Note sur le Traité des nombres carrés, *de* Léonard de Pise, *retrouvé et publié par M. le prince* Balthasar Boncompagni;

Par M. WOEPCKE.

Dans une Note précédente, relative au *Flos* de Léonard de Pise, nous avons essayé d'expliquer brièvement quelle est l'importance des ouvrages de cet auteur pour l'histoire des sciences. Nous y avons pû citer une discussion, contenue dans le *Flos*, comme une preuve du haut intérêt présenté par la publication de M. le prince Boncompagni, qui nous offre le texte original de deux ouvrages de Fibonacci, entièrement inconnus auparavant, ainsi que du *Traité des nombres carrés*, qu'on avait tant regretté de devoir considérer comme perdu.

Plus on examine les ouvrages du géomètre de Pise, plus on reconnaît que, tout en étant le disciple des Arabes, dont il résume jusqu'à un certain point les travaux, il sait apporter une originalité remarquable dans la manière de traiter les questions qu'il emprunte à leur science.

C'est ainsi qu'il a été possible de constater que les énoncés de toute une série de problèmes contenus dans son *Traité de l'Abacus* se retrouvent presque textuellement dans un ouvrage d'Alkarkhî, algébriste arabe vivant au commencement du XI[e] siècle, mais que les solutions de Léonard de Pise diffèrent, pour la plupart, plus ou moins essentiellement de celles de l'auteur arabe [*].

Le *Traité des nombres carrés* nous montre Fibonacci encore plus indépendant de ses maîtres. On ne rencontre dans ce Traité qu'un seul exemple d'une méthode empruntée aux Arabes. C'est lorsque, pour

[*] Voir *Extrait du Fakhrî*, par F. Woepcke. Paris, 1853. Pages 24 à 29.

faire simultanément

$$x^2 + mx = z^2, \quad x^2 - mx = t^2,$$

il résout d'abord l'égalité double

$$x_1^2 + y_1 = z_1^2, \quad x_1^2 - y_1 = t_1^2,$$

et satisfait ensuite aux équations proposées en posant

$$x = \frac{mx_1}{y_1} x_1, \quad z = \frac{mx_1}{y_1} z_1, \quad t = \frac{mx_1}{y_1} t_1.$$

Ce procédé se trouve, à une légère modification près, dans le Traité d'Alkarkhî, qui paraît en être l'inventeur [*].

Le moyen principal et presque unique employé par Fibonacci pour résoudre les problèmes indéterminés du second degré dont il s'occupe [**], est tout à fait original, et ne se trouve ni chez Diophante, ni chez les Indiens, ni chez les Arabes. C'est une étude très-approfondie des suites formées par la succession des carrés des nombres naturels et des nombres impairs, ainsi que des différences de ces suites.

De là résulte immédiatement une différence essentielle entre l'analyse indéterminée de Diophante et celle de Fibonacci : c'est que le premier ne se préoccupe que d'obtenir des solutions rationnelles, tandis que le second résout la plupart de ses problèmes *en nombres entiers*.

On peut ajouter que, si Diophante mérite notre admiration surtout par l'habileté extrême avec laquelle il sait éluder les difficultés que présentent les problèmes en apparence les plus ardus, ou par les artifices ingénieux qu'il invente pour arriver à leur solution, Fibonacci,

---

[*] Voir *Extrait du Fakhrî*, page 13, n° 4; page 24, ligne 6; page 112, ligne 2.

[**] Voici le tableau de ces problèmes :

1°. $x^2+y^2=z^2$;

2°. $x^2+y^2=c^2$;

3°. $x^2+y^2=a^2+b^2$;

4°. $\begin{cases} x^2+y=z^2, \\ x^2-y=t^2; \end{cases}$

5°. $\begin{cases} x^2+5=z^2, \\ x^2-5=t^2; \end{cases}$

6°. $\begin{cases} x^2+mx=z^2, \\ x^2-mx=t^2; \end{cases}$

7°. $\dfrac{x^2-y^2}{y^2-z^2}=\dfrac{b}{a}$;

8°. $\begin{cases} x^2+y^2=u^2, \\ x^2+y^2+z^2=v^2, \\ x^2+y^2+z^2+t^2=w^2, \\ \text{etc.}; \end{cases}$

9°. $\begin{cases} x+y+z+x^2=u^2, \\ x+y+z+x^2+y^2=v^2, \\ x+y+z+x^2+y^2+z^2=w^2. \end{cases}$

au contraire, aime à aborder ces difficultés de front, et à résoudre la question par un examen direct de la nature du problème, méthode souvent bien moins élégante, mais exigeant peut-être une plus grande tension de l'esprit.

Ce qui fait plus d'honneur encore à Fibonacci, c'est de s'être rencontré avec Fermat, en énonçant qu'un carré ne peut pas être *nombre congruent*, c'est-à-dire qu'on ne peut pas faire simultanément

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad \text{et} \quad x^2 - y^2 = t^2.$$

Cela revient à dire que la différence de deux quatrièmes puissances ne peut pas être un carré, ce qui est le célèbre théorème énoncé et démontré par Fermat [*]. Malheureusement la démonstration de Fibonacci est incomplète. Car, ayant exposé que le *nombre congruent*, c'est-à-dire le nombre u qui fait simultanément

$$x^2 + u = z^2 \quad \text{et} \quad x^2 - u = t^2,$$

est de la forme

$$4.\alpha.\beta.(\alpha+\beta)(\alpha-\beta),$$

il se borne à démontrer qu'on ne peut pas avoir

$$\alpha : \beta = (\alpha+\beta) : (\alpha-\beta),$$

tandis qu'il reste à prouver qu'on ne peut pas avoir non plus

$$\alpha : (\alpha+\beta) = (\alpha-\beta) : \beta,$$

et surtout que les quatre facteurs α, β, $(\alpha+\beta)$, $(\alpha-\beta)$ ne peuvent pas tous à la fois être séparément des carrés, ce qui nous fait retomber dans le théorème qu'il s'agit de démontrer. Mais avoir énoncé une si belle proposition, est assez déjà pour la gloire de Léonard de Pise, et l'on ne doit pas lui faire un reproche de ce qu'il n'a pas

[*] *Voir* l'observation ajoutée au 20e des problèmes placés par Bachet à la suite de la 26e proposition du VIe livre de Diophante (DIOPHANTI ALEXANDRINI *Arithmeticorum Libri sex, et de numeris multangulis Liber unus; cum commentariis* C. G. Bacheti, V. C., *et observationibus* D. P. de Fermat, senatoris Tolosani. Tolosæ, 1670; page 338) : « Area trianguli rectanguli in numeris non potest esse quadratus;... si area trianguli » esset quadratus, darentur duo quadrato-quadrati quorum differentia esset quadra- » tus, etc. »

réussi à trouver une démonstration que Fermat lui-même considérait comme une de ses découvertes les plus importantes et les plus difficiles [*].

Citons en revanche une autre proposition intéressante, énoncée et parfaitement démontrée par Léonard de Pise, savoir que l'expression $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$ peut être décomposée en deux carrés de deux manières différentes [**]. Il se sert de ce théorème pour résoudre l'équation

$$x^2+y^2=a^2+b^2\ [***],$$

---

[*] *Loc. laud.* : « Hujus theorematis a nobis inventi demonstrationem quam et ipsi » tandem non sine operosâ et laboriosâ meditatione deteximus, subjungemus. Hoc » nempe demonstrandi genus miros in arithmeticis suppeditabit progressus. »

[**] *Tre scritti inediti*, page 66 : « Si quatuor numeri non proportionales proponantur, et sit primus minor secundo, et tertius minor quarto, et aggregatus ex quadratis primi et secundi multiplicetur per aggregatum quadratorum tertii et quarti, » et neuter ex aggregatis quadratis quadratus fuerit, egredietur numerus qui duobus » modis æquabitur duobus quadratis numeris; et si unus tantum ex aggregatis fuerit » quadratus, tunc æquabitur egressus numerus duobus quadratis tripliciter, et si ambo » compositi quadrati fuerint, tunc egressus æquabitur duobus quadratis quadrupliciter, et hæc intelligantur sine fractione. »

Ce théorème a été évidemment connu de Diophante qui, dans le cours de la solution du 22ᵉ problème du IIIᵉ livre, s'exprime de la manière suivante : « Mais, en » outre, le nombre 65 se décompose naturellement en deux carrés de deux manières, » savoir en 16 et 49, et aussi en 64 et l'unité; et cela a lieu parce que le nombre 65 » est le produit des nombres 13 et 5, dont chacun se décompose en deux carrés. »

Bachet a énoncé et démontré le théorème en question dans la 7ᵉ proposition de son IIIᵉ livre des *Porismes*, et Fermat l'a pris pour point de départ des plus admirables développements dans son observation ajoutée au 22ᵉ problème du IIIᵉ livre de Diophante. (*Voir* l'édition de Toulouse ci-dessus citée, page 127.)

Enfin M. Cauchy a jugé ce théorème assez important pour le donner dans son *Cours d'Analyse*, page 181, comme un exemple de la grande utilité des expressions imaginaires, « non-seulement dans l'algèbre ordinaire, mais encore dans la théorie des » nombres. »

[***] Savoir, en trouvant trois nombres α, β, γ, tels que

$$\alpha^2+\beta^2=\gamma^2,$$

il a

$$(a^2+b^2)(\alpha^2+\beta^2)=(a\alpha+b\beta)^2+(a\beta-b\alpha)^2,$$

donc

$$\left(\frac{a\alpha+b\beta}{\gamma}\right)^2+\left(\frac{a\beta-b\alpha}{\gamma}\right)^2=a^2+b^2.$$

et il tire parti de ses cas particuliers pour ajouter deux solutions de l'équation

$$x^2 + y^2 = z^2 \text{ [*]}$$

à plusieurs autres fondées sur la considération de la suite des nombres impairs.

Cossali a entrepris une restitution du *Traité des nombres carrés* [**] au moyen de l'ouvrage de Luca Paciolo, dont on savait qu'une partie des problèmes qu'il contient avaient été empruntés au Traité de Léonard de Pise. Le travail de Cossali, très-consciencieux et enrichi de discussions intéressantes, me dispense de parler ici des problèmes et des théorèmes qui ont été reproduits par Luca Paciolo.

Mentionnons, cependant, que le texte original, publié maintenant par M. le prince Boncompagni, nous présente les solutions des problèmes accompagnées de démonstrations qui ajoutent considérablement à la valeur de l'ouvrage du géomètre de Pise. Disons aussi qu'on trouve énoncées, dans le cours ou à la suite de ces démonstrations, une foule de propositions qui, aujourd'hui, nous paraissent évidentes d'elles-mêmes, mais dont la découverte pouvait avoir quelque mérite dans un temps où ces propositions et leurs démonstrations étaient nécessairement revêtues d'une forme géométrique [***].

Mais surtout il faut citer deux problèmes, non contenus dans l'analyse de Cossali, qui se trouvent dans le texte publié par M. le prince

---

[*] Prenant

$$a : b = c : d,$$

il a

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 = (bd - ac)^2 + (ad + bc)^2;$$

et prenant

$$a = c \quad \text{et} \quad b = d,$$

il a

$$(a^2 + b^2)^2 = (b^2 - a^2)^2 + (2ab)^2.$$

[**] *Origine dell' Algebra*, vol. I, pages 115 à 172.

[***] Pour mieux nous expliquer, citons un exemple. Si nous écrivons les énoncés des propositions du IIe livre d'Euclide en formules algébriques, ces formules sont évidentes d'elles-mêmes; cependant leur démonstration géométrique a coûté à l'auteur des *Éléments* tout un livre, et certainement aussi quelques efforts d'esprit.

Boncompagni, et qui me semblent devoir être comptés parmi les plus intéressants du Traité entier.

Problème I. Satisfaire en nombres entiers à l'équation

$$(x^2 - y^2) : (y^2 - z^2) = b : a.$$

Léonard de Pise démontre d'abord que, si le rapport donné est de la forme $\frac{\alpha + 1}{\alpha}$, ou $\frac{2\alpha + 1}{2\alpha - 1}$, ou $\frac{\beta^2}{\alpha^2}$, on satisfait à la question proposée en posant, dans le premier cas,

$$x = 2\alpha + 3, \quad y = 2\alpha + 1, \quad z = 2\alpha - 1;$$

dans le deuxième,

$$x = \alpha + 1, \quad y = \alpha, \quad z = \alpha - 1;$$

dans le troisième,

$$x = \beta^2, \quad y = \alpha\beta, \quad z = \alpha^2.$$

Si aucun de ces cas n'a lieu, Fibonacci cherche s'il peut obtenir

$$(a + 1) + (a + 2) + (a + 3) + \ldots + (a + n) = b;$$

en ce cas, il aura

$$\{[2(a + n) + 1]^2 - (2a + 1)^2\} : [(2a + 1)^2 - (2a - 1)^2] = b : a.$$

Sinon, il essaye s'il ne peut pas faire

$$(pa + 1) + (pa + 2) + \ldots + (pa + n) = pb \, [^*].$$

Lorsque ce moyen ne réussit pas non plus, Fibonacci trouve deux sommes

$$(p + 1) + (p + 2) + \ldots + (p + m)$$

et

$$(p + m + 1) + (p + m + 2) + \ldots + (p + m + n),$$

telles que le rapport de la seconde à la première soit égal au rapport

[*] Cela ne peut avoir lieu que lorsque b est de la forme

$$\mu a + \text{un quelconque des diviseurs du nombre } \tfrac{1}{2}\mu(\mu + 1).$$

donné [*], et il aura

$$\{[2(p+m+n)+1]^2 - [2(p+m)+1]^2\}$$
$$:\{[2(p+m)+1]^2 - (2p+1)^2\} = b : a.$$

La solution de Fibonacci est fondée sur l'observation que les premières différences de la suite des carrés impairs sont les octuples des nombres naturels suivant l'ordre. Elle est certainement ingénieuse. Toutefois, on peut se demander qu'est-ce qui a déterminé Léonard de Pise à la préférer à une autre méthode plus simple et qui semble se présenter bien plus naturellement à l'esprit. C'est de poser

$$x = y + m, \quad z = y - n,$$

ce qui donne

$$y = \frac{am^2 + bn^2}{2(bn - am)};$$

donc, pour avoir une solution en nombres entiers,

$$x = 2bmn - (am^2 - bn^2),$$
$$y = am^2 + bn^2,$$
$$z = 2amn + (am^2 - bn^2).$$

Aussi Diophante, dans le 20e problème du IIe livre, résout-il l'équation

$$x^2 - y^2 = 3(y^2 - z^2)$$

en posant

$$y = z + 1, \quad x = z + 3;$$

et Alkarkhî reproduit ce procédé dans le 41e problème de la IVe section de son recueil, en se contentant, comme Diophante, d'une solution fractionnaire. Or, Fibonacci paraît avoir connu l'ouvrage d'Alkarkhî, et il énonce expressément que, si x_1, y_1, z_1 satisfont à l'équation pro-

[*] Cela est toujours possible, parce qu'on peut toujours satisfaire à l'équation

$$\frac{(2p+m+1)m}{(2p+2m+n+1)n} = \frac{a}{b};$$

entre autres, en prenant

$$m = a+1, \quad n = b-1 \quad p = \left(\frac{b}{2} - 1\right)a - 1,$$

et en remplaçant, lorsque b est impair, a et b par $2a$ et $2b$.

posée, mx_1, my_1, mz_1 satisferont également, de sorte qu'il possède le moyen de se procurer une solution entière, dès qu'il a une solution fractionnaire. Il y a donc lieu de croire que Fibonacci a évité à dessein ce procédé, et qu'il s'est efforcé de donner dans son ouvrage, adressé à Frédéric II, des méthodes réellement originales, parce que très-probablement les savants attachés à la cour de l'empereur n'ignoraient pas non plus complétement les travaux et les découvertes des géomètres arabes.

Problème II. Satisfaire simultanément aux équations

$$x + y + z + x^2 = u^2,$$
$$x + y + z + x^2 + y^2 = v^2,$$
$$x + y + z + x^2 + y^2 + z^2 = w^2 \text{ [*]}.$$

Fibonacci résout d'abord

$$u_1^2 + y_1^2 = v_1^2, \quad v_1^2 + z_1^2 = w_1^2;$$

cela fait, il aura aussi

$$(\lambda u_1)^2 + (\lambda y_1)^2 = (\lambda v_1)^2, \quad (\lambda u_1)^2 + (\lambda y_1)^2 + (\lambda z_1)^2 = (\lambda w_1)^2;$$

il n'a donc plus qu'à résoudre

$$(1) \qquad (\lambda u_1)^2 - (\lambda y_1 + \lambda z_1) = x(x+1).$$

Pour cela, il se sert de l'identité

$$(2) \quad (\lambda u_1)^2 - [(2n+1)\lambda u_1 - n(n+1)] = (\lambda u_1 - \overline{n+1})(\lambda u_1 - n),$$

et obtient, par la combinaison de (1) et (2),

$$\lambda = \frac{n(n+1)}{(2n+1)u_1 - (y_1 + z_1)}, \quad x = \lambda u_1 - (n+1).$$

On ne trouve de cette manière, en général, que des solutions fractionnaires. Mais, après avoir exposé ce mode de solution, Fibonacci vérifie aussi les équations proposées par la substitution des valeurs entières

$$x = 35, \quad y = 144, \quad z = 360,$$

---

[*] « Questio mihi proposita a Magistro Theodòro, domini Imperatoris phylo- » sopho. »

sans expliquer cependant s'il a trouvé ces valeurs autrement que par un simple tâtonnement [*]. Enfin, il étend le problème à un plus grand nombre d'équations de même nature, renfermant un plus grand nombre d'inconnues ; mais c'est là que le texte se trouve brusquement interrompu, attendu que la fin du Traité manque dans le manuscrit découvert par M. le prince Boncompagni.

---

[*] Désignant par $\delta_{\overline{n.n+1}}$ un quelconque des diviseurs du nombre $n(n+1)$, il s'agit de satisfaire simultanément, par des nombres entiers, aux équations

$$v_1^2 - y_1^2 = u_1^2 \quad \text{et} \quad w_1^2 - v_1^2 = (\overline{2n+1} \cdot u_1 - \delta_{\overline{n.n+1}} - y_1)^2;$$

prenons

$$v_1 = \frac{u_1^2+1}{2}, \quad y_1 = \frac{u_1^2-1}{2}, \quad n = u_1 - 1, \quad \delta = u_1,$$

il suit

$$5u_1^4 - 12u_1^3 + 12u_1^2 - 4u_1 + 1 = 2w_1^2,$$

équation à laquelle on devra satisfaire par une valeur entière et impaire de u_1. C'est ce que l'on peut, en effet, en posant

$$u_1 = 7, \quad \text{d'où} \quad w_1 = 65.$$

Puis, on aura

$$n = 6, \quad y_1 = 24, \quad z_1 = 60, \quad \lambda = 6,$$

d'où résultent les valeurs entières trouvées par Fibonacci.