JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

WOEPCKE

Sur un essai de déterminer la nature de la racine d'une équation du troisième degré, contenu dans un ouvrage de Léonard de Pise découvert par M. le prince Balthasar Boncompagni

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 19 (1854), p. 401-406.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1854_1_19__401_0>

Sur un essai de déterminer la nature de la racine d'une équation du troisième degré, contenu dans un ouvrage de Léonard de Pise découvert par M. le prince Balthasar Boncompagni;

PAR M. **WOEPCKE**.

Lorsque la science grecque, après avoir brillé d'un éclat extraordinaire, allait dépérir entre les mains des compilateurs byzantins, elle fut conservée, étudiée, continuée par les Arabes. Lorsque la science arabe à son tour fut menacée de décadence par les luttes immenses qui bouleversaient l'Orient, la Providence lui ouvrit un asile chez les Italiens. C'est là que commence le développement des mathématiques modernes, c'est de là qu'il part pour dépasser de bien loin tout ce qu'ont produit les siècles précédents.

On aime à rattacher chaque grande époque de transition au nom et aux œuvres de l'homme qui en offre l'expression la plus haute : pour le passage de la science, des Arabes aux Italiens, cet homme éminent est Léonard de Pise, dit Fibonacci.

On conçoit dès lors l'importance que les ouvrages de cet auteur doivent avoir pour l'histoire des sciences mathématiques. Et cependant ces ouvrages ne nous étaient jusqu'à présent que très-imparfaitement connus. Un chapitre de son *Traité de l'Abacus ;* des emprunts faits à son *Traité des nombres carrés* par plusieurs géomètres de la Renaissance; quelques citations de sa *Pratique de la Géométrie :* voilà tout ce que nous possédions. Encore, tandis que du premier et du dernier des ouvrages cités, il existe au moins des manuscrits dans les grandes bibliothèques de l'Europe, l'original du *Traité des nombres carrés,* sous certains rapports le plus intéressant des trois ouvrages, paraissait être entièrement perdu. Le seul manuscrit de ce

Traité, dont l'existence eût été sûrement constatée, n'avait pu être retrouvé [*].

D'après cet exposé des faits, on appréciera le service qu'a rendu M. le prince Balthasar Boncompagni en découvrant et en publiant non-seulement le *Traité des nombres carrés*, mais, en outre, deux autres écrits de Léonard de Pise, inconnus auparavant [**].

Un de ces deux derniers écrits, intitulé *Flos*, contient la discussion dont on trouve ci-après l'analyse, et qui peut fournir une mesure du haut intérêt qu'offrent ces travaux de Fibonacci.

Jean de Palerme, philosophe de l'empereur Frédéric II de la maison de Souabe, ayant proposé à Léonard de Pise l'équation du troisième degré

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20,$$

celui-ci démontre que la racine de cette équation n'est ni un nombre entier, ni une fraction, ni aucune des quantités composées de radicaux du second degré traitées dans le Xe livre des Éléments d'Euclide.

N'y a-t-il pas là quelque chose de très-remarquable? Si à une époque récente la démonstration qu'une équation algébrique d'un degré supérieur au quatrième ne peut pas être généralement satisfaite par une expression composée de radicaux, a exigé les plus grands efforts des géomètres, ne devra-t-on pas accorder un certain intérêt à la démonstration, entreprise par un algébriste du XIIIe siècle, qu'une équation proposée du troisième degré ne peut être résolue par aucune des combinaisons de radicaux du deuxième degré connues à cette époque?

Avant de procéder à l'analyse de la démonstration de Fibonacci, il faut que je fasse observer deux choses. Premièrement, le géomètre

---

[*] COSSALI, *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa, dell' Algebra*, tome Ier, page 165.

[**] *Tre scritti inediti di Leonardo Pisano, pubblicati da Baldassarre Boncompagni*; Firenze, 1854. Cette publication forme la première partie d'un ouvrage étendu que M. le prince Boncompagni fera paraître prochainement sous le titre suivant : *Intorno ad alcune opere di Leonardo Pisano*.

de Pise suppose que l'inconnue est une quantité positive. Disciple des Arabes, il ignore, comme eux, l'existence des racines négatives; toutefois c'est chez lui que se trouvent les premières tentatives de considérer des solutions négatives, autre détail très-curieux que présentent les ouvrages publiés par M. Boncompagni, mais sur lequel je ne peux pas m'étendre ici. Secondement, les démonstrations de Fibonacci sont géométriques; forme sous laquelle les quantités irrationnelles sont traitées aussi dans le Xe livre d'Euclide. En reproduisant, par défaut d'espace, les raisonnements de Fibonacci sous la forme algébrique qui suit, nous gagnons en précision, mais non en clarté.

1°. x n'est pas un nombre entier.

En effet, de l'équation proposée, il suit

$$x = 2 - \frac{x^3 + 2x^2}{10} \quad \text{ou} \quad x < 2;$$

il n'y a donc que 1 qui puisse satisfaire; mais pour $x = 1$, il vient

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 13 < 20.$$

2°. x n'est pas un nombre fractionnaire.

Soit

$$x = \frac{\alpha}{\beta}\,[*].$$

Si $10\frac{\alpha}{\beta}$ est fractionnaire, $2\frac{\alpha^2}{\beta^2}$ le sera à plus forte raison, et l'on aura

$$2\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{m}{\beta^2} + \frac{n}{\beta}, \quad \text{où} \quad m < \beta;$$

de même,

$$\frac{\alpha^3}{\beta^3} = \frac{p}{\beta^3} + \frac{q}{\beta^2} + \frac{r}{\beta}, \quad \text{où} \quad p < \beta,\ q < \beta\,[**].$$

---

[*] On suppose naturellement la fraction $\frac{\alpha}{\beta}$ exprimée dans les plus petits nombres possibles.

[**] Le texte porte : *Et in numero quidem bz (x^3) occurrunt fractiones et fractiones fractionis, et fractiones fractionis fractionis.*

On ne peut être parfaitement sûr du véritable sens de ce passage qu'au moyen d'une étude préalable de l'arithmétique des Arabes. Qu'on ait à évaluer le cube $\left(\frac{7}{9}\right)^3$;

Or

$$\frac{p}{\beta^3} + \frac{q+m}{\beta^2} + \frac{r+n+10\alpha}{\beta}$$

ne pourra jamais être un nombre entier, donc pas égal à 20.

Si $10\frac{\alpha}{\beta}$ est entier, il s'ensuivra que

$$\frac{\alpha^3}{\beta^3} + 2\frac{\alpha^2}{\beta^2} = 20 - 10\frac{\alpha}{\beta}$$

est entier, ce dont on démontre l'impossibilité de la même manière [*].

3°. x n'est pas de la forme $\sqrt{n}$.

De l'équation proposée, il suit

$$\frac{2x^2}{10} = 2 - \left(x + \frac{x^3}{10}\right),$$

c'est-à-dire la quantité rationnelle $\frac{2.n}{10}$ égale à la quantité irrationnelle (*l'apotome*) $2 - \sqrt{n}\left(1 + \frac{n}{10}\right)$, ce qui est impossible.

Autrement. Puisque

$$20 = 2x^2 + 10x\left(1 + \frac{x^2}{10}\right),$$

il s'ensuivrait que le nombre entier 20 serait égal à la somme de la

---

l'arithméticien arabe n'écrira pas $\frac{343}{729}$; ce qu'il considère comme la forme normale de cette fraction c'est : quatre neuvièmes et deux neuvièmes d'un neuvième et un neuvième d'un neuvième d'un neuvième, et il écrit cette expression de la manière suivante $\frac{124}{999}$; de même, pour $\left(\frac{2}{9}\right)^3$, il écrira $\frac{800}{999}$. Cette reduction des fractions à leur forme normale constitue une partie essentielle de l'arithmétique arabe, appelée *la dénomination des fractions.*

[*] Autrement dit :

$$\frac{\alpha^3}{\beta^3} + 2\frac{\alpha^2}{\beta^2} + 10\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha^3 + (2\alpha^2 + 10\alpha\beta)\beta}{\beta^3},$$

mais $(2\alpha^2 + 10\alpha\beta)\beta$ divisible par β, et α^3 non divisible par β; donc $\alpha^3 + (2\alpha^2 + 10\alpha\beta)\beta$ non divible par β et à plus forte raison non divisible par β^3.

quantité rationnelle $2n$ et de la quantité irrationnelle $\sqrt{n}\cdot 10\left(1+\frac{n}{10}\right)$, ce qui est impossible.

4°. x n'est pas de la forme $\sqrt[4]{n}$.

Car de

$$x+\frac{x^3}{10}=2-\frac{2x^2}{10},$$

il s'ensuivrait que la quantité $\sqrt[4]{n}+\frac{\sqrt[4]{n}\sqrt{n}}{10}$, qui est *la première de deux médiales* (*voir* Euclide, X, 38) serait égale à *l'apotome* $2-\frac{2\sqrt{n}}{10}$, deux quantités irrationnelles dont Euclide a démontré l'hétérogénéité.

5°. x n'est pas de la forme $m+\sqrt{n}$.

Car, en substituant dans

$$x^3+2x^2+10x=20,$$

on obtiendrait la quantité irrationnelle (*celle de deux noms*)

$$(m^3+2m^2+3mn+10m+2n)+(3m^2+4m+n+10)\sqrt{n}$$

égale au nombre rationnel 20, ce qui est impossible.

6°. x n'est pas de la forme $\sqrt{m}+\sqrt{n}$.

Car en substituant dans

$$x^3+2x^2+10x=20,$$

on obtiendrait la quantité irrationnelle

$$(2m+2n)+(m+3n+10)\sqrt{m}+(n+3m+10)\sqrt{n}+4\sqrt{mn}$$

égale à 20, ce qui est impossible.

7°. x n'est pas de la forme $\sqrt{m+\sqrt{n}}$ [*].

Car de

$$x^3+2x^2+10x=20,$$

[*] Le cas où $\sqrt{m+\sqrt{n}}$ est de la forme $m'+\sqrt{n'}$, d'où l'on retomberait dans le cas 5°, est prévu par Fibonacci et exclu, observation que la théorie d'Euclide fournit d'ailleurs d'elle-même.

il s'ensuivrait

$$\begin{aligned}
&(x^2 + 10)x + 2x^2 \\
&= \sqrt{[(10+m)+\sqrt{n}]^2(m+\sqrt{n})} + 2m + 2\sqrt{n} \\
&= \sqrt{(p+q\sqrt{n})(m+\sqrt{n})} + 2m + 2\sqrt{n} \\
&= 2m + 2\sqrt{n} + \sqrt{r+s\sqrt{n}} = 20,
\end{aligned}$$

ce qui est impossible.

8°. x n'est pas de la forme $\sqrt{\sqrt{m}+\sqrt{n}}$.

Car de

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20,$$

il s'ensuivrait

$$\begin{aligned}
&(x^2 + 10)x + 2x^2 \\
&= \sqrt{(10+\sqrt{m}+\sqrt{n})^2(\sqrt{m}+\sqrt{n})} + 2\sqrt{m} + 2\sqrt{n} \\
&= \sqrt{p'+q'\sqrt{m}+r'\sqrt{n}+s'\sqrt{mn}} + 2\sqrt{m} + 2\sqrt{n} = 20,
\end{aligned}$$

ce qui est impossible.

Aucune des quantités examinées ne pouvant satisfaire à l'équation proposée, Fibonacci résout celle-ci par approximation [*], et trouve

$$x = 1.22'\,7''\,42'''\,30^{\text{IV}}\,4^{\text{V}}\,40^{\text{VI}}.$$

J'obtiens

$$\begin{aligned}
x &= 1{,}3688081078 21 \\
&= 1.22'\,7''\,42'''\,33^{\text{IV}}\,4^{\text{V}}\,38^{\text{VI}},5;
\end{aligned}$$

sans doute 30^{IV} au lieu de 33^{IV} n'est qu'une erreur du copiste (d'autant plus que j'ai rencontré précisément la même erreur en plusieurs autres passages du texte publié [**]); le degré d'exactitude de cette valeur approchée est donc très-remarquable, et porte à croire qu'une connaissance exacte des méthodes employées à cette époque dans des calculs de ce genre offrirait un véritable intérêt pour l'histoire de la science.

---

[*] *Studui solutionem ejus ad propinquitatem reducere.*

[**] *Voir*, par exemple, page 23, ligne 8 et ligne 25; page 24, ligne 12 : là l'erreur est évidente. Le copiste a toujours mis XXX au lieu de XXXIII.