EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. LIOUVILLE

PAR M. REECH,
Directeur de l'École impériale du Génie maritime.

« Paris, le 22 septembre 1854.

» Monsieur,

» Il a été question dernièrement à l'Institut d'un nouveau système de cartes géographiques de M. Babinet, ayant pour objet de représenter la vraie surface d'une sphère sur un plan. Voyez si les remarques suivantes que cette question m'a suggérées peuvent figurer dans un des numéros du *Journal de Mathématiques*.

I.

» En désignant par

u la longitude d'un point situé sur une surface sphérique de rayon 1,

t la latitude du même point,

et en considérant un élément sphérique compris entre deux circonférences méridiennes u, $u + du$, et entre des parallèles t, $t + dt$, on a pour l'étendue de l'élément sphérique l'expression

$$dS = du\, dt \cos t. \tag{1}$$

» Les lignes méridiennes de la sphère étant supposées représentées sur un plan par une équation de la forme

$$\psi(x, y) = u, \tag{2}$$

et les parallèles de la sphère étant supposés représentés par une autre équation de la forme

$$\varphi(x, y) = t, \tag{3}$$

on aura à concevoir sur le plan deux courbes consécutives de l'espèce ψ et deux courbes consécutives de l'espèce φ qui comprendront entre elles une petite étendue parallélogrammique généralement obliquangle.

» Les variables x, y étant supposées représenter des coordonnées rectangulaires, il ne sera pas difficile de trouver qu'une telle étendue parallélogrammique correspondante à deux accroissements donnés du, dt des variables indépendantes u, t sera mesurée par la formule

$$dS = \frac{du\,dt}{\frac{d\psi}{dx}\frac{d\varphi}{dy} - \frac{d\psi}{dy}\frac{d\varphi}{dx}}. \tag{4}$$

» Cette autre expression de l'aire dS devant être égale à celle de la formule (1), il s'ensuit que la détermination générale des fonctions ψ, φ dépendra de la résolution de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{d\psi}{dx}\frac{d\varphi}{dy} - \frac{d\psi}{dy}\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{\cos t}. \tag{5}$$

» La difficulté sera la même que celle dont je me suis occupé si longuement dans un Mémoire intitulé : *Théorie générale des effets dynamiques de la Chaleur,* qui remplit les cahiers d'octobre, novembre et décembre 1853 de votre Journal (tome XVIII), et que M. Mallet-Bachelier a bien voulu ensuite tirer à part et publier comme ouvrage séparé : là, en lieu et place de la relation (1), je me servais de l'expression plus générale

$$\left\{\begin{aligned} dS &= q'\Gamma(t') - q\Gamma(t) \\ &= \Gamma(t')f(t', u)\,du - \Gamma(t)f(t, u)\,du \\ &= du\,dt\,\frac{d}{dt}\{\Gamma(t)f(t, u)\}. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

» Donc, en recourant à ma *Théorie générale des effets dynamiques de la Chaleur,* et en y faisant

$$\frac{d}{dt}\Gamma\{(t)f(t, u)\} = \cos t,$$

ou, ce qui reviendra au même,

$$\begin{aligned} \Gamma(t)f(t, u) &= \sin t, \\ \Gamma(t)\,F(t, u) &= u \sin t, \end{aligned}$$

et en remplaçant, en outre, v, p par x, y, il n'y aura pas une seule de mes formules en $\Gamma(t)f(t,u)$ qui ne devienne directement applicable au problème de pure géométrie de M. Babinet.

II.

» Ainsi d'abord, d'après la formule (10), page 384 du tome XVIII de votre Journal, la question à résoudre ne sera pas autre que celle qui consistera à rendre une différentielle exacte une relation de la forme

$$dB = \sin t\,du - y\,dx, \tag{7}$$

et, d'après la formule (11), page 385, il faudra qu'on satisfasse à la condition

$$\frac{dy}{dt}\frac{dx}{du} - \frac{dy}{du}\frac{dx}{dt} = \cos t, \tag{8}$$

ou bien, d'après la formule (12), page 387, il faudra que l'on ait

$$\frac{du}{dx}\frac{dt}{dy} - \frac{du}{dy}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos t}, \tag{9}$$

ce sera l'équation (5) de tout à l'heure.

» Ou bien encore, d'après l'équation (13), page 390, en considérant x, t comme variables indépendantes, il faudrait que l'on ait

$$\frac{dy}{dt} = \frac{du}{dx}\cos t. \tag{10}$$

» Dans les équations (19) et suivantes, page 404, on devra faire

$$C = \Gamma(t)F(t,u) = \int\Gamma(t)f(t,u)\,du = \int\sin t\,du = u\sin t,$$

ce qui fera avoir les deux relations simultanées, dites complémentaires l'une de l'autre,

$$\left\{\begin{aligned} dB &= \sin t\,du - y\,dx, \\ dA &= u\cos t\,dt + y\,dx. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

» Au lieu de celles-là, on pourra, d'après les équations (19 *bis*), page 405, faire usage des deux relations correspondantes,

$$\left\{\begin{aligned} dB_1 &= \sin t\,du + x\,dy, \\ dA_1 &= u\cos t\,dt - x\,dy, \end{aligned}\right. \tag{12}$$

les quantités A, B, A_1, B_1 satisfaisant aux équations

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} A_1 &= A - xy, \\ B_1 &= B + xy, \\ A_1 + B_1 &= A + B = C = u \sin t. \end{aligned}\right.$$

Les formules (22) et (23), page 407, ne conduiront pas à d'autres résultats quand on y fera

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} R &= \Gamma(t)\,F(t, u) = u \sin t, \\ Q &= B. \end{aligned}\right.$$

» Mais l'essentiel est que, d'après les résultats généraux, pages 506, 507, 508 et 509, on satisfera aux conditions (8), (9), (10),... ci-dessus, c'est-à-dire que l'on résoudra le problème de M. Babinet dans son entière généralité en désignant par A une fonction arbitraire en x, t, et en posant, d'après les équations (q), page 506,

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dA(x, t)}{dx} &= y, \\ \frac{dA(x, t)}{dt} &= u \cos t; \end{aligned}\right.$$

ou bien, en désignant par B une fonction arbitraire en x, u, et en posant, d'après les formules (a), page 507,

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dB(x, u)}{dx} &= -y, \\ \frac{dB(x, u)}{du} &= \sin t. \end{aligned}\right.$$

» Un seul et même état de choses pourra d'ailleurs être représenté par les formules (15) et par les formules (16), pourvu que les fonctions A, B soient de telles natures que l'on ait

$$A(x, t) + B(x, u) = u \sin t.$$

» Cette relation devra se réduire à une pure identité quand on y subtituera la valeur de x en u et t tirée soit de la deuxième des formules (15), soit de la deuxième des formules (16).

En d'autres termes, la valeur de x tirée de la seconde des formules (15) et la valeur de x tirée de la seconde des formules (16) devront nécessairement être égales; par conséquent, les deux expressions

$$\frac{d\mathrm{A}(x, t)}{dt} = u \cos t,$$

$$\frac{d\mathrm{B}(x, u)}{du} = \sin t,$$

devront être deux formes différentes d'une même équation générale entre les trois variables x, u, t.

» Je suppose, par exemple, que l'on me donne une relation quelconque

$$f(x, u, t) = 0.$$

» Cette équation étant supposée résoluble par rapport à u et par rapport à t, je puis la remplacer soit par

$$u = f_1(x, t),$$

soit par

$$t = f_2(x, u);$$

je mets la valeur de u dans la deuxième des formules (15), et je trouve

$$\frac{d\mathrm{A}(x, t)}{dt} = f_1(x, t) \cos t;$$

d'où je conclus ensuite,

$$\mathrm{A}(x, t) = \int^t f_1(x, t) \cos t\, dt.$$

» En mettant, au contraire, la valeur de t dans la seconde des formules (16), je trouve

$$\frac{d\mathrm{B}(x, u)}{du} = \sin(f_2(x, u)),$$

puis, en intégrant,

$$\mathrm{B}(x, u) = \int^u \sin(f_2(x, u))\, du.$$

Telle sera la manière de trouver les deux fonctions correspondantes A, B dans chaque cas pour une relation donnée quelconque

$$f(x, u, t) = 0,$$

entre les trois variables x, u, t.

» Quand on déterminera les deux fonctions correspondantes A, B de cette manière, on trouvera

$$\mathrm{A}(x, t) + \mathrm{B}(x, u) = \int^t f_1(x, t) \cos t \, dt + \int^u \sin [f_2(x, u)] \, du,$$

et comme la variable x devra être regardée comme une constante dans chacune des intégrales du second membre, l'une par rapport à t, l'autre par rapport à u, il s'ensuit que le résultat sera le même que si l'on avait

$$\mathrm{A}(x, t) + \mathrm{B}(x, u) = \int^t u \cos t \, dt + \int^u \sin t \, du,$$

et que les variables t, u dépendissent directement l'une de l'autre d'après la relation donnée

$$f(x, t, u) = 0,$$

dans laquelle on regarderait aussi x comme une constante.

» Or, à ce point de vue, il est clair que le second membre de l'équation trouvée se réduira à

$$\int^t u \, d(\sin t) + \int^u \sin t \, du = \int d(u \sin t),$$

et qu'enfin on aura

$$\mathrm{A}(x, t) + \mathrm{B}(x, u) = u \sin t. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

» Le même procédé de calcul servira à trouver l'une des fonctions A, B quand l'autre sera donnée; car au moyen de celle des fonctions A, B qui sera donnée, on aura, soit d'après la seconde des formules (15), soit d'après la seconde des formules (16), une relation déterminée de l'espèce

$$f(x, u, t) = 0.$$

» Ce n'est pas tout; d'après les formules (q_1), (a_1), page 507, on résoudra aussi le problème en posant

$$(17) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\mathrm{A}_1(y, t)}{dy} &= -x, \\ \frac{d\mathrm{A}_1(y, t)}{dt} &= u \cos t, \end{aligned} \right.$$

ou bien

$$(18)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\mathrm{B}_1(y, u)}{dy} = +x, \\ \dfrac{d\mathrm{B}_1(y, u)}{du} = \sin t, \end{cases}$$

et, d'après les formules (13) ci-dessus, on aura pour un seul et même état de choses, non-seulement

$$\mathrm{A}_1(y, t) + \mathrm{B}_1(y, u) = u \sin t,$$

mais encore

$$\mathrm{A}_1(y, t) = \mathrm{A}(x, t) - xy,$$
$$\mathrm{B}_1(y, u) = \mathrm{B}(x, u) + xy.$$

» La manière la plus naturelle d'attaquer la question sera de regarder comme donnée l'une des équations (2), (3), par exemple l'équation (3),

$$\varphi(x, y) = t.$$

» En supposant ensuite que cette équation puisse être résolue par rapport à l'une des variables x, y, on aura, dans un cas,

$$y = \varphi_1(x, t),$$

et dans l'autre cas,

$$x = \varphi_2(y, t).$$

» Dans le premier cas, on trouvera, à l'aide de la première des formules (15),

$$\mathrm{A}(x, t) = \int^x \varphi_1(x, t)\, dx,$$

et la fonction A sera connue.

» La seconde des formules (15) deviendra

$$\frac{d}{dt}\int^x \varphi_1(x, t)\, dx = u \cos t,$$

et il ne s'agira plus que d'éliminer la variable t entre cette équation-là et la relation donnée

$$\varphi(x, y) = t,$$

pour quon trouve la relation cherchée

$$\psi(x,y) = u.$$

» Dans le deuxième cas, on trouvera, à l'aide de la première des formules (17),

$$A_1(y,t) = -\int^y \varphi_2(y,t)\,dy,$$

et la fonction A_1 sera connue.

» La seconde des formules (17) deviendra

$$-\frac{d}{dt}\int^y \varphi_2(y,t)\,dy = u\cos t,$$

et il ne s'agira plus que d'éliminer la variable t entre cette équation-là et la relation donnée

$$\varphi(x,y) = t,$$

pour qu'on trouve la relation cherchée

$$\psi(x,y) = u.$$

» En regardant, au contraire, comme donnée la relation

$$\psi(x,y) = u,$$

il faudra qu'on tâche de la mettre sous l'une des formes équivalentes

$$y = \psi_1(x,u),$$
$$x = \psi_2(y,u).$$

Dans le premier cas, on trouvera, à l'aide des formules (16),

$$B(x,u) = -\int^x \psi_1(x,u)\,dx,$$
$$-\frac{d}{du}\int^x \psi_1(x,u)\,dx = \sin t,$$

et, en substituant dans cette dernière la valeur supposée donnée

$$u = \psi(x,y),$$

on aura la relation cherchée

$$\varphi(x,y) = t$$

sous la forme

$$\varphi_1(x, y) = \sin t.$$

» Dans le deuxième cas, on trouvera, à l'aide des formules (18),

$$B_1(y, u) = \int^y \psi_2(y, u)\, dy,$$

$$\frac{d}{du}\int^y \psi_2(y, u)\, dy = \sin t,$$

et, en substituant dans cette dernière la valeur supposée donnée

$$u = \psi(x, y),$$

on aura aussi la relation cherchée

$$\varphi(x, y) = t$$

sous la forme

$$\varphi_1(x, y) = \sin t.$$

» Tel est l'usage qu'on aura à faire généralement des quatre espèces de formules (15), (16), (17), (18).

III.

» S'il était question d'appliquer une pareille théorie non plus à une surface sphérique, mais à une surface elliptique ou à une autre surface quelconque, on aurait à déterminer préalablement la relation

$$dS = du\, dt\, r(t, u),$$

qui remplacerait l'équation (1) ci-dessus.

» Puis, en considérant qu'il s'agirait de satisfaire à l'une des relations

$$\frac{dy}{dt}\frac{dx}{du} - \frac{dy}{du}\frac{dx}{dt} = r(t, u),$$

$$\frac{du}{dx}\frac{dt}{dy} - \frac{dx}{dy}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{r(t, u)},$$

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{du}{dx}} = r(t, u),$$

. . . .

comme dans ma *Théorie générale des effets dynamiques de la Chaleur* à la page 509 du tome XVIII déjà cité, on déterminerait la quantité

$$\mathrm{R}(t, u) = \int\int r(t, u)\, dt\, du,$$

et l'on trouverait la solution du problème à l'aide d'un des quatre groupes des formules

$$(q) \quad \text{page } 506, \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{d\mathrm{A}(x, t)}{dx} = y, \\ & \frac{d\mathrm{A}(x, t)}{dt} = \frac{d\mathrm{R}(t, u)}{dt} = \int r(t, u)\, du, \end{aligned} \right.$$

$$(a) \quad \text{page } 507, \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{d\mathrm{B}(x, u)}{dx} = -y, \\ & \frac{d\mathrm{B}(x, u)}{du} = \frac{d\mathrm{R}(t, u)}{du} = \int r(t, u)\, dt, \end{aligned} \right.$$

$$(q_1) \quad \text{page } 507, \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{d\mathrm{A}_1(y, t)}{dy} = -x, \\ & \frac{d\mathrm{A}_1(y, t)}{dt} = \frac{d\mathrm{R}(t, u)}{dt} = \int r(t, u)\, du, \end{aligned} \right.$$

$$(a_1) \quad \text{page } 507, \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{d\mathrm{B}_1(y, u)}{dy} = +x, \\ & \frac{d\mathrm{B}_1(y, u)}{du} = \frac{d\mathrm{R}(t, u)}{du} = \int r(t, u)\, dt, \end{aligned} \right.$$

dans lesquelles les fonctions A, B, A_1, B_1 joueraient précisément les mêmes rôles que dans les formules (15), (16), (17), (18) ci-dessus.

» Le but purement algébrique de la question serait de rendre une différentielle exacte soit l'une des deux formules complémentaires

$$(19) \quad \text{page } 404, \quad \left\{ \begin{aligned} & d\mathrm{B} = \frac{d\mathrm{R}(t, u)}{du}\, du - y\, dx, \\ & d\mathrm{A} = \frac{d\mathrm{R}(t, u)}{dt}\, dt + y\, dx, \end{aligned} \right.$$

soit l'une des formules supplémentaires de celles-là

$$(19\ bis) \quad \text{page } 405, \quad \left\{ \begin{aligned} & d\mathrm{B}_1 = \frac{d\mathrm{R}(t, u)}{du}\, du + x\, dy, \\ & d\mathrm{A}_1 = \frac{d\mathrm{R}(t, u)}{dt}\, dt - x\, dy, \end{aligned} \right.$$

et ce but-là serait atteint par l'emploi de l'un quelconque des quatre groupes des formules qui précèdent.

IV.

» Pour faire des applications simples de cette théorie générale, je me reporte au cas d'une sphère et je suppose que l'on veuille faire en sorte que tous les parallèles de la sphère soient représentés par des droites parallèles à l'axe des x sur un plan.

» La question ne dépendra alors que des formules (15), (16), (17), (18), et même des formules (15) seulement, car en désignant par $k(t)$ une fonction arbitraire de la variable t, il faudra que l'on ait

$$(\text{A}) \qquad y = k(t),$$

et la première des formules (15) sera directement intégrable par rapport à x, ce qui fera trouver

$$(\text{B}) \qquad \text{A}(x, t) = xk(t) + k_1(t),$$

la lettre k_1 servant à désigner une autre fonction arbitraire de t.

» En différentiant ensuite la fonction A par rapport à t, on aura

$$\frac{d\text{A}(x, t)}{dt} = xk'(t) + k'_1(t),$$

et en substituant cette expression de la dérivée partielle de la fonction A dans la seconde des formules (15), on trouvera

$$(\text{C}) \qquad x = u\frac{\cos t}{k'(t)} - \frac{k'_1(t)}{k'(t)}.$$

» Cette expression de x et la relation donnée

$$y = k(t)$$

formeront la solution du problème.

» Le plus simple sera de faire

$$k_1(t) = 0,$$

et alors on aura

$$(\text{D}) \qquad \begin{cases} x = u\dfrac{\cos t}{k'(t)}, \\ y = k(t). \end{cases}$$

» En faisant, en outre,

$$k(t) = \sin t,$$

on trouvera

$$x = u,$$
$$y = \sin t.$$

» Cela pourra s'interpréter en disant que tous les points de la sphère devront d'abord être transportés dans leurs plans méridiens parallèlement à l'équateur sur une surface cylindrique circonscrite à la sphère dont les génératrices seront perpendiculaires au plan de l'équateur, et qu'ensuite la surface cylindrique devra être rabattue sur un plan.

» Toutes les lignes méridiennes de la sphère deviendront des droites perpendiculaires à la droite équatoriale comme dans le mode de projection de Mercator, mais les ordonnées y seront les sinus au lieu des tangentes de la latitude.

» La demi-sphère détachée par un plan méridien se trouvera représentée par un rectangle dont la hauteur d'un pôle à l'autre sera 2 et dont la longueur dans le sens de l'équateur sera le nombre $\pi = 3,1416$.

» En faisant

$$k(t) = t,$$

on aura

$$x = u\cos t,$$
$$y = t.$$

» C'est le système connu de Flamsteed.

» En désignant, dans ce cas-là, par t' le complément de la latitude, on aura les formules équivalentes

$$x = u\sin t',$$
$$y = \frac{\pi}{2} - t',$$

et quand on transportera encore l'axe des x parallèlement à lui-même à une distance $\frac{\pi}{2}$, on aura

$$x = u\sin t',$$
$$y' = \frac{\pi}{2} - y = t'.$$

» Toutes les lignes méridiennes de la sphère deviendront des sinusoïdes menées par deux points fixes qui représenteront les deux pôles de la sphère à une distance π l'un de l'autre sur l'axe des y.

» La hauteur où la flèche de chacune des sinusoïdes sur l'axe des x sera égale à la longitude u de la ligne méridienne que représentera cette sinusoïde [et, par conséquent, les deux sinusoïdes qui représenteront les deux moitiés d'une circonférence méridienne de la sphère intercepteront sur l'axe des x une distance π égale à celle qu'il y aura d'un pôle à l'autre sur l'axe des y].

» Donc, quand une seule des courbes sinusoïdales aura été tracée, on pourra obtenir chacune des autres en faisant augmenter ou diminuer toutes les abscisses x de la courbe déjà tracée dans un rapport constant égal à celui de la longitude de la courbe cherchée à la longitude de la courbe donnée.

» Ce caractère appartient à tous les autres systèmes, car, quelle que puisse être la nature de la fonction $k(t)$, on aura, d'après les formules (D) pour deux longitudes différentes u, u' à une même distance y de la droite équatoriale,

$$(\mathrm{E}) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= u\,\frac{\cos t}{k'(t)}, \\ x' &= u'\,\frac{\cos t}{k'(t)}, \end{aligned} \right\} \quad \text{et, par suite,} \quad \frac{x'}{x} = \frac{u'}{u},$$

comme pour les sinusoïdes dont il vient d'être question.

» Ainsi, *quand une courbe méridienne quelconque sera connue, on pourra tracer autour de nouvelles courbes méridiennes que l'on voudra en partageant chacune des abscisses x de la courbe connue en un même nombre de parties proportionnelles.*

» De cette loi de proportionnalité, il résulte manifestement que l'axe des y ne pourra rencontrer quelque part l'une des courbes méridiennes sans les rencontrer toutes au même point.

» Je dis à présent que *la courbe méridienne qui devra se rapporter à une longitude donnée quelconque u sur la sphère pourra être tracée arbitrairement sur le plan* des x, y pourvu qu'elle ne se confonde ni avec l'axe des y ni avec une parallèle à l'axe des x.

» Je suppose, en effet, qu'une relation donnée quelconque

$$\mathrm{F}(x, y) = 0$$

doive être l'équation de la courbe méridienne pour une longitude donnée u sur la sphère, et pour aller de suite au plus simple, je suppose que cette équation puisse être mise sous la forme

$$x = f(y). \tag{F}$$

» En y substituant la première des formules (D), je trouve la condition

$$u\frac{\cos t}{k'(t)} = f(k(t)),$$

que je puis mettre sous la forme

$$\frac{u \cos t\, dt}{dy} = f(y), \tag{G}$$

et de laquelle ressortira toujours une relation parfaitement déterminée entre t, y, c'est-à-dire entre la latitude t de la sphère et la hauteur y par laquelle cette latitude devra être représentée sur le plan des x, y.

» Les seuls cas exceptionnels sont ceux où l'équation donnée

$$F(x, y) = 0$$

serait de l'une des formes particulières

$$x = 0, \quad y = \text{constante}.$$

» La lettre u servant à désigner une constante dans l'équation (G), cette équation sera directement intégrable, et l'on trouvera

$$u \sin t = \int_0^y f(y)\, dy.$$

» Mais l'intégrale du second membre ne sera pas autre chose que

$$\int_0^y x\, dy,$$

et représentera l'aire S de la courbe donnée depuis $y = 0$ jusqu'à y.

» Donc, en supposant que l'aire S soit connue en fonction de y, fût-ce même par des procédés graphiques de quadratures seulement, on aura la relation très-simple

$$u \sin t = S = f_1(y), \tag{H}$$

au moyen de laquelle on pourra déterminer les latitudes t qui correspondront à toutes les hauteurs y le long de la courbe donnée.

» Il est d'ailleurs évident que du moment où l'on tracera une série de courbes u, u', etc., de manière qu'à toute commune hauteur y on ait, d'après la formule (E),

$$\frac{x'}{x} = \frac{u'}{u},$$

on aura aussi

$$\text{(I)} \qquad \frac{S'}{S} = \frac{u'}{u},$$

et que, par suite, la formule (H) fera trouver une même valeur pour t, n'importe à laquelle de ces courbes on voudra l'appliquer.

» La formule (H) n'est enfin que l'expression directement évidente de la condition initiale du problème; car le terme $u \sin t$ du premier membre est la mesure de l'étendue sphérique comprise entre les deux circonférences méridiennes o, u et entre les deux parallèles o, t, tandis que l'aire S du second membre est précisément celle par laquelle on s'était proposé de représenter une telle étendue sphérique sur le plan des x, y.

» De plus, on voit que les formules (E), (G), (I) continueront de subsister alors même que la tangente à la courbe donnée

$$y = f(x)$$

changerait brusquement de direction d'un point à un autre, pourvu que l'obliquité de cette tangente avec l'axe des y ne dépassât jamais un angle droit dans le sens positif comme dans le sens négatif.

» D'après l'équation (H), on ne parviendra à représenter la surface entière d'une demi-sphère depuis l'équateur jusqu'au pôle sur le plan des x, y qu'autant que l'aire S le long de la courbe donnée

$$x = f(y)$$

pourra augmenter jusqu'à la limite u qu'on obtiendra en faisant $t = \frac{1}{2}\pi$.

» Puis, quand cette condition sera remplie à une certaine hauteur y_1, il arrivera que pour la longitude donnée u le pôle de la sphère se trouvera représenté par l'extrémité de l'abscisse correspondante x_1 de la courbe.

» Il faudrait que la dernière abscisse x_1 pour une aire S_1 égale à u fût nulle pour que le pôle de la sphère pût être représenté par un point sur l'axe des y et pour que ce point-là devînt le commun point d'intersection de toutes les autres courbes méridiennes.

» Si, au lieu de me donner une courbe méridienne afin de me faire trouver la loi d'espacement des droites parallèles à l'axe des x pour les différentes valeurs de t, on me donnait, au contraire, la loi de cet espacement par une relation de la forme

$$t = \chi(y), \tag{K}$$

j'en déduirais

$$\frac{dt}{dy} = \chi'(y),$$

et en différentiant la formule (H), ou bien en remontant à la formule (G) qui est précisément cette différentielle, j'aurais à l'instant

$$f(y) = u\chi'(y)\cos t,$$

c'est-à-dire

$$x = \chi(y)\cos(\chi(y)) \tag{L}$$

pour l'équation générale de toutes les courbes méridiennes du système.

» Le tout ne dépendra que de la seule équation différentielle

$$u \cos t\, dt = x\, dy,$$

qui elle-même aurait pu être regardée comme une relation directement évidente dès le début de la question qu'il s'agissait de résoudre.

» Tel est le plus haut degré de généralité et de clarté en même temps qu'il soit possible de donner à cette théorie, alors que les parallèles d'une sphère devront être représentés par des lignes droites parallèles à l'axe des x sur un plan.

V.

» Une courbe méridienne quelconque pouvant être tracée arbitrairement sur le plan des x, y, et toutes les autres pouvant ensuite être déduites de celle-là au moyen d'une simple loi de proportionnalité entre les abscisses correspondantes x, x' à toute commune hauteur y, rien n'empêchera de tracer *une circonférence de cercle d'un rayon quelconque r pour représenter la courbe méridienne qui devra correspondre à telle longitude déterminée u qu'on voudra*, et alors toutes les autres courbes méridiennes seront des ellipses qui auront deux de leurs sommets aux points

$$y = +r, \quad y = -r,$$

où la circonférence donnée coupera l'axe des y. L'axe horizontal de ces ellipses sera proportionnel à la longitude que chacune d'elles devra représenter.

» Du moment où il n'y aura qu'une seule des courbes méridiennes qui pourra être une circonférence de cercle, il conviendra naturellement de réserver le choix de la forme circulaire pour celle des courbes méridiennes dont la longitude sera

$$u = +\tfrac{1}{2}\pi \quad \text{ou} \quad u = -\tfrac{1}{2}\pi,$$

et alors, en cherchant à déterminer l'aire S de la formule (H) dans cette circonférence d'un rayon égal à r, on sera conduit à faire usage de la relation auxiliaire

$$\text{(M)} \qquad y = r\sin\theta,$$

au moyen de laquelle l'équation (H) se réduira à

$$\text{(N)} \qquad \pi\sin t = \frac{r^2}{2}(2\theta + \sin 2\theta).$$

» Telle sera la relation des latitudes t de la sphère avec les angles θ par lesquels ces latitudes devront être représentées à l'entour de la circonférence de rayon r sur le plan des x, y.

» La formule (N) ne donnera des valeurs réelles pour θ que jusqu'à la limite $t = \frac{1}{2}\pi$ qui correspondra aux deux pôles de la sphère, et à cette limite on trouvera la valeur extrême θ_1 des angles θ par la condition

$$\text{(O)} \qquad \pi = \frac{r^2}{2}(2\theta_1 + \sin 2\theta_1).$$

» Or la condition (O) fera trouver

$$\left.\begin{array}{l}\theta_1 < \frac{1}{2}\pi,\\ \theta_1 = \frac{1}{2}\pi,\\ \theta_1 > \frac{1}{2}\pi,\end{array}\right\} \text{ selon qu'on aura } \left\{\begin{array}{l} r > \sqrt{2},\\ r = \sqrt{2},\\ r < \sqrt{2},\end{array}\right.$$

c'est-à-dire selon que la surface πr^2 de la circonférence de rayon r surpassera, égalera ou n'atteindra pas la surface 2π de la demi-sphère de rayon 1 qu'il s'agira de représenter sur le plan des x, y.

» Dans le premier cas, toute l'étendue sphérique de rayon 1 se trouvera représentée dans la circonférence de rayon r de chaque côté de l'axe des x jusqu'à une distance $y_1 = r \sin \theta_1$ de cet axe et les deux segments restants de la circonférence ne serviront à rien.

» Dans le deuxième cas, toute l'étendue sphérique remplira entièrement la circonférence de rayon r et les deux pôles de la sphère se trouveront représentés par les communs points d'intersection de toutes les courbes elliptiques avec l'axe des y. On aura, en un mot, le système qui a été imaginé par M. Babinet et dont la construction dépendra de la résolution de l'équation

$$(P) \qquad \pi \sin t = 2\theta + \sin 2\theta.$$

» Dans le troisième cas, la circonférence du rayon r ne pourra contenir toute l'étendue sphérique de rayon 1 qu'il s'agira de représenter sur un plan, mais elle en contiendra une partie, toute celle qui s'étendra de chaque côté de l'équateur jusqu'à une certaine latitude t qui dépendra de la condition

$$(Q) \qquad \sin t = \frac{r^2}{2},$$

à laquelle on sera conduit en faisant $\theta = \frac{1}{2}\pi$ dans l'équation (N).

» Les deux calottes restantes de l'étendue sphérique de rayon 1 pourront néanmoins être représentées aussi dans la circonférence de rayon r, mais d'une manière complétement renversée dans les deux segments de la circonférence qui dépendront de la valeur $\theta_1 > \frac{1}{2}\pi$ de la condition (O) et dont chacun aura déjà servi à représenter une partie de l'étendue sphérique située de chaque côté de l'équateur de la sphère depuis $t = 0$ jusqu'à la valeur de t de la condition (Q).