, soit de la surface antérieure, soit de la surface postérieure, soit du milieu de l'intervalle

[*] Cet article, qui convient essentiellement au présent Journal, a déjà paru dans les *Annales de Chimie et de Physique;* nous le reproduisons ici avec l'assentiment de M. Bravais, en y joignant une Note que ce savant professeur avait insérée aussi dans le Recueil cité, et une Note nouvelle tirée de ses leçons à l'École Polytechnique.

(J. L.)

qui les sépare, soit aussi de son centre optique, ou bien encore on la détermine d'après les rapports de grandeur existant entre un objet très-éloigné et son image, mode de détermination qui, d'ailleurs, est plus convenable que tous les autres.

On verra, dans les recherches suivantes, que la considération de l'épaisseur de la lentille n'ôte point aux formules leur simplicité première, pourvu que l'on se borne au cas des rayons très-peu inclinés sur l'axe, en négligeant l'aberration de sphéricité.

Article I. — On prendra, pour fixer la position des divers points du système que nous allons avoir à considérer, trois axes rectangulaires, dont l'un sera l'axe commun de toutes les surfaces réfringentes successives; les abscisses x se compteront sur cet axe, dans le sens même de la marche de la lumière, et à partir d'un point arbitrairement choisi.

Considérons d'abord l'effet d'une première réfraction, et supposons que le quotient de $\frac{1}{n}$ par $\frac{1}{n'}$ représente le quotient du sinus de l'angle que fait le rayon avec la normale dans le premier milieu par le sinus de l'angle avec la normale dans le second milieu. Nommons M le centre de la première surface sphérique réfringente, N le point où elle est rencontrée par l'axe, et représentons par les mêmes lettres les abscisses de ces deux points. Soit, de plus, $r = \mathrm{M} - \mathrm{N}$, r étant la valeur algébrique du rayon de la surface réfringente; enfin, soient P le point où un rayon lumineux voisin de l'axe vient percer cette surface, et θ l'angle aigu que forme la droite MP avec l'axe.

On peut écrire les deux équations de la trajectoire du rayon incident, sous la forme

$$y = \frac{\beta}{n}(x - \mathrm{N}) + b,$$

$$z = \frac{\gamma}{n}(x - \mathrm{N}) + c;$$

celles du rayon réfracté, sous la forme

$$y = \frac{\beta'}{n'}(x - \mathrm{N}) + b',$$

$$z = \frac{\gamma'}{n'}(x - \mathrm{N}) + c'.$$

Il s'agit de trouver les relations qui lient β', γ', b', c' à β, γ, b, c.

Pour le point P, on a

$$x = \mathrm{N} + r(1 - \cos\theta),$$

et, comme ce point appartient également au rayon incident et au rayon réfracté, on aura

$$\frac{\beta}{n} r(1 - \cos\theta) + b = \frac{\beta'}{n'} r(1 - \cos\theta) + b'.$$

Mais β, β', θ, sont des infiniment petits du premier ordre; on aura donc, aux grandeurs près du troisième ordre,

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} & b' = b, \\ \text{et de même} & \\ & c' = c. \end{array} \right.$$

Soit Q le point où le rayon incident, prolongé s'il le faut, vient percer le plan mené par M normalement à l'axe; soit Q′ le point de rencontre du rayon réfracté avec le même plan : les trois points M, Q, Q′, étant tous les trois situés dans le plan d'incidence, seront en ligne droite. Si l'on désigne par λ, λ' les angles que la droite de jonction de ces trois points fait avec PQ et avec PQ′, les quantités MQ sin λ, MQ′ sin λ' représenteront les perpendiculaires abaissées de M sur PQ et PQ′, et devront être entre elles dans le rapport des sinus d'incidence et de réfraction, c'est-à-dire comme $\frac{1}{n}$ est à $\frac{1}{n'}$: d'où l'on déduit

$$\mathrm{MQ}' = \frac{n.\mathrm{MQ}\sin\lambda}{n'\sin\lambda'}.$$

Or, au point Q, on a

$$y = b + \frac{\beta r}{n},$$

$$z = c + \frac{\gamma r}{n};$$

au point Q′,

$$y = b' + \frac{\beta' r}{n'},$$

$$z = c' + \frac{\gamma' r}{n'};$$

et, comme les coordonnées y, z du point Q doivent être avec les coordonnées homologues de Q′ dans le même rapport que MQ avec MQ′, on aura, rigoureusement,

$$b' + \frac{\beta' r}{n'} = \frac{n \sin\lambda}{n' \sin\lambda'}\left(b + \frac{\beta r}{n}\right),$$

$$c' + \frac{\gamma' r}{n'} = \frac{n \sin\lambda}{n' \sin\lambda'}\left(c + \frac{\gamma r}{n}\right),$$

ou, ce qui revient au même,

$$\beta' = \frac{nb + \beta r}{r}\,\frac{\sin\lambda}{\sin\lambda'} - \frac{n' b'}{r},$$

$$\gamma' = \frac{nc + \gamma r}{r}\,\frac{\sin\lambda}{\sin\lambda'} - \frac{n' c'}{r}.$$

Mais, d'autre part, λ, λ' diffèrent très-peu d'un angle droit, et $\frac{\sin\lambda}{\sin\lambda'}$ ne différera de l'unité que d'une quantité du deuxième ordre; ainsi l'on aura, au troisième ordre près,

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \beta' &= \beta - \frac{n'-n}{r}\,b = \beta + \frac{n'-n}{\mathrm{N}-\mathrm{M}}\,b,\\ \gamma' &= \gamma - \frac{n'-n}{r}\,c = \gamma + \frac{n'-n}{\mathrm{N}-\mathrm{M}}\,c. \end{aligned}\right.$$

Les équations (1) et (2) font connaître la route du rayon réfracté et résolvent le problème.

Ces formules peuvent s'appliquer au cas de la réflexion de la lumière, en y supposant $n' = -n$; la même remarque peut être étendue aux considérations qui vont suivre.

Article II. — Pour résoudre la question générale de la détermination de la marche de la lumière après $\mu + 1$ réfractions, j'adopterai les notations suivantes :

N°, N', N'',..., N^{μ} seront les points où l'axe est coupé par les $\mu + 1$ surfaces réfringentes, et ces mêmes lettres représenteront aussi les abscisses de ces points;

M°, M', M'',..., M^{μ} seront les centres de ces mêmes surfaces, et représenteront aussi les abscisses de ces centres;

n°, n', n'',..., $n^{\mu+1}$ seront des nombres proportionnels aux indices de réfraction principaux des milieux successifs.

On sait que ces nombres représentent les vitesses de la lumière dans ces divers milieux, si l'on adopte le système de l'émission, et les inverses de ces vitesses, si l'on adopte le système des ondulations.

Dans le cas où le dernier milieu serait de même nature que le premier, on aurait

$$n^{\mu+1} = n^{\circ}.$$

Les équations de la route initiale du rayon lumineux étant écrites sous la forme

$$y = \frac{\beta^{\circ}}{n^{\circ}}(x - \mathrm{N}^{\circ}) + b^{\circ},$$

$$z = \frac{\gamma^{\circ}}{n^{\circ}}(x - \mathrm{N}^{\circ}) + c^{\circ},$$

celles relatives à la route de ce rayon, lorsqu'il aura subi sa première réfraction, seront

$$y = \frac{\beta'}{n'}(x - \mathrm{N}^{\circ}) + b^{\circ},$$

$$z = \frac{\gamma'}{n'}(x - \mathrm{N}^{\circ}) + c^{\circ},$$

que l'on peut aussi mettre [*] sous la forme

$$y = \frac{\beta'}{n'}(x - \mathrm{N}') + b',$$

$$z = \frac{\gamma'}{n'}(x - \mathrm{N}') + c'.$$

De même, après la seconde réfraction, ces équations deviendront

$$y = \frac{\beta''}{n''}(x - \mathrm{N}') + b',$$

$$z = \frac{\gamma''}{n''}(x - \mathrm{N}') + c',$$

---

[*] En faisant

$$b^{\circ} + \frac{\beta'}{n'}(\mathrm{N}' - \mathrm{N}^{\circ}) = b',$$

$$c^{\circ} + \frac{\gamma'}{n'}(\mathrm{N}' - \mathrm{N}^{\circ}) = c'.$$

A. B.

et l'on pourra écrire

$$y = \frac{\beta''}{n''}(x - \mathrm{N}'') + b'',$$
$$z + \frac{\gamma''}{n''}(x - \mathrm{N}'') + c''.$$

Cette série d'équations continuera jusqu'à la dernière trajectoire, route finale du rayon émergent, dont je représenterai les équations par

$$y = \frac{\beta^{\mu+1}}{n^{\mu+1}}(x - n^{\mu}) + b^{\mu},$$
$$z = \frac{\gamma^{\mu+1}}{n^{\mu+1}}(x - \mathrm{N}^{\mu}) + c^{\mu},$$

et, en désignant

$$\beta^{\mu+1},\ \gamma^{\mu+1},\ n^{\mu+1},\ \mathrm{N}^{\mu},\ b^{\mu},\ c^{\mu},\quad \text{par}\quad \beta^{*},\ \gamma^{*},\ n^{*},\ \mathrm{N}^{*},\ b^{*},\ c^{*},$$

on aura

$$y = \frac{\beta^{*}}{n^{*}}(x - \mathrm{N}^{*}) + b^{*},$$
$$z = \frac{\gamma^{*}}{n^{*}}(x - \mathrm{N}^{*}) + c^{*}.$$

Posons maintenant, pour abréger,

$$(3)\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{N}' - \mathrm{N}^{\circ}}{n'} = t',\quad \dfrac{\mathrm{N}'' - \mathrm{N}'}{n''} = t'',\quad \dfrac{\mathrm{N}''' - \mathrm{N}''}{n'''} = t''',\ldots,\ \dfrac{\mathrm{N}^{\mu} - \mathrm{N}^{\mu-1}}{n^{\mu}} = t^{\mu},\\[2ex] \dfrac{n' - n^{\circ}}{\mathrm{N}^{\circ} - \mathrm{M}^{\circ}} = u^{\circ},\quad \dfrac{n'' - n'}{\mathrm{N}' - \mathrm{M}'} = u',\quad \dfrac{n''' - n''}{\mathrm{N}'' - \mathrm{M}''} = u'',\ldots,\ \dfrac{n^{\mu+1} - n^{\mu}}{\mathrm{N}^{\mu} - \mathrm{M}^{\mu}} = u^{\mu},\end{array}\right.$$

et représentons t^{μ} et u^{μ} par t^{*}, u^{*}.

Nous aurons, en vertu des équations (2) de l'article I, et de la note de la page précédente,

$$\beta' = \beta^{\circ} + u^{\circ} b^{\circ},$$
$$\gamma' = \gamma^{\circ} + u^{\circ} c^{\circ},$$
$$b' = b^{\circ} + t' \beta',$$
$$c' = c^{\circ} + t' \gamma'.$$

Nous aurons de même, pour le rayon qui vient de subir la deuxième réfraction,

$$\begin{aligned}\beta'' &= \beta' + u'b',\\ \gamma'' &= \gamma' + u'c',\\ b'' &= b' + t''\beta'',\\ c'' &= c' + t''\gamma'',\end{aligned}$$

et ainsi de suite, pour les autres branches successives, jusqu'à la branche finale à laquelle se rapportent les coefficients β^*, γ^*, b^*, c^*. De la manière dont les quantités β^0, b^0, β', b', β'', b'',..., dérivent les unes des autres, il résulte que β^*, b^* sont exprimées linéairement en fonction de β^0, b^0, et il en est de même pour γ^*, c^*, en fonction de γ^0, c^0. Ainsi l'on pourra écrire

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} b^* &= gb^0 + h\beta^0,\\ \beta^* &= kb^0 + l\beta^0,\end{aligned}\right.$$

g, h, k, l étant certaines combinaisons de termes dépendant de u^0, t', u', t'', u'', etc.

Si, maintenant, nous adoptons les symboles établis par Euler (*Commentarii Novi Academiæ Petropolitanæ,* tome IX), il viendra

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} g &= (u^0, t', u', t'', u'', \ldots, t^*),\\ h &= (t', u', t'', u'', \ldots, t^*),\\ k &= (u^0, t', u', t'', u'', \ldots, t^*, u^*),\\ l &= (t', u', t'', u'', \ldots, t^*, u^*).\end{aligned}\right.$$

Pour l'intelligence de ces équations symboliques, il faut se rappeler qu'Euler désigne par

$$\begin{aligned}\mathrm{A} &= (a),\\ \mathrm{A}' &= (a, a'),\\ \mathrm{A}'' &= (a, a', a''),\\ \mathrm{A}''' &= (a, a', a'', a'''), \text{ etc.},\end{aligned}$$

les valeurs des quantités A, A', A'', A''',..., qui se déduisent des équations suivantes :

$$\begin{aligned} A &= a, \\ A' &= a'A + 1, \\ A'' &= a''A' + A, \\ A''' &= a'''A'' + A', \text{ etc.,} \end{aligned}$$

$a, a', a'', a''', \ldots$, étant une série de quantités quelconques préalablement données [*].

La même loi de formation successive s'applique évidemment aux quantités c et γ; ainsi l'on a

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} c^* &= gc^0 + h\gamma^0, \\ \gamma^* &= kc^0 + l\gamma^0. \end{aligned} \right.$$

Les équations (3), (4), (5) résolvent la question proposée de la manière la plus générale.

Article III. — Euler a fait connaître les principales propriétés que possèdent les séries dont nous venons de parler. Les suivantes vont nous être utiles.

D'abord, on a toujours

$$\begin{aligned} &(a, a', a'', \ldots, a^\lambda)(a', a'', \ldots, a^{\lambda+1}) \\ &- (a, a', a'', \ldots, a^{\lambda+1})(a', a'', \ldots, a^\lambda) = \pm 1, \end{aligned}$$

le signe $+$ devant être préféré si λ est impair, et le signe $-$ dans le cas contraire.

---

[*] Il est clair que A, A', A'', etc., sont les numérateurs successifs des réduites de la fraction continue

$$a + \cfrac{1}{a' + \cfrac{1}{a'' + \ldots}};$$

que $\frac{k}{i}$ est la dernière réduite de

$$u^0 + \cfrac{1}{t' + \cfrac{1}{u' \ldots + \cfrac{1}{t^* + \cfrac{1}{u^*}}}},$$

et que $\frac{g}{h}$ en est l'avant-dernière, toujours de rang pair. A. B.

Ensuite, on peut renverser l'ordre des quantités a, a', a'',..., a^λ, sans troubler la valeur du terme correspondant, c'est-à-dire que l'on a

$$(a, a', a'', \ldots, a^\lambda) = (a^\lambda, a^{\lambda-1}, \ldots, a'', a', a).$$

On déduit de là

$$gl - hk = 1.$$

On en déduit aussi, en revenant de b^*, β^*, c^*, γ^*, à b°, β°, c°, γ°,..., par les équations (4),

$$\begin{aligned} b^\circ &= lb^* - h\beta^*, \\ \beta^\circ &= -kb^* + g\beta^*, \\ c^\circ &= lc^* - h\gamma^*, \\ \gamma^\circ &= -kc^* - g\gamma^* \text{ [*]}. \end{aligned}$$

ARTICLE IV. — Soit P un point pris arbitrairement sur la route initiale du rayon incident, et soient ξ, η, ζ ses coordonnées; on a

$$n^\circ\eta = \beta^\circ(\xi - \mathrm{N}^\circ) + n^\circ b^\circ,$$

et, si l'on substitue à b° et β° leurs valeurs en b^*, β^*, on aura

$$n^\circ\eta = (g\beta^* - kb^*)(\xi - \mathrm{N}^\circ) - n^\circ(h\beta^* - lb^*),$$

d'où l'on déduit

$$b^* = \frac{n^\circ\eta + [n^\circ h - g(\xi - \mathrm{N}^\circ)]\beta^*}{n^\circ l - k(\xi - \mathrm{N}^\circ)}.$$

Substituons cette valeur dans l'équation en x, y de la route finale du rayon lumineux, c'est-à-dire en

$$y = \frac{\beta^*}{n^*}(x - \mathrm{N}^*) + b^*,$$

[*] On pourrait aussi faire revenir le rayon lumineux dans un sens inverse; alors la série t', t'', ..., t^μ se change en t^μ, $t^{\mu-1}$, ..., t'; la série u°, u', ..., $u^{\mu-1}$, u^μ, en u^μ, $u^{\mu-1}$, ..., u', u°; h et k conservent leurs valeurs, l et g s'échangent entre eux; en outre, à cause du changement de direction de l'axe des x positives, β°, γ°, β^*, γ^* doivent changer de signe. A. B.

et faisons, pour abréger,

$$\mathrm{N}^* - \frac{n^\circ h - g(\xi - \mathrm{N}^\circ)}{n^\circ l - k(\xi - \mathrm{N}^\circ)} n^* = \xi^*,$$

$$\frac{n^\circ \eta}{n^\circ l - k(\xi - \mathrm{N}^\circ)} = \eta^* :$$

nous aurons

$$y = \eta^* + \frac{\beta^*}{n^*}(x - \xi^*)$$

pour l'équation en x, y de la route finale du rayon émergent.

Si nous opérions de même sur

$$n^\circ \zeta = \beta^\circ(\xi - \mathrm{N}^\circ) + n^\circ c^\circ,$$

et si nous posions

$$\frac{n^\circ \zeta}{n^\circ l - k(\xi - \mathrm{N}^\circ)} = \zeta^*,$$

nous aurions aussi

$$z = \zeta^* + \frac{\gamma^*}{n^*}(x - \zeta^*).$$

Nommons maintenant P^* le point dont les coordonnées sont égales à ξ^*, η^*, ζ^*; il est clair que ce point sera toujours situé sur la route finale du rayon émergent, et, comme ses coordonnées ne dépendent pas des éléments b°, β°, c°, γ°, qui fixent la direction de la route initiale, mais seulement des coordonnées du point P, ainsi que de la position, de la forme et des pouvoirs réfringents des surfaces dirimantes, il en résulte que, P étant considéré comme un objet réel ou virtuel, P^* en sera l'image.

Les points P, P^* [*] sont situés dans un plan passant par l'axe des x, et le rapport de leurs distances à l'axe est celui de l'unité au nombre $\frac{n^\circ}{n^\circ l - k(\xi - \mathrm{N}^\circ)}$; le signe positif ou négatif de cette expression indiquera si ces points sont situés du même côté de l'axe, ou de côtés opposés. Enfin, si l'on donne au point P une forme finie, mais très-petite, dans un plan normal à l'axe, il se formera en P^* une image de

[*] Ces points forment deux foyers conjugués du système des lentilles. A. B.

forme analogue, droite ou renversée, selon que l'expression

$$\frac{n^\circ}{n^\circ l - k(\xi - \mathrm{N}^\circ)} = g + \frac{k}{n^*}(\xi^* - \mathrm{N}^*)$$

sera positive ou négative.

Article V. — Si, au lieu de rapporter les équations des routes initiale et finale du rayon qui traverse le système aux points N°, N^*, on les rapporte à deux autres points Q, Q^* situés sur ces mêmes branches, et dont les abscisses seront aussi représentées par Q, Q^*, on aura

$$y = \frac{\beta^\circ}{n^\circ}(x - \mathrm{Q}) + \mathrm{B},$$

$$z = \frac{\gamma^\circ}{n^\circ}(x - \mathrm{Q}) + \mathrm{C},$$

pour la route initiale du rayon, et

$$y = \frac{\beta^*}{n^*}(x - \mathrm{Q}^*) + \mathrm{B}^*,$$

$$z = \frac{\gamma^*}{n^*}(x - \mathrm{Q}^*) + \mathrm{C}^*,$$

pour sa route finale; les constantes B, C, B^*, C^* seront données par les équations

$$\mathrm{B} = b^\circ - \frac{\mathrm{N}^\circ - \mathrm{Q}}{n^\circ}\beta^\circ = b^\circ - \theta\beta^\circ,$$

$$\mathrm{C} = c^\circ - \frac{\mathrm{N}^\circ - \mathrm{Q}}{n^\circ}\gamma^\circ = c^\circ - \theta\gamma^\circ$$

où l'on a introduit, pour abréger, les auxiliaires θ, θ^*.

Si l'on porte, dans ces deux dernières équations, les valeurs de b^*, c^* tirées des équations (4), et si l'on y remplace b°, c° par $\mathrm{B} + \theta\beta^\circ$, $\mathrm{C} + \theta\gamma^\circ$, on aura

$$\mathrm{B}^* = (g + \theta^* k)\mathrm{B} + (h + \theta g + \theta\theta^* k + \theta^* l)\beta^\circ,$$
$$\mathrm{C}^* = (g + \theta^* k)\mathrm{C} + (h + \theta g + \theta\theta^* k + \theta^* l)\gamma^\circ.$$

Les équations (4) donnent aussi les valeurs de β^*, γ^*, et, en y remplaçant b^o, c^o par les valeurs ci-dessus, on aura

$$\beta^* = kB + (l + k\theta)\beta^o,$$
$$\gamma^* = kC + (l + k\theta)\gamma^o.$$

Donc, si l'on écrit

$$G = g + \theta^* k,$$
$$H = h + \theta g + \theta\theta^* h + \theta^* l,$$
$$K = k,$$
$$L = l + \theta k,$$

on aura

$$B^* = GB + H\beta^o, \quad C^* = GC + H\gamma^o,$$
$$\beta^* = KB + L\beta^o, \quad \gamma^* = KC + L\gamma^o.$$

Les coefficients G, H, K, L satisfont à l'équation

$$GL - KH = 1.$$

Pour établir la relation la plus simple possible entre les routes initiale et finale du rayon lumineux, il est convenable de choisir sur l'axe quatre points fixes, jouissant de propriétés remarquables. Nous nommerons E, E* les deux premiers de ces quatre points, ces lettres représentant aussi les abscisses de ces points.

Nous poserons

$$E = N^o - \frac{n^o(1 - l)}{k},$$
$$E^* = N^* + \frac{n^*(1 - g)}{k},$$

pour fixer la position de ces points, et nous en déduirons

$$\theta = \frac{1 - l}{k}, \quad \theta^* = \frac{(1 - g)}{k},$$
$$G = 1, \quad H = 0, \quad K = k, \quad L = 1.$$

Alors, les équations de la route initiale deviendront

$$y = \frac{\beta^o}{n^o}(x - E) + B,$$
$$z = \frac{\gamma^o}{n^o}(x - E) + C,$$

et celles de la route finale

$$y = \frac{\beta^\circ + k\mathrm{B}}{n^*}(x - \mathrm{E}^*) + \mathrm{B},$$

$$z = \frac{\gamma^\circ + k\mathrm{C}}{n^*}(x - \mathrm{E}^*) + \mathrm{C}.$$

Il importe de remarquer que l'intersection du rayon initial avec le plan $x = \mathrm{E}$, et l'intersection du rayon final avec le plan $x = \mathrm{E}^*$, sont sur une même droite parallèle à l'axe.

On aura deux autres points remarquables F, F*, en posant

$$\mathrm{F} = \mathrm{N}^\circ + \frac{n^\circ l}{k} = \mathrm{E} + \frac{n^\circ}{k},$$

$$\mathrm{F}^* = \mathrm{N}^* - \frac{n^* g}{k} = \mathrm{E}^* - \frac{n^*}{k};$$

on en déduit

$$\theta = -\frac{l}{k}, \quad \theta^* = -\frac{g}{k},$$

$$\mathrm{G} = 0, \quad \mathrm{H} = -\frac{1}{k}, \quad \mathrm{K} = k. \quad \mathrm{L} = 0.$$

Alors, les équations de la route initiale étant

$$y = \frac{\beta^\circ}{n^\circ}(x - \mathrm{F}) + \mathrm{B}',$$

$$z = \frac{\gamma^\circ}{n^\circ}(x - \mathrm{F}) + \mathrm{C}',$$

celles de la route finale seront

$$y = \frac{k\mathrm{B}'}{n^*}(x - \mathrm{F}^*) - \frac{\beta^\circ}{k},$$

$$z = \frac{k\mathrm{C}'}{n^*}(x - \mathrm{F}^*) - \frac{\gamma^\circ}{k}.$$

Article VII. — Si, dans les équations de la route initiale rapportée au point E, on change β° en $\beta^\circ + k\mathrm{B}$, γ° en $\gamma^\circ + k\mathrm{C}$, n° en n^*, on obtient une droite passant par le même point, et parallèle à la route finale du rayon ; on obtiendrait le même résultat, en supposant que le rayon initial se brise au point où son abscisse est égale à E, en entrant dans un milieu d'indice n^*, pourvu que l'on ait

$$r = \frac{n^* - n^\circ}{k},$$

r étant le rayon de la surface sphérique réfringente que nous faisons intervenir fictivement pour briser le rayon [*voyez* équations (2)].

Si donc on suppose que le rayon initial rencontre en E une surface réfringente de rayon égal à $\frac{n^* - n^\circ}{k}$, le rayon brisé ainsi obtenu aura la même direction que notre rayon final possède à partir du point E^*.

Si le dernier milieu réfringent est le même que le premier milieu, ce qui arrive dans le cas le plus ordinaire, alors $n^* = n^\circ$, et il convient de supposer que le rayon a rencontré une lentille réfringente très-mince, de distance focale égale à $-\frac{n^\circ}{k}$ [*]; alors, la route qu'il prendra coïncidera, quant à sa direction, avec celle de notre rayon final, et l'on pourra le lui superposer en le transportant, tout d'une pièce, parallèlement à l'axe, d'un intervalle égal à $E^* - E$.

L'importance des points E, E^*, dans la théorie des lunettes, nous a engagé à leur donner un nom particulier, et à les désigner sous le nom de *points principaux de la lunette :* le point E sera le point principal de première espèce, le point E^* le point principal de deuxième espèce. Nous nommerons *plans principaux de première et de deuxième espèce,* les plans menés par ces points normalement à l'axe.

Article VIII. — Considérons de même les points F, F^*. Si, par le

---

[*] Car, en partant des équations (2), désignant par β'', γ'' ce que deviennent β', γ' lorsque le rayon rentre dans le premier milieu, et nommant M' la nouvelle valeur de M, on aura

$$\beta'' = \beta' + \frac{n - n'}{N - M'}\, b,$$

et, par suite,

$$\beta'' = \beta + \left(\frac{n' - n}{N - M} - \frac{n' - n}{N - M'}\right) b = \beta - \frac{n}{\varphi}\, b,$$

φ étant la distance focale principale de la lentille infiniment mince, positive si elle est convergente, négative dans le cas contraire. Il faudra donc supposer $-\frac{n}{\varphi} = k$. A. B.

point F pris sur l'axe, on fait passer des rayons, on aura

$$B' = 0, \quad C' = 0,$$

et les rayons émergents auront pour équation

$$y = -\frac{\beta^0}{k}, \quad z = -\frac{\gamma^0}{k};$$

d'où l'on voit qu'ils seront parallèles à l'axe.

Nous appellerons ce point le *foyer principal de première espèce* du système de lentilles. De même, si l'on assujettit les rayons émergents à passer par le point F^* situé sur l'axe, il faudra écrire $\beta^0 = 0$, $\gamma^0 = 0$, et l'équation des rayons incidents sera $y = B'$, $z = C'$, ce qui est l'équation d'un rayon parallèle à l'axe; d'où l'on voit que, réciproquement, tous les rayons parallèles à l'axe concourent, après leur sortie, en F^*.

A cause de cette propriété, F^* sera le *foyer principal de deuxième espèce*. Les plans normaux à l'axe, menés par ces points, seront les *plans focaux principaux de première et de deuxième espèce*.

Si le point F, départ des rayons, est pris hors de l'axe, sur le plan principal de première espèce, les rayons ne seront plus parallèles à l'axe; alors β^0 et γ^0 varieront seuls, et les rayons émergents cesseront d'être parallèles à l'axe, mais ils seront encore parallèles entre eux. Il en est de même pour les points du plan focal de deuxième espèce.

Article IX. — Au moyen de ces quatre plans auxiliaires, on peut facilement construire la route finale suivie par un rayon dont la route initiale est donnée.

Nommons (1) le point de rencontre du rayon initial avec le plan focal de première espèce, et (2) avec le plan principal de première espèce, et menons par F une parallèle à la droite (1) (2), qui rencontrera en (3) le plan principal de première espèce; menons par (2) une parallèle à l'axe qui rencontrera en (4) le plan principal de deuxième espèce, et par (3) une autre parallèle à l'axe qui rencontrera en (5) le plan focal de deuxième espèce. La droite (4) (5) ou (5) (4) sera la route finale du rayon qui aura traversé toutes les surfaces réfringentes.

On a, en effet, pour les valeurs des coordonnées de ces points :

	x	y	z
(1)	F	B′	C′
(2)	E	B	C
F	F	o	o
(3)	E	B — B′	C — C′
(4)	E*	B	C
(5)	F*	B — B′	C — C′

Il est évident que le rayon émergent passe par le point (4), d'après la remarque qui termine l'article VII. En outre, à cause de

$$y = \frac{\beta^\circ}{n^\circ}(x - \mathrm{E}) + \mathrm{B}, \quad y = \frac{\beta^\circ}{n^\circ}(x - \mathrm{F}) + \mathrm{B}',$$

on a

$$\mathrm{B} - \mathrm{B}' = \frac{\beta^\circ}{n^\circ}(\mathrm{E} - \mathrm{F}) = -\frac{\beta^\circ}{k};$$

et, de même,

$$\mathrm{C} - \mathrm{C}' = \frac{\gamma^\circ}{n^\circ}(\mathrm{E} - \mathrm{F}) = -\frac{\gamma^\circ}{k}.$$

Or $-\frac{\beta^\circ}{k}$, $-\frac{\gamma^\circ}{k}$ sont les coordonnées du point de rencontre du rayon sortant avec le plan $x = \mathrm{F}^*$; ce point coïncide donc avec (5) [*].

Dans le cas ordinaire où $n^* = n^\circ$, on a

$$\mathrm{F}^* - \mathrm{E}^* = \mathrm{E} - \mathrm{F};$$

[*] On peut le voir, sans calcul, en observant que la route finale de F (3) doit percer le plan E* à l'extrémité de la parallèle à l'axe menée par (3) jusqu'à la rencontre de ce plan, de là, à cause des propriétés du foyer principal, continuer sa route jusqu'en (5) parallèlement à l'axe, et remarquant en outre que les rayons parallèles (1), (2) et F (3) doivent percer le plan F* au même point. A. B.

la construction se simplifie ; le point (3) devient inutile, et, lorsque l'on a déterminé le point (4), on mène par ce point une parallèle à la ligne de jonction de (1) avec E.

Si le rayon incident, prolongé s'il le faut, passe par E, le rayon émergent sortira par E^*, et dans le cas où $n^* = n^\circ$, il sortira parallèle à sa direction première. Un tel rayon est désigné sous le nom de *rayon principal* (Hauptstrahl), dans les lentilles simples.

On pourrait appeler *distances focales principales* du système, l'intervalle $F^* - E^* = -\frac{n^*}{k}$ et l'intervalle $E - F = -\frac{n^\circ}{k}$; toutefois nous restreindrons cette désignation au cas où le milieu final est le même que le milieu initial, c'est-à-dire au cas où l'on a $F^* - E^* = E - F$. Les deux distances focales ont alors la même valeur.

Nous considérons ces distances focales comme positives, celle de première espèce, si $E > F$, celle de deuxième espèce, si $F^* > E^*$.

ARTICLE X. — Nous avons vu dans l'article IV comment, connaissant les coordonnées ξ, η, ζ d'un point voisin de l'axe, on pouvait en déduire celles de son foyer conjugué ξ^*, η^*, ζ^*. Si, dans les valeurs de ξ^*, η^*, ζ^*, on remplace N°, N^* par leurs valeurs en E, E^*, on aura, après les transformations convenables,

$$\xi^* = E^* - \frac{n^*(E-\xi)}{n^* + k(E-\xi)},$$
$$\eta^* = \frac{n^\circ \eta}{n^\circ + k(E-\xi)},$$
$$\zeta^* = \frac{n^\circ \zeta}{n^\circ + k(E-\xi)}.$$

La première de ces équations peut aussi se mettre sous la forme

$$\frac{n^*}{\xi^* - E^*} + \frac{n^\circ}{E-\xi} = -k.$$

Si, aux points E, E^*, on substitue les points F, F^*, on aura de même

$$\xi^* = F^* + \frac{n^\circ \eta^*}{k^2(F-\xi)},$$
$$\eta^* = \frac{n^\circ \eta}{h(F-\xi)},$$
$$\zeta^* = \frac{n^\circ \zeta}{k(F-\xi)}.$$

Si l'on suppose que le milieu final est de même nature que le milieu initial, on posera $n^* = n^o$, et en écrivant

$$-\frac{n^*}{k} = -\frac{n^o}{k} = \varphi,$$

on aura

$$\frac{1}{\xi^* - E^*} + \frac{1}{E - \xi} = \frac{1}{\varphi},$$

$$(\xi^* - F^*)(F - \xi) = \varphi^2,$$

$$\eta^* = -\frac{\varphi\eta}{F - \xi} = -\frac{\eta(\xi^* - F^*)}{\varphi},$$

$$\xi^* = -\frac{\varphi\zeta}{F - \xi} = -\frac{\zeta(\xi^* - F^*)}{\varphi} [*].$$

ARTICLE XI. — Lorsque l'on a $k = 0$, les points E, E^*, F, F^* s'éloignent à l'infini, et l'on ne peut plus se servir des formules précédentes.

Supposons que les équations de la route initiale soient

$$y = \frac{\beta^o}{n^o}(x - N^o) + b^o,$$

$$z = \frac{\gamma^o}{n^o}(x - N^o) + c^o,$$

celle de la route finale

$$y = \frac{\beta^*}{n^*}(x - N^*) + b^*,$$

$$z = \frac{\gamma^*}{n^*}(x - N^*) + c^*.$$

A cause des formules (4), nous aurons

$$y = \frac{l\beta^o}{n^*}(x - N^*) + gb^o + h\beta^o,$$

$$z = \frac{l\gamma^o}{n^*}(x - N^*) + gc^o + h\gamma^o.$$

---

[*] On peut écrire $\frac{F^* - \xi^*}{\varphi} = \frac{\eta^*}{\eta} = \frac{\zeta^*}{\zeta} = \frac{\varphi}{\xi - F}$: cette forme résume toute la théorie des foyers conjugués. A. B.

et, si nous posons dans ces dernières équations,

$$\mathrm{N}^* - \frac{hn^*}{l} = \mathrm{N}^* - ghn^* = \mathrm{N}^{**},$$

elles prennent la forme

$$y = \frac{l\beta^\circ}{n^*}(x - \mathrm{N}^{**}) + gb^\circ,$$

$$z = \frac{l\gamma^\circ}{n^*}(x - \mathrm{N}^{**}) + gc^\circ;$$

on aura ensuite, par les équations de l'article IV,

$$\xi^* = \mathrm{N}^* - \frac{n^\circ h - g(\xi - \mathrm{N}^\circ)}{n^\circ l} = \mathrm{N}^* - ghn^* - g^2\frac{n^*}{n^\circ}(\mathrm{N}^\circ - \xi)$$

$$= \mathrm{N}^{**} - \frac{n^*}{n^\circ}g^2(\mathrm{N}^\circ - \xi),$$

$$\eta^* = \frac{\eta}{l} = g\eta,$$

$$\zeta^* = \frac{\zeta}{l} = g\zeta.$$

Si l'on fait, dans ces formules,

$$\xi = \mathrm{N}^\circ, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0,$$

on en conclura

$$\xi^* = \mathrm{N}^{**}, \quad \eta^* = 0, \quad \zeta^* = 0;$$

d'où l'on voit que le point N^{**} est alors le foyer conjugué du point N°, et que le rapport des dimensions d'un objet placé en N° à celles de son image placée en N^{**}, est celui de 1 à g ou de l à 1.

Article XII. — Le cas de l'article XI est réalisé par une lunette dont les verres sont adaptés pour donner la vision distincte des objets éloignés dans de la lumière émergente parallèle.

Les équations de la route finale montrent que sa direction ne dépend que de la direction de la route initiale; ainsi tout faisceau de rayons parallèles qui se présente à l'entrée de la lunette sort aussi à l'état de faisceau parallèle du côté opposé.

La tangente trigonométrique de l'angle avec l'axe étant représentée par

$$\frac{1}{n^0}\sqrt{\beta^{o2}+\gamma^{o2}}$$

pour la route initiale du rayon, celle relative à la route du rayon émergent le sera par

$$\frac{l}{n^0}\sqrt{\beta^{o2}+\gamma^{o2}}.$$

Ainsi le nombre l, ou $\frac{1}{g}$, représente ce qu'on a nommé *le grossissement* dans les appareils optiques destinés à la vision des objets très-éloignés. Selon que le signe de l est positif ou négatif, l'image sera droite ou renversée.

Si l'on retourne la lunette, en dirigeant l'oculaire vers les objets extérieurs, il est clair que les rapports des tangentes des inclinaisons sur l'axe s'intervertissent, et que les objets paraissent rapetissés dans le même rapport suivant lequel ils étaient primitivement agrandis, ce qui donne, pour la mesure du grossissement, un procédé simple que j'ai exposé dans le second volume des *Nouvelles astronomiques*.

Un autre procédé consiste à déterminer le rapport linéaire d'un objet à son image. Le dynamètre de Ramsden offre une disposition qui permet de mesurer en N^{**} l'image du contour de l'objectif, sous la condition que la marche des rayons périphériques ne soit pas arrêtée par des diaphragmes intérieurs trop étroits. Comme l'image doit être réelle, il faut que $N^{**} - N^*$ soit positif, c'est-à-dire que ghn^* soit négatif. Dans la lunette de Galilée, où l'image de l'objectif est virtuelle, on ne pourrait la mesurer qu'au moyen d'un réticule convenablement placé.

Il est clair d'ailleurs que, dans cette détermination, on peut, au lieu de l'objectif, employer un disque éclairé, placé à une distance convenable en avant de la lunette, pourvu toutefois que l'image de ce disque soit réelle, c'est-à-dire qu'elle vienne se former au dehors de l'oculaire de la lunette.

Le point N^{**} est ce qu'on appelle, dans la dioptrique, *le lieu de l'œil* (Ort des Auges) [*].

---

[*] L'anneau oculaire de M. Biot. A. B.

ARTICLE XIII. — Appliquons maintenant les résultats de l'article II à une lentille simple; nommons n l'indice de réfraction du verre; représentons par $(n-1)f$, $-(n-1)f'$ les rayons de courbure de la première et de la seconde surfaces, positifs si l'abscisse du centre de la sphère surpasse celle de son point d'intersection avec l'axe, négatifs dans le cas contraire; enfin, appelons ne l'épaisseur de la lentille : nous aurons

$$\begin{aligned} n^0 &= 1, \\ n' &= n, \\ n'' &= 1, \\ u^0 &= -\frac{1}{f}, \\ t' &= e, \\ u' &= -\frac{1}{f'}, \end{aligned}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} g &= 1 + u^0 t' = \frac{f-e}{f}, \\ h &= t' = e, \\ k &= u^0 + u' + t' u^0 u' = -\frac{f+f'-e}{ff'}, \\ l &= 1 + u' t' = \frac{f'-e}{f'}; \end{aligned}$$

enfin, pour la distance focale, conformément à la définition donnée dans l'article IX,

$$\varphi = \frac{ff'}{f+f'-e}.$$

On aura ensuite, d'après les formules de l'article VI,

$$\begin{aligned} \mathrm{E} &= \mathrm{N}^0 + \frac{ef}{f+f'-e} = \mathrm{N}^0 + \frac{e\varphi}{f'}, \\ \mathrm{E}' &= \mathrm{N}' - \frac{ef'}{f+f'-e} = \mathrm{N}' - \frac{e\varphi}{f}, \\ \mathrm{F} &= \mathrm{E} - \varphi = \mathrm{N}^0 - \frac{f(f'-e)}{f+f'-e}, \\ \mathrm{F}' &= \mathrm{E}' + \varphi = \mathrm{N}' + \frac{f'(f-e)}{f+f'-e}. \end{aligned}$$

Enfin, pour l'abscisse du point d'intersection de la droite qui traverse la lentille à l'état de rayon central, on trouve facilement [*]

$$x = \mathrm{N}^{\circ} + \frac{nef}{f+f'} = \mathrm{N}' - \frac{nef}{f+f'}.$$

Ce point est indépendant de la direction de la route initiale, et il est ordinairement désigné sous le nom de *centre optique de la lentille* [**]. Mais il ne mérite réellement ce nom que pour une lentille d'épaisseur infiniment petite, et les énoncés qui se rapportent à ce cas ne peuvent, sans erreur, être étendus au cas des lentilles d'épaisseur finie. Par exemple, la propriété de régler le rapport de l'image à l'objet, si la lentille est d'épaisseur finie, ne s'applique rigoureusement qu'au cas où l'objet est placé en E, et l'image en E^*.

Il paraît préférable de donner le nom de *centre optique* au milieu de la droite de jonction des points principaux E, E^*, qui est aussi le milieu de la droite de jonction des foyers principaux F, F^*. Le centre optique, ainsi défini, ne coïncidera avec l'ancien centre optique que pour une lentille à deux courbures égales.

Le point que nous considérons comme centre optique jouit de cette propriété, que, si l'on retourne la lentille autour de ce point immobile, en renversant son axe bout pour bout, l'image d'un objet fixe continuera à se former dans le même lieu de l'espace.

Remarquons enfin que l'intervalle $\mathrm{E}' - \mathrm{E}$ a pour valeur

$$ne - \frac{e(f+f')}{f+f'-e} = (n-1)e - \frac{e^2}{f+f'-e},$$

---

[*] Par exemple, en cherchant, par les méthodes de l'art. I, le point où le rayon

$$y = \beta(x - \mathrm{E}),$$
$$z = \gamma(x - \mathrm{E}),$$

coupe l'axe, après sa première réfraction. A. B.

[**] Il est ordinairement défini de position par la proportion suivante :

$$x - \mathrm{N}^{\circ} : \mathrm{N}' - x : \mathrm{N}' - \mathrm{N}^{\circ} :: f : f' : f + f',$$

d'où l'on déduit les valeurs de x énoncées dans le texte.

On a aussi

$$x - \mathrm{E} : \mathrm{E}' - x :: f : f'.$$

A. B.

et que, dans le cas habituel où e est très-petit par rapport à $f+f'$, cet intervalle diffère très-peu de $(n-1)e$, c'est-à-dire, très-peu du produit de l'épaisseur de la lentille par le nombre $\frac{n-1}{n}$.

Article XIV. — Dans le cas d'une série de lentilles disposées sur le même axe, on simplifie les formules générales en substituant aux rayons des surfaces et à leurs distances mutuelles les distances focales de chaque lentille simple, et l'écartement du plan principal de deuxième espèce de chacune d'elles du plan principal de première espèce de la lentille suivante. Les nouvelles formules ainsi obtenues ressemblent à celles de l'article II, mais contiennent un nombre d'éléments moitié moindre.

Désignons par φ°, φ', φ'',..., les distances focales principales des lentilles qui se suivent sur l'axe, les abscisses des points principaux de première espèce par E°, E', E'',..., celles des points principaux de deuxième espèce par I°, I', I'', etc.

Écrivons ensuite

$$-\frac{1}{\varphi^\circ}=u^\circ,\quad -\frac{1}{\varphi'}=u',\quad -\frac{1}{\varphi''}=u'',\ldots,$$

et convenons de figurer, au moyen d'un astérisque, les derniers termes de ces séries.

Mettons les équations de la route initiale sous la forme

$$\begin{aligned}y&=\beta^\circ(x-E^\circ)+b^\circ,\\ z&=\gamma^\circ(x-E^\circ)+c^\circ,\end{aligned}$$

et celles de la route finale sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}y&=\beta^*(x-I^*)+b^*,\\ z&=\gamma^*(x-I^*)+c^*.\end{aligned}$$

La loi de dérivation est donnée [*] par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}b^*&=gb^\circ+h\beta^\circ, & c^*&=gc^\circ+h\gamma^\circ,\\ \beta^*&=kb^\circ+l\beta^\circ, & \gamma^*&=kc^\circ+l\gamma^\circ,\end{aligned}$$

---

[*] Considérons l'équation

$$y=\beta^\circ(x-E^\circ)+b^\circ;$$

on en déduit, pour le rayon sortant de la lentille (art. VI), à cause de $n^*=1$, et de les quantités g, h, k, l se déduisant de u^0, u', u'',..., t', t'',..., de la manière qu'indiquent les équations (5) de l'article II.

Pour trouver les deux points principaux du système de lentilles considéré dans son ensemble, on peut reprendre la méthode de calcul de l'article V, en y remplaçant N^0, N^* par E^0, I^*, et y faisant $\theta = \frac{1-l}{k}$, $\theta^* = \frac{1-g}{k}$; on trouve alors, pour les abscisses de ces deux points principaux,

$$x = E^0 - \frac{1-l}{k},$$

$$x = I^* + \frac{1-g}{k}.$$

On trouverait de même, pour les deux foyers principaux du système,

$$x = E^0 + \frac{l}{k},$$

$$x = I^* - \frac{g}{k}.$$

La distance focale principale, qui mesure l'écartement d'un plan prin-

---

$k = -\frac{1}{\varphi^0}$,

$$y = \left(\beta^0 - \frac{1}{\varphi^0} b^0\right)(x - I^0) + b^0 = (\beta^0 + u^0 b^0)(x - I^0) + b^0,$$

et ensuite

$$y = (\beta^0 + u^0 b^0)(x - E') + (\beta^0 + u^0 b^0)(E' - I^0) + b^0;$$

donc, si

$$y = \beta'(x - E') + b'$$

est l'équation du rayon qui a traversé la lentille, on aura

$$\beta' = \beta^0 + u^0 b^0,$$
$$b' = t'\beta' + b^0 = t'\beta^0 + (1 + u^0 t') b^0,$$

loi de dérivation qui est la même que dans le cas des simples surfaces réfringentes.

A. B.

cipal du plan focal principal de même espèce, sera égale à

$$-\frac{1}{k}.$$

Dans le cas d'un système de deux lentilles, on a

$$\begin{aligned}
g &= 1 - \frac{1}{\varphi^0} t',\\
h &= t',\\
k &= -\frac{1}{\varphi^0} - \frac{1}{\varphi'} + \frac{t'}{\varphi^0 \varphi'},\\
l &= 1 - \frac{1}{\varphi'} t'.
\end{aligned}$$

Les valeurs de x, qui fixent la position des deux plans principaux, seront

$$E^0 + \frac{t' \varphi^0}{\varphi^0 + \varphi' - t'} \quad \text{et} \quad I' = \frac{t' \varphi'}{\varphi^0 + \varphi' - t'};$$

la distance focale sera

$$\frac{\varphi^0 \varphi'}{\varphi^0 + \varphi' - t'}.$$

Ces formules sont pareilles à celles de l'article XIII, qui déterminent le lieu des plans principaux et la distance focale d'une lentille simple; il suffit d'y remplacer f^0, f', e par φ^0, φ', t'.

L'intervalle qui sépare l'un de l'autre les deux plans principaux sera alors égal à

$$I' - E^0 - \frac{t'(\varphi^0 + \varphi')}{\varphi^0 + \varphi' - t'} = I^0 - E^0 + I' - E' + t' - \frac{t'(\varphi^0 + \varphi')}{\varphi^0 + \varphi' - t'},$$

ou

$$(I^0 - E^0) + (I' - E') - \frac{t'^2}{\varphi^0 + \varphi' - t'}.$$

Si l'intervalle t' est très-petit, comme cela a lieu dans les lentilles achromatiques à deux verres contigus, le terme en t'^2 peut se négliger, et l'écartement des deux plans principaux dans la double lentille est sensiblement égal à la somme de ces deux écartements pour chacune des deux lentilles intégrantes.

Il serait facile d'étendre les formules de cet article au cas où l'on combinerait entre elles, non plus deux ou plusieurs lentilles, mais deux ou plusieurs systèmes de lentilles; chacun de ces systèmes agirait comme ferait une lentille unique ayant les mêmes points principaux et les mêmes foyers principaux.

Article XV. — Lorsqu'une lentille ou un système de lentilles sont disposés suivant un même axe, les effets optiques qu'ils produisent dépendent des lieux qu'y occupent les deux foyers principaux, et, en outre, de la valeur absolue de la distance focale du système, laquelle, les foyers étant donnés, sert à fixer la position des points principaux.

Soit D un point déterminé pris sur l'axe, et soit aussi D l'abscisse de ce point; écrivons

$$D - F = p, \quad F' - D = q,$$

et nommons f la distance focale. Soient de plus ξ et ξ' les abscisses d'un point servant d'objet et de son image. En faisant varier la position de l'objet le long de l'axe, celle de l'image variera en même temps, et l'on pourra en déduire les valeurs des trois quantités p, q, f qui se trouveront ainsi déterminées expérimentalement, sans passer par l'intermédiaire des indices de réfraction des courbures des surfaces réfringentes, et des intervalles qui les séparent.

Mesurons donc les deux distances $D - \xi = a$, $\xi' - D = b$; l'équation connue

$$(F - \xi)(\xi' - F') = f^2$$

se changera en

$$(a - p)(b - q) = f^2.$$

Deux autres expériences donneront de même, en nommant a', b', a'', b'' les valeurs simultanées de a et de b,

$$(a' - p)(b' - q) = f^2,$$
$$(a'' - p)(b'' - q) = f^2,$$

d'où l'on déduit, par élimination,

$$a - p = \frac{(a'-a)(a''-a)(b'-b'')}{R}, \quad b - q = \frac{(b-b')(b-b'')(a''-a')}{R},$$

$$a' - p = \frac{(a'-a)(a''-a')(b-b'')}{R}, \quad b' - q = \frac{(b-b')(b'-b'')(a''-a)}{R},$$

$$a'' - p = \frac{(a''-a)(a''-a')(b-b')}{R}, \quad b'' - q = \frac{(b-b'')(b'-b'')(a'-a)}{R},$$

$$f^2 = \frac{(a'-a)(a''-a)(a''-a')(b-b')(b-b'')(b'-b'')}{R^2},$$

en posant, pour abréger,

$$\begin{aligned} R &= (a''-a)(b-b') - (a'-a)(b-b'') \\ &= (a''-a')(b-b') - (a'-a)(b'-b'') \\ &= (a''-a')(b-b'') - (a''-a)(b'-b''). \end{aligned}$$

Article XVI. — Relativement à la solution précédente, on fera les remarques suivantes :

1°. L'objet, dans les trois expériences, reste toujours placé du même côté par rapport à la lentille; si l'on jugeait convenable de le placer du côté opposé, il faudrait considérer l'image comme étant l'objet, et l'objet comme étant l'image, ce qui nous ferait rentrer dans le cas de l'article XV;

2°. La formule qui donne f^2 ne détermine pas son signe; mais on saura toujours si f est positif ou négatif, en regardant si l'image est droite ou renversée : dans le premier cas, $\xi' - F'$ et f auront des signes contraires; si l'image est renversée, ces quantités auront le même signe;

3°. La méthode ne s'applique avec facilité qu'au cas des images réelles : si l'image était virtuelle, il faudrait recourir à des artifices plus ou moins compliqués pour en déterminer le lieu géométrique;

4°. Enfin, les conditions dans lesquelles sont faites les trois expériences doivent être le plus différentes possible, afin que les résultats obtenus soient exacts : si les circonstances de position étaient trop semblables, la précision des déterminations en souffrirait évidemment.

Article XVII. — Dans le cas d'une lentille simple, ou de deux ou plusieurs lentilles accouplées, comme cela arrive notamment pour les objectifs achromatiques, la distance des deux points principaux E et E' est petite, et en la supposant connue et égale à λ, on aura

$$E' - E = \lambda,$$
$$F' - F = p + q = 2f + \lambda.$$

Alors deux observations suffisent, et, si l'on écrit

$$(a - p)(b - q) = f^2,$$
$$(a' - p)(b' - q) = f^2,$$

on aura, après l'élimination de p et de q,

$$\frac{(a' + b' - a - b)^2}{(a' - a)(b - b')} f^2 + 2(a + b + a' + b' - 2\lambda) f - (a + b' - \lambda)(a' + b - \lambda) = 0.$$

Si l'on dispose les expériences de telle sorte que l'on ait

$$a' + b' = a + b = c,$$

la distance de l'image à l'objet sera la même dans les deux observations, quoique la position relative de la lentille ait varié. On trouve alors facilement

$$f = \frac{1}{4}(c - \lambda) - \frac{(b' - b)^2}{4(c - \lambda)}.$$

Pour chaque valeur de c, la distance de l'objet au foyer principal de première espèce, c'est-à-dire $F - \xi$, devra satisfaire à l'équation suivante,

$$F - \xi + \frac{f^2}{F - \xi} = F - \xi + \xi' - F' = c - 2f - \lambda,$$

ce qui donne pour $F - \xi$ les deux valeurs

$$F - \xi = \tfrac{1}{2}(c - 2f - \lambda) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(c - 4f - \lambda)(c - \lambda)},$$

et, par suite, deux positions de l'objet pour lesquelles l'intervalle c reprend la même valeur. Ces racines ne deviennent égales que dans le cas où $c = 4f + \lambda$.

Le produit des deux racines de $F - \xi$, c'est-à-dire $(a - p)(a' - p)$, est évidemment égal à f^2, et, comme l'on a pareillement

$$(a-p)(b-q)=f^2,$$
$$(a'-p)(b'-q)=f^2,$$

il en résulte $a'-p=b-q$, $b'-q=a-p$. On a ensuite, pour la position des foyers et des points principaux,

$$\begin{aligned}
F &= D+\tfrac{1}{2}(b+b'-c)-\tfrac{1}{2}(2f+\lambda),\\
F' &= D+\tfrac{1}{2}(b+b'-c)+\tfrac{1}{2}(2f+\lambda),\\
E &= D+\tfrac{1}{2}(b+b'-c)-\tfrac{1}{2}\lambda,\\
E' &= D+\tfrac{1}{2}(b+b'-c)+\tfrac{1}{2}\lambda.
\end{aligned}$$

Article XVIII. — Lorsqu'on a $F-\xi=f$, on a aussi $\xi'-\xi=4f+\lambda$, et l'écartement entre l'objet et l'image est à son minimum. Dans le voisinage de cette position, un faible déplacement de la lentille fait varier à peine l'écartement, de sorte que b et b' ne pourraient être que mal déterminés par l'expérience dans de telles conditions. Cette circonstance n'influe pas d'ailleurs sur la mesure de f, attendu que l'expression de f contient seulement le carré de la quantité $b-b'$, qui représente le déplacement de la lentille, et il suffit de mesurer ce déplacement pour en déduire $b-b'$.

Article XIX. — Si l'on néglige l'épaisseur λ, l'équation qui donne la valeur de f se change en

$$f=\frac{1}{4}c-\frac{(b'-b)^2}{4c}.$$

Le procédé basé sur l'emploi de cette équation s'accorde avec celui décrit par Bessel dans le XVII[e] volume des *Nouvelles astronomiques*, et appliqué par ce savant à la mesure de la distance focale de l'héliomètre de Kœnigsberg.

Il est évident que la distance focale, ainsi mesurée, surpasse la véritable de la quantité

$$\frac{1}{4}\lambda+\frac{\lambda(b'-b)^2}{4c(c-\lambda)},$$

expression dont le second terme peut être regardé comme négligeable.

On peut donc se contenter du premier terme. Toutefois il est assez difficile de mesurer exactement la valeur de λ. Pour une lentille simple, on peut se borner à la valeur $(n-1)e$, que nous avons indiquée dans l'article XIII; il suffit de mesurer l'épaisseur de la lentille et l'indice de réfraction du verre employé. Pour une lentille à deux verres, dont on peut obtenir séparément les épaisseurs, on recourra à la règle de l'article XIV.

Je prendrai, comme exemple, un objectif dont la lentille en crown aurait 7 lignes d'épaisseur, et celle de flint 3 lignes; les indices étant pour la première 1,528, et pour la seconde 1,618, la valeur de λ serait,

Pour le crown.	$2^{\text{lig}},42$,
Pour le flint.	1,15,
Et pour la lentille double.	3,57.

La distance focale obtenue, en négligeant λ, serait donc trop forte de $0^{\text{lig}},89$. Ainsi, pour une distance focale de 8 pieds, qui est celle de notre objectif, l'erreur se monterait à $\frac{1}{1300}$ de la valeur absolue.

Article XX. — Si l'on jugeait insuffisante cette méthode pour déterminer la valeur de λ, on pourrait recourir au procédé suivant :

Déterminons le lieu de l'image d'un objet très-éloigné par rapport au point fixe D lié à la lentille; la distance de cette image à D sera

$$F' - D = q.$$

En renversant la lentille, et opérant de même, nous aurons pareillement

$$D - F = p.$$

Plaçons ensuite un objet en ξ, du côté de F, et très-près de la lentille; mesurons sa distance à D, et posons

$$D - \xi = a''.$$

Mesurons la distance de son image ξ' à D, et posons

$$\xi' - D = b'' :$$

nous aurons

$$p - a'' = \xi - \mathrm{F}, \quad q - b'' = \mathrm{F}' - \xi',$$

$$(p - a'')(q - b'') = f^2,$$

$$\lambda = \mathrm{F}' - \mathrm{F} - 2f = p + q - 2\sqrt{(p - a'')(q - b'')}.$$

On peut mettre cette expression sous la forme

$$\lambda = a'' + b'' + \frac{\left[p - a'' - \sqrt{(p - a'')(q - b'')}\right]^2}{p - a''}.$$

Or $p - a''$ est la distance de l'objet au foyer principal F; $p - a'' - \sqrt{(p - a'')(q - b'')}$ est sa distance, généralement très-petite, au point principal E; le carré de cette dernière quantité sera très-petit par rapport à $p - a''$: ainsi l'exactitude de la détermination de λ reposera surtout sur l'exactitude de la mesure de $a'' + b''$, c'est-à-dire de $\xi' - \xi$.

ARTICLE XXI. — Nous ferons encore à ce sujet les remarques suivantes :

1°. Comme, dans la troisième expérience, l'image devient virtuelle, il conviendra, pour mesurer $\xi' - \xi$, d'employer le procédé suivant : sur le porte-objet d'un microscope on placera un disque portant deux traits noirs croisés rectangulairement, et, par-dessus ce disque, la lentille dont l'axe doit correspondre à la croisée des traits. En levant ou abaissant le microscope, on l'ajustera à la vision distincte de cette croix; puis, enlevant la lentille, on ajustera de nouveau le microscope sur la croix, et le déplacement qu'il aura subi parallèlement à son axe représentera la quantité $\xi' - \xi$.

2°. Lorsque, dans la détermination des foyers principaux, la distance de l'objet n'est pas jugée assez grande pour pouvoir être considérée comme infinie, il est clair qu'il faut retrancher de la valeur obtenue pour $\mathrm{F}' - \mathrm{D}$ une correction égale au carré de la distance focale divisée par la distance de l'objet; on a alors l'exacte valeur de q : la même correction doit être appliquée à la quantité p.

Soient, dans la première expérience, $\mathrm{D} - \xi = a$, a étant une longueur très-considérable par rapport à la distance focale de la lentille, et $\xi' - \mathrm{D} = b$, b différant très-peu de $\mathrm{F}' - \mathrm{D}$;

Soient, dans la seconde expérience, $\mathrm{D} - \xi = b'$, b' étant aussi une très-grande longueur sensiblement égale à a, et $\xi' - D = a'$; nous retombons sur les trois équations

$$(a - p)(b - q) = f^2,$$
$$(b' - q)(a' - p) = f^2,$$
$$(a'' - p)(b'' - q) = f^2.$$

Or, comme dans la deuxième expérience, il est toujours permis de supposer que le lieu de l'image est le même que dans la première (car un petit déplacement de la lentille parallèlement à elle-même entraîne l'image d'un objet très-éloigné avec un mouvement qui est sensiblement le même que celui de la lentille), il est permis d'écrire

$$a + b = a' + b' = c.$$

Remplaçant, dans les équations de l'article XV, a et b' par leurs valeurs tirées de ces deux dernières équations, on aura

$$p = a' - \frac{(a' - a'')(b - b'')}{c - a'' - b''},$$
$$q = b - \frac{(a' - a'')(b - b'')}{c - a'' - b''},$$

formules qui donnent la valeur *exacte* de la correction commune à appliquer aux quantités a' et b pour en déduire p et q.

Lorsqu'on applique la méthode indiquée dans l'article XVII de la manière qui vient d'être exposée dans les alinéa précédents, les valeurs de E, E' se changent en

$$E = D + \tfrac{1}{2}(q - p) - \tfrac{1}{2}\lambda = D + \tfrac{1}{2}(b - a') - \tfrac{1}{2}\lambda,$$
$$E' = D + \tfrac{1}{2}(q - p) + \tfrac{1}{2}\lambda = D + \tfrac{1}{2}(b - a') + \tfrac{1}{2}\lambda.$$

Article XXII. — La valeur obtenue pour la distance focale, et les positions de nos quatre plans principaux, ne conviennent rigoureusement qu'à une lumière de réfrangibilité déterminée. Pour des rayons d'une autre espèce, ces plans se déplacent, et la lumière qui a traversé le système éprouve une dispersion à la sortie. On peut la faire disparaître par une combinaison convenable de lentilles. Pour qu'un objectif soit parfaitement achromatique, il est nécessaire que des rayons arrivant parallèles sur l'objectif convergent rigoureusement en un point unique à leur sortie; mais il ne suffit pas que les choses se passent de la sorte pour un système de rayons parallèles à l'axe, il faut encore qu'il en soit de même pour tout faisceau oblique à l'axe. En d'autres termes, les images colorées d'un objet fini, éclairé par de la lumière blanche, doivent non-seulement se former dans un même plan focal, mais, de plus, elles doivent avoir la même grandeur. La première de ces deux conditions exige l'identité du point focal de deuxième espèce pour les diverses couleurs, la seconde exige l'identité des distances focales, et, par suite, la condition précédente étant supposée remplie, la coïncidence du plan principal de deuxième espèce pour les diverses couleurs. Si la première de ces deux conditions était seule satisfaite, les rayons obliques à l'axe ne pourraient donner une image nette: mais si les distances focales sont très-peu inégales, le défaut de netteté qui en résulte est toujours presque insensible.

Dans la construction actuelle des objectifs achromatiques, on ne s'attache guère qu'à satisfaire à la première des deux conditions que nous venons d'indiquer. Lorsque les lentilles destinées à se compenser sont au contact ou dans un état qui en est très-voisin, le lieu des deux plans principaux de l'objectif est à peine modifié par les différences de réfrangibilité des divers rayons; car la seconde condition se trouve toujours à peu près satisfaite. On pourrait d'ailleurs, si cela en valait la peine, calculer les épaisseurs des lentilles, de manière à produire la coïncidence rigoureuse du deuxième plan principal qui se rapporte aux rayons rouges avec celui qui se rapporte aux rayons violets.

Il n'en est plus de même si l'on écarte la lentille convexe en crown de la lentille de flint, en transportant l'une d'elles dans l'intérieur de la lunette. On peut, en effet, déterminer leur écartement et les distances focales de ces deux lentilles, de manière à faire coïncider les foyers principaux de deuxième espèce propres aux différentes couleurs; mais alors la distance focale du système des deux lentilles pour les rayons violets sera nécessairement plus grande que celle relative aux rayons rouges, et l'aberration ainsi produite sera de même ordre que celle qui a lieu (dans un autre sens) dans les lentilles simples non achromatiques. Le même effet se produit aussi dans les lunettes dites *dialytiques*, où la seconde lentille est une combinaison d'une lentille de flint et d'une autre de crown juxtaposées. Il n'est pas possible d'obtenir ainsi une image parfaitement achromatique d'un objet; car, si l'image violette est amenée à coïncider avec l'image rouge dans un même plan focal, elle sera nécessairement plus étendue que l'image rouge, et devra, par conséquent, la déborder.

Il ne faut pas cependant se hâter de conclure qu'une telle lunette sera nécessairement d'un achromatisme moins parfait que les lunettes construites d'après les principes ordinaires, et munies d'objectifs donnant des images parfaitement nettes.

L'image réelle ou virtuelle d'un objectif peut, quoique parfaitement achromatique, arriver colorée dans l'œil, à cause de la dispersion que produit le passage de la lumière à travers les verres oculaires. A la vérité, on peut disposer ceux-ci de manière à détruire l'irisation du bord des images; mais alors l'aberration longitudinale de réfrangibilité subsiste, et celle qui est propre à notre œil vient encore s'y ajouter. Tout ce que l'on peut faire, c'est de donner aux deux images virtuelles, rouge et violette, fournies par le système oculaire, la même grandeur apparente; mais on ne peut obtenir qu'elles se forment à la même distance de l'œil, ni, par conséquent, qu'elles soient également visibles.

L'inégalité de grandeur des images rouge et violette, inévitable dans les lunettes dialytiques, peut y être compensée par une disposition convenable des verres oculaires, et s'annuler tout aussi bien que dans les lunettes achromatiques ordinaires; mais l'aberration longitudinale de sphéricité y subsistera, tant que les images rouge et violette de l'objectif viendront se former dans le même plan focal.

Il résulte de ces considérations que, pour que l'image formée sur la rétine soit parfaitement achromatique, l'image due à l'objectif doit avoir déjà un certain degré d'aberration longitudinale de réfrangibilité, qui devra être calculée d'avance d'après l'aberration de l'oculaire et celle de l'œil lui-même.

Théoriquement, on peut calculer les courbures d'un objectif à deux verres, de manière à donner à ses images une aberration longitudinale de réfrangibilité assignée à priori : mais, indépendamment de la difficulté qu'il y aurait à introduire dans les procédés pratiques une précision suffisante pour obtenir une aberration ainsi déterminée d'avance, celle-ci ne pourrait convenir qu'à un oculaire fait exprès pour la compenser.

Le mode de construction des lunettes dialytiques, et la mobilité dont jouit la lentille intérieure par rapport à la lentille extérieure, peuvent fournir le moyen de faire varier l'aberration longitudinale à la volonté de l'opérateur, et de lui donner la valeur qui convient à un oculaire quelconque, tandis que la disposition de l'oculaire lui-même peut servir à faire disparaître la coloration des bords de l'image. C'est là un sujet de recherches intéressantes, et sur lequel j'espère, en une autre occasion, pouvoir donner des développements plus étendus.