

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

WOEPCKE

**Note sur une propriété d'un système de quatre coniques**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 1<sup>re</sup> série*, tome 19 (1854), p. 345-355.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1854\\_1\\_19\\_345\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1854_1_19_345_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

## NOTE

SUR

UNE PROPRIÉTÉ D'UN SYSTÈME DE QUATRE CONIQUES;

PAR M. WOEPCKE.

Dans un remarquable Mémoire sur les propriétés des courbes du quatrième ordre, inséré dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, séance du 16 août 1853, M. Chasles énonce le théorème suivant :

*Étant pris sur une conique S deux systèmes de quatre points  $a, b, c, d$  et  $a', b', c', d'$ , et étant menées par les quatre premiers points deux coniques quelconques A, A', et par les quatre autres deux coniques quelconques B, B'; les quatre points d'intersection des deux coniques A, B, et ceux des deux coniques A', B' sont huit points situés sur une même conique  $\Sigma$ .*

Ce théorème et son corrélatif ont fait partie du Cours de Géométrie supérieure professé à la Sorbonne, dans lequel cette propriété de trois coniques (S, A, A') donne lieu à des conséquences nombreuses qui sont l'expression d'importantes propriétés des courbes du second degré.

C'est en prenant pour point de départ ce même théorème, et en mettant en présence, dans un même plan, quatre coniques quelconques au lieu de trois, que je suis parvenu à quelques développements qui forment le sujet de la présente Note.

## THÉORÈME.

*Si l'on a trois coniques quelconques  $C_1, C_2, C_3$ , lesquelles sont rencontrées par une quatrième conique quelconque U en trois systèmes de*

quatre points, et si l'on fait passer par ces trois systèmes de quatre points trois coniques  $A_1, A_2, A_3$  respectivement; les huit points d'intersection de  $C_1$  avec  $C_2$  et de  $A_1$  avec  $A_2$  sont (en vertu du théorème ci-dessus) sur une conique  $\Sigma_3$ , les huit points d'intersection de  $C_1$  avec  $C_3$  et de  $A_1$  avec  $A_3$  sur une conique  $\Sigma_2$ , et les huit points d'intersection de  $C_2$  avec  $C_3$  et de  $A_2$  avec  $A_3$  sur une conique  $\Sigma_1$ . Je dis que les trois coniques  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$  passent par quatre mêmes points (et conséquemment sont rencontrées par une transversale quelconque en six points en involution).

En effet, les équations des quatre coniques proposées étant

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = 0, \quad U = 0,$$

les équations des coniques  $A$  seront respectivement

$$A_1 = U + \lambda_1 C_1 = 0,$$

$$A_2 = U + \lambda_2 C_2 = 0,$$

$$A_3 = U + \lambda_3 C_3 = 0.$$

Il est évident alors que les coniques

$$\Sigma_3 = \lambda_1 C_1 - \lambda_2 C_2 = 0,$$

$$\Sigma_2 = \lambda_1 C_1 - \lambda_3 C_3 = 0,$$

$$\Sigma_1 = \lambda_2 C_2 - \lambda_3 C_3 = 0,$$

passent respectivement par les intersections de  $C_1, C_2$  et  $A_1, A_2$ , de  $C_1, C_3$  et  $A_1, A_3$ , de  $C_2, C_3$  et  $A_2, A_3$ . Mais il est également évident que chacune des trois coniques  $\Sigma$  passe par les points d'intersection des deux autres. Donc....

C. Q. F. D.

#### AUTRE ÉNONCÉ.

Si l'on a trois coniques quelconques  $C_1, C_2, C_3$  qui sont rencontrées par une quatrième conique quelconque en trois systèmes de quatre points, et si l'on fait passer par ces trois systèmes de quatre points trois coniques  $A_1, A_2, A_3$  respectivement; les huit points d'intersection de  $C_1$  avec  $C_2$  et de  $A_1$  avec  $A_2$  sont sur une conique  $\Sigma_3$ , les huit points d'intersection de  $C_2$  avec  $C_3$  et de  $A_2$  avec  $A_3$  sur une conique  $\Sigma_1$ , et les

douze points d'intersection de  $C_1$  avec  $C_3$ , de  $A_1$  avec  $A_3$  et de  $\Sigma_1$  avec  $\Sigma_3$  sur une conique  $\Sigma_2$ .

Si l'on se donne un point  $p$  par lequel doivent passer les trois coniques  $A$ , les trois coniques  $\Sigma$  passent par ce même point. Dès qu'on se donne ce point, les trois coniques  $\Sigma$  sont déterminées, et les trois coniques  $A$  ont deux à deux trois intersections, outre  $p$ , sur une conique  $\Sigma$  respectivement.

COROLLAIRES.

1. Si deux des coniques  $C$ , soient  $C_1$  et  $C_2$ , sont des cercles, la conique  $\Sigma_3$  est également un cercle; donc les dix points d'intersection de  $C_1$  avec  $C_2$ , de  $A_1$  avec  $A_2$  et de  $\Sigma_1$  avec  $\Sigma_2$  sont situés sur un cercle.

Si les trois coniques  $C$  sont des cercles, les coniques  $\Sigma$  sont également trois cercles qui passent par deux mêmes points.

2. En prenant pour  $U$  et pour les trois coniques  $A$  des systèmes de deux droites, on obtient ceci :

Si l'on coupe trois coniques  $C_1, C_2, C_3$  par deux transversales, on aura sur  $C_1$  quatre points d'intersection que l'on pourra joindre deux à deux par deux droites  $l_1, l'_1$ , de même sur  $C_2$  quatre points d'intersection qui donnent lieu à deux droites  $l_2, l'_2$ , et sur  $C_3$  quatre points d'intersection qui donnent lieu à deux droites  $l_3, l'_3$ ; les points d'intersection de  $l_1, l'_1$  avec  $l_2, l'_2$  et de  $C_1$  avec  $C_2$  sont sur une conique  $\Sigma_3$ , les points d'intersection de  $l_1, l'_1$  avec  $l_3, l'_3$  et de  $C_1$  avec  $C_3$  sur une conique  $\Sigma_2$ , les points d'intersection de  $l_2, l'_2$  avec  $l_3, l'_3$  et de  $C_2$  avec  $C_3$  sur une conique  $\Sigma_1$ , et les trois coniques  $\Sigma$  passent par quatre mêmes points.

3. En prenant pour  $U$  deux droites coïncidentes, on obtient :

Si l'on a trois coniques  $C_1, C_2, C_3$  ayant avec trois autres coniques  $A_1, A_2, A_3$  respectivement un double contact sur une même droite; les points d'intersection de  $C_1$  avec  $C_2$  et de  $A_1$  avec  $A_2$  sont sur une conique  $\Sigma_3$ , les points d'intersection de  $C_1$  avec  $C_3$  et de  $A_1$  avec  $A_3$  sur une conique  $\Sigma_2$ , et les points d'intersection de  $C_2$  avec  $C_3$ , de  $A_2$  avec  $A_3$  et de  $\Sigma_2$  avec  $\Sigma_3$  sur une conique  $\Sigma_1$ .

Si l'on coupe trois coniques quelconques par une transversale, et si

l'on mène les tangentes aux points de contact; les trois angles circonscrits déterminent deux à deux trois quadrilatères tels, que par les sommets de chaque quadrilatère et les quatre points d'intersection des deux coniques tangentes à ses côtés opposés on peut mener une conique  $\Sigma$ , et que ces trois coniques  $\Sigma$  passent par quatre mêmes points.

4. Si l'on a trois cercles quelconques et une conique  $U$ , et si par le point de concours des trois axes radicaux des trois cercles on mène trois coniques passant respectivement par les points d'intersection de  $U$  avec chacun des trois cercles, ces trois coniques sont homothétiques.

Et si l'on fait passer par le point de concours des trois axes radicaux de trois cercles trois coniques ayant avec les trois cercles respectivement un double contact sur une même droite, ces trois coniques sont homothétiques.

5. Étant donnée une conique  $U$ , si par un point quelconque  $p$  on mène trois couples de droites, et si l'on fait passer trois coniques  $A_1, A_2, A_3$  par les intersections de  $U$  avec les trois couples de droites respectivement; les trois coniques  $A$  ont, deux à deux, un couple de cordes communes (réelles ou imaginaires) passant par le point  $p$ , et ces trois couples forment un faisceau de six droites en involution.

Et si l'on a trois coniques  $A$ , ayant chacune, avec une quatrième conique  $U$ , un double contact, de telle sorte que les trois cordes de contact concourent en un même point; les trois coniques  $A$  auront, deux à deux, un couple de cordes communes concourant en ce même point, et ces trois couples de cordes communes formeront un faisceau en involution.

#### THÉORÈME CORRÉLATIF.

*Étant données quatre coniques  $U, C_1, C_2, C_3$ , si dans les trois quadrilatères circonscrits à  $U$  et  $C_1$ , à  $U$  et  $C_2$ , à  $U$  et  $C_3$ , on inscrit trois coniques  $A_1, A_2, A_3$  respectivement; les huit tangentes communes à  $C_1$  et  $C_2$ , et à  $A_1$  et  $A_2$ , les huit tangentes communes à  $C_2$  et  $C_3$ , et à  $A_2$  et  $A_3$ , enfin les huit tangentes communes à  $C_1$  et  $C_3$ , et à  $A_1$  et  $A_3$  sont respectivement tangentes à trois coniques  $\Sigma_3, \Sigma_1, \Sigma_2$  qui sont inscrites dans un même quadrilatère (et conséquemment six tangentes menées*

*d'un point quelconque aux trois coniques  $\Sigma$  forment un faisceau en involution).*

Si l'on se donne une droite  $L$  que doivent toucher les trois coniques  $A$ , les trois coniques  $\Sigma$  sont également tangentes à cette droite. Dès qu'on se donne cette droite, les trois coniques  $\Sigma$  sont déterminées, et les trois coniques  $A$  ont, deux à deux, trois tangentes communes, outre  $L$ , qui sont tangentes en même temps à une conique  $\Sigma$  respectivement.

COROLLAIRES.

1. Faisant passer la droite  $L$  à l'infini, on obtient que :

Si, dans les trois quadrilatères circonscrits à une conique  $U$  et à trois coniques  $C_1, C_2, C_3$  respectivement, on inscrit trois paraboles  $A_1, A_2, A_3$ ; les trois systèmes de sept tangentes communes à deux coniques  $C$  et aux deux paraboles correspondantes enveloppent respectivement trois paraboles  $\Sigma$ , qui sont inscrites dans un même triangle.

2. Prenant pour les trois coniques  $C$  trois droites limitées, et pour les coniques  $A$  des diagonales des quadrilatères formés par les tangentes menées à  $U$  des extrémités de chacune des trois droites  $C$  respectivement, on obtient que :

Si trois quadrilatères quelconques sont circonscrits à une même conique  $U$ , en joignant dans ces quadrilatères, pris deux à deux, les sommets opposés de l'un à ceux de l'autre, on obtient trois systèmes de huit droites, tangentes respectivement à trois coniques  $\Sigma$ , qui sont inscrites dans un même quadrilatère.

3. Prenant pour  $U$  une droite limitée, ou un système de deux points  $u$  et  $u'$ , on obtient :

Si, de deux points quelconques, on mène trois systèmes de quatre tangentes à trois coniques  $C_1, C_2, C_3$  respectivement, et si l'on inscrit dans les trois quadrilatères ainsi formés trois coniques  $A_1, A_2, A_3$ ; les huit tangentes communes à  $C_1$  et  $C_2$  et à  $A_1$  et  $A_2$ , les huit tangentes communes à  $C_2$  et  $C_3$  et à  $A_2$  et  $A_3$ , et les huit tangentes communes à  $C_1$  et  $C_3$  et à  $A_1$  et  $A_3$  enveloppent respectivement trois coniques  $\Sigma_3, \Sigma_1, \Sigma_2$  inscrites dans un même quadrilatère.

Si l'on fait coïncider les deux points  $u, u'$  en un seul  $U$ , les con-

ques A ont un double contact avec les coniques C aux points de contact des tangentes menées à ces dernières du point U, et en prenant en particulier, pour les coniques A, les cordes de contact, on obtient que :

Si, d'un point U, on mène à trois coniques  $C_1, C_2, C_3$  les six tangentes dont les six points de contact soient  $a_1, a'_1, a_2, a'_2, a_3, a'_3$ ; les quatre tangentes communes à  $C_1$  et  $C_2$ , et les quatre côtés du quadrilatère  $a_1 a_2 a'_1 a'_2$ , puis les quatre tangentes communes à  $C_2$  et  $C_3$ , et les quatre côtés du quadrilatère  $a_2 a_3 a'_2 a'_3$ , enfin les quatre tangentes communes de  $C_1$  et  $C_3$ , et les quatre côtés du quadrilatère  $a_1 a_3 a'_1 a'_3$  forment trois systèmes de huit droites, enveloppant respectivement trois coniques  $\Sigma$ , qui sont inscrites dans un même quadrilatère.

4. Si  $C_1, C_2, C_3$  sont trois coniques homofocales, tandis que U est une conique quelconque, ou subit une des modifications particulières considérées dans le corollaire précédent, les trois quadrilatères circonscrits aux coniques A, prises deux à deux, ou déterminés par les extrémités des cordes de contact  $a_1 a'_1, a_2 a'_2, a_3 a'_3$ , prises deux à deux, sont circonscrits respectivement à trois coniques  $\Sigma$ , qui sont homofocales entre elles, et homofocales aussi aux coniques C.

De même, en considérant deux coniques homofocales  $C_1, C_2$ , et prenant pour  $C_3$  leur excentricité commune, les trois coniques  $\Sigma$  sont homofocales entre elles et aux deux coniques proposées  $C_1, C_2$ . En ce cas, si l'on prend pour U un point et pour les coniques A les cordes de contact, une des coniques A et deux des coniques  $\Sigma$  se réduisent à l'excentricité commune de  $C_1$  et  $C_2$ .

5. En prenant pour  $C_1, C_2, C_3$  trois coniques ayant un double contact avec U, et pour les coniques A les trois pôles de contact, on obtient que :

Si trois coniques  $C_1, C_2, C_3$  ont chacune un double contact avec une quatrième conique U, les pôles de contact étant  $A_1, A_2, A_3$  respectivement, et si l'on construit une conique  $\Sigma_3$  tangente aux quatre tangentes communes de  $C_1$  et  $C_2$  et à la droite  $A_1 A_2$ , une conique  $\Sigma_2$  tangente aux quatre tangentes communes de  $C_1$  et  $C_3$  et à la droite  $A_1 A_3$ , et une conique  $\Sigma_1$  tangente aux quatre tangentes communes de  $C_2$  et  $C_3$  et à

la droite  $A_2A_3$ , les trois coniques  $\Sigma$  sont inscrites dans un même quadrilatère.

6. Étant données deux coniques homofocales  $C_1, C_2$  et deux coniques quelconques  $U, C_3$ , si l'on inscrit dans les trois quadrilatères circonscrits à  $U$  et  $C_1$ , à  $U$  et  $C_2$ , et à  $U$  et  $C_3$ , respectivement, trois coniques  $A_1, A_2, A_3$ ; les huit tangentes communes à  $C_1$  et  $C_3$ , et à  $A_1$  et  $A_3$  seront tangentes à une conique  $\Sigma_2$ , les huit tangentes communes à  $C_2$  et  $C_3$ , et à  $A_2$  et  $A_3$  seront tangentes à une conique  $\Sigma_1$ , et les huit tangentes communes à  $A_1$  et  $A_2$ , et à  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  seront tangentes à une conique homofocale à  $C_1$  et  $C_2$ .

Et, étant données deux coniques homofocales  $C_1, C_2$  et une conique quelconque  $C_3$ , si l'on prend sur cette dernière deux points quelconques  $u, u'$ , le pôle de la droite  $uu'$ , par rapport à  $C_3$ , étant  $A_3$ , et si l'on inscrit, dans les deux quadrilatères qu'on obtient en menant de  $u$  et  $u'$ , les tangentes à  $C_1$  et  $C_2$ , deux coniques  $A_1$  et  $A_2$ ; on pourra inscrire, dans le quadrilatère circonscrit à  $C_1$  et  $C_3$ , une conique  $\Sigma_2$  ayant un double contact avec  $A_1$ , les tangentes aux points de contact concourant au point  $A_3$ ; de même, dans le quadrilatère circonscrit à  $C_2$  et  $C_3$ , une conique  $\Sigma_1$  ayant un double contact avec  $A_2$ , les tangentes aux points de contact concourant également au point  $A_3$ , et, en outre, les huit tangentes communes à  $A_1$  et  $A_2$ , et à  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  seront tangentes à une conique homofocale à  $C_1$  et  $C_2$ .

On voit en même temps que deux sommets opposés, soient  $a_1, a'_1$ , du quadrilatère formé par les tangentes menées de  $u, u'$  à  $C_1$ , et deux sommets opposés, soient  $a_2, a'_2$ , du quadrilatère formé par les tangentes menées de  $u, u'$  à  $C_2$  sont situés respectivement sur deux coniques  $\Sigma_1, \Sigma_2$ , inscrites dans les quadrilatères circonscrits à  $C_2, C_3$ , et à  $C_1, C_3$ , que les tangentes menées par les sommets  $a$  aux coniques  $\Sigma_1, \Sigma_2$  concourent au point  $A_3$ , et que les quatre tangentes communes à  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ , conjointement avec les quatre côtés du quadrilatère  $a_1a_2a'_1a'_2$ , sont huit tangentes d'une même conique homofocale à  $C_1$  et  $C_2$ .

7. Étant données deux coniques homofocales  $C_1, C_2$ , une conique quelconque  $C_3$ , et une conique  $U$  ayant un double contact avec  $C_1$ , si l'on inscrit dans les deux quadrilatères circonscrits à  $U$  et  $C_2$ , et à  $U$  et  $C_3$ , respectivement, deux coniques  $A_2, A_3$ ; les huit tangentes com-

munes à  $C_2$  et  $C_3$  et à  $A_2$  et  $A_3$  seront tangentes à une conique  $\Sigma_1$ , les quatre tangentes communes à  $C_1$  et  $C_3$  seront tangentes à une conique  $\Sigma_2$  ayant un double contact avec  $A_3$ , et dont les tangentes aux points de contact concourent au pôle de contact  $A_1$  de  $U$  et  $C_1$ , et les quatre tangentes communes de  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  seront tangentes à une conique homofocale à  $C_1$  et  $C_2$ , ayant un double contact avec  $A_2$ , et dont les tangentes aux points de contact concourent au point  $A_1$  [\*].

Et, étant données deux coniques homofocales  $C_1$ ,  $C_2$  et une conique quelconque  $C_3$ , si l'on prend sur l'une des deux coniques homofocales, soit  $C_1$ , deux points quelconques  $u_1$ ,  $u'_1$ , et si l'on prend, dans les deux quadrilatères déterminés par les tangentes menées de  $u_1$  et  $u'_1$  à  $C_2$  et  $C_3$ , deux couples de sommets opposés, soient  $a_2$ ,  $a'_2$  et  $a_3$ ,  $a'_3$ ; les quatre tangentes communes à  $C_2$  et  $C_3$ , et les quatre côtés du quadrilatère  $a_2 a_3 a'_2 a'_3$ , seront tangentes à une conique  $\Sigma_1$ , les quatre tangentes communes à  $C_1$  et  $C_3$  seront tangentes à une conique  $\Sigma_2$  passant par  $a_3$ ,  $a'_3$ , et dont les tangentes en ces deux points concourent au pôle  $A_1$  de la droite  $u_1 u'_1$  par rapport à  $C_1$ ; enfin, les quatre tangentes communes à  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  seront tangentes à une conique  $\Sigma_3$  homofocale à  $C_1$  et  $C_2$ , passant par les deux sommets  $a_2$ ,  $a'_2$ , et dont les tangentes en ces deux points concourent au point  $A_1$ .

Et, étant données deux coniques quelconques  $C_2$ ,  $C_3$  et une conique  $U$  passant par les foyers  $f$ ,  $f'$  de  $C_2$ , si l'on inscrit, dans les deux quadrilatères circonscrits à  $U$  et  $C_2$  et à  $U$  et  $C_3$  respectivement, deux coniques  $A_2$  et  $A_3$ ; les huit tangentes communes à  $C_2$  et  $C_3$ , et à  $A_2$  et  $A_3$  seront tangentes à une conique  $\Sigma_1$ , les quatre tangentes, menées de  $f$  et  $f'$  à  $C_3$ , seront tangentes à une conique  $\Sigma_2$  ayant un double contact avec  $A_3$ , et dont les tangentes au point de contact concourent au pôle de contact  $A_1$  de  $ff'$  par rapport à  $U$ ; enfin les quatre tangentes communes à  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  seront tangentes à une conique homofocale à  $C_2$ , ayant un double contact avec  $A_2$ , et dont les tangentes aux points de contact concourent également au point  $A_1$ .

Observons encore que le théorème qui vient d'être discuté est sa

[\*] En vertu d'un des corollaires du théorème ci-dessus cité de M. Chasles relatif à un système de trois coniques, on pourra prendre pour la conique  $A_2$  un cercle ayant son centre au point  $A_1$ .

propre réciproque, ou que les coniques qu'on y met en présence peuvent changer de rôles. De sorte qu'en se donnant arbitrairement  $\Sigma_3$ ,  $\Sigma_2$ ,  $C_1$ ,  $A_1$ , et en faisant passer par les points d'intersection de  $\Sigma_3$  avec  $\Sigma_2$ , avec  $C_1$  et avec  $A_1$ , respectivement, trois coniques  $\Sigma_1$ ,  $C_2$ ,  $A_2$ ; les intersections de  $\Sigma_2$  avec  $C_1$  et de  $\Sigma_1$  avec  $C_2$  sont sur une conique  $C_3$ , les intersections de  $\Sigma_2$  avec  $A_1$  et de  $\Sigma_1$  avec  $A_2$  sur une conique  $A_3$ , et les intersections de  $C_1$  avec  $A_1$ , de  $C_2$  avec  $A_2$ , et de  $C_3$  avec  $A_3$  sur une conique  $U$ .

APPLICATIONS AUX CÔNES DU SECOND DEGRÉ ET AUX CONIQUES SPHÉRIQUES.

Prenant un point quelconque  $s$  dans l'espace, on peut considérer les coniques qui se présentent dans les théorèmes précédents comme les traces que forment, sur un plan coupant, autant de cônes du second degré, ayant tous pour sommet le point  $s$ ; à la place des quatre points d'intersection de deux coniques, on aura les quatre arêtes d'intersection de deux cônes, et, à la place du quadrilatère circonscrit à deux coniques, l'angle tétraèdre circonscrit à deux cônes. En coupant tous ces cônes par une sphère décrite du centre  $s$ , on voit que *le théorème et le théorème corrélatif énoncés ci-dessus, relativement à quatre coniques quelconques dans le plan, ont lieu également pour un système de quatre coniques sphériques.*

COROLLAIRES.

1. Si l'on a trois couples de coniques sphériques homocycliques  $A_1$  et  $C_1$ ,  $A_2$  et  $C_2$ ,  $A_3$  et  $C_3$ , les huit points d'intersection de  $C_1$  avec  $C_2$  et de  $A_1$  avec  $A_2$  sont sur une conique sphérique  $\Sigma_3$ , les huit points d'intersection de  $C_1$  avec  $C_3$  et de  $A_1$  avec  $A_3$  sur une conique sphérique  $\Sigma_2$ , et les douze points d'intersection de  $C_2$  avec  $C_3$ , de  $A_2$  avec  $A_3$ , et de  $\Sigma_2$  avec  $\Sigma_3$  sur une conique sphérique  $\Sigma_1$ .

2. Si l'on a deux coniques sphériques homocycliques  $U$  et  $A_1$ , et deux coniques sphériques quelconques  $C_2$ ,  $C_3$ , et si, par les intersections de  $U$  avec  $C_2$  et  $C_3$  respectivement, on fait passer deux coniques sphériques  $A_2$  et  $A_3$ , les huit points d'intersection de  $C_2$  avec  $C_3$  et de  $A_2$  avec  $A_3$  seront sur une conique sphérique  $\Sigma_1$ , les quatre points d'intersection de  $A_1$  avec  $A_2$  sur une conique  $\Sigma_3$  homocyclique à  $C_2$ , et

les huit points d'intersection de  $A_1$  avec  $A_3$  et de  $\Sigma_1$  avec  $\Sigma_3$  sur une conique  $\Sigma_2$  homocyclique à  $C_3$ .

3. Si l'on a trois couples de coniques sphériques homofocales  $A_1$  et  $C_1$ ,  $A_2$  et  $C_2$ ,  $A_3$  et  $C_3$ , il existera une conique sphérique  $\Sigma_3$  inscrite à la fois dans les deux quadrilatères sphériques circonscrits à  $A_1$  et  $A_2$ , et à  $C_1$  et  $C_2$  respectivement, une conique sphérique  $\Sigma_2$  inscrite à la fois dans les deux quadrilatères sphériques circonscrits à  $A_1$  et  $A_3$ , et à  $C_1$  et  $C_3$  respectivement, et une conique sphérique  $\Sigma_1$  inscrite à la fois dans les trois quadrilatères sphériques circonscrits à  $A_2$  et  $A_3$ , à  $C_2$  et  $C_3$ , et à  $\Sigma_2$  et  $\Sigma_3$  respectivement.

4. Si l'on a deux coniques sphériques homofocales  $U$  et  $A_1$  et deux coniques sphériques quelconques  $C_2$ ,  $C_3$ , et si, dans les quadrilatères sphériques circonscrits à  $U$  et  $C_2$ , et à  $U$  et  $C_3$  respectivement, on inscrit deux coniques sphériques  $A_2$  et  $A_3$ ; les deux quadrilatères sphériques circonscrits à  $C_2$  et  $C_3$ , et à  $A_2$  et  $A_3$  respectivement seront circonscrits à une même conique  $\Sigma_1$ ; le quadrilatère sphérique circonscrit à  $A_1$  et  $A_2$  sera circonscrit à une conique  $\Sigma_3$  homofocale à  $C_2$ , et les deux quadrilatères sphériques circonscrits à  $A_1$  et  $A_3$ , et à  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  seront circonscrits à une même conique  $\Sigma_2$  homofocale à  $C_3$ .

5. Si l'on a sur la sphère un petit cercle quelconque  $C_1$  et deux couples de coniques homofocales  $A_2$  et  $C_2$ , et  $A_3$  et  $C_3$ , et si l'on mène par le pôle du petit cercle de grands cercles tangents à  $A_2$  et  $A_3$ , dont les points de contact soient respectivement  $a_2$ ,  $a'_2$  et  $a_3$ ,  $a'_3$ ; on peut inscrire, dans le quadrilatère sphérique circonscrit à  $C_1$  et  $C_2$ , une conique sphérique  $\Sigma_3$  ayant un double contact avec  $A_2$  aux points  $a_2$  et  $a'_2$ ; de même, dans le quadrilatère sphérique circonscrit à  $C_1$  et  $C_3$ , une conique sphérique  $\Sigma_2$  ayant un double contact avec  $A_3$  aux points  $a_3$  et  $a'_3$ , et, en outre, les trois quadrilatères sphériques circonscrits à  $C_2$  et  $C_3$ ,  $A_2$  et  $A_3$ , et  $\Sigma_2$  et  $\Sigma_3$  respectivement sont circonscrits à une même conique  $\Sigma_1$ .

On pourrait déduire encore beaucoup d'autre corollaires, que j'ometts, de crainte de donner trop d'étendue à cette Note.

#### THÉORÈME GÉNÉRAL.

*Etant donnée une conique  $U$ , si l'on prend sur  $U$   $n$  systèmes de quatre points, et si l'on fait passer par chaque système de quatre*

points un couple de coniques C et A; en prenant deux couples quelconques,  $C_\alpha, A_\alpha$  et  $C_\beta, A_\beta$ , les huit points d'intersection de  $C_\alpha$  avec  $C_\beta$ , et de  $A_\alpha$  avec  $A_\beta$  seront sur une conique  $\Sigma_{\alpha, \beta}$ , qui passe, en outre, par les points d'intersection de  $n - 2$  couples de coniques  $\Sigma$ , savoir, par les points d'intersection de  $\Sigma_{1, \alpha}$  avec  $\Sigma_{1, \beta}$ , de  $\Sigma_{2, \alpha}$  avec  $\Sigma_{2, \beta}, \dots$ , de  $\Sigma_{\alpha-1, \alpha}$  avec  $\Sigma_{\alpha-1, \beta}$ , de  $\Sigma_{\alpha+1, \alpha}$  avec  $\Sigma_{\alpha+1, \beta}, \dots$ , de  $\Sigma_{\beta-1, \alpha}$  avec  $\Sigma_{\beta-1, \beta}$ , de  $\Sigma_{\beta+1, \alpha}$  avec  $\Sigma_{\beta+1, \beta}, \dots$ , de  $\Sigma_{n-1, \alpha}$  avec  $\Sigma_{n-1, \beta}$ , et de  $\Sigma_{n, \alpha}$  avec  $\Sigma_{n, \beta}$ .

La démonstration de ce théorème résulte immédiatement de l'inspection des équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 U=0, \quad C_1=0, \quad C_2=0, \dots, \quad C_{n-1}=0, \quad C_n=0, \\
 A_1=U+\lambda_1 C_1=0, \quad A_2=U+\lambda_2 C_2=0, \dots, \quad A_{n-1}=U+\lambda_{n-1} C_{n-1}=0, \quad A_n=U+\lambda_n C_n=0, \\
 \Sigma_{1,2}=\lambda_1 C_1-\lambda_2 C_2=0, \quad \Sigma_{1,3}=\lambda_1 C_1-\lambda_3 C_3=0, \dots, \quad \Sigma_{1,n-1}=\lambda_1 C_1-\lambda_{n-1} C_{n-1}=0, \quad \Sigma_{1,n}=\lambda_1 C_1-\lambda_n C_n=0, \\
 \Sigma_{2,3}=\lambda_2 C_2-\lambda_3 C_3=0, \dots, \quad \Sigma_{2,n-1}=\lambda_2 C_2-\lambda_{n-1} C_{n-1}=0, \quad \Sigma_{2,n}=\lambda_2 C_2-\lambda_n C_n=0, \\
 \dots\dots\dots \\
 \Sigma_{n-2,n-1}=\lambda_{n-2} C_{n-2}-\lambda_{n-1} C_{n-1}=0, \quad \Sigma_{n-2,n}=\lambda_{n-2} C_{n-2}-\lambda_n C_n=0, \\
 \Sigma_{n-1,n}=\lambda_{n-1} C_{n-1}-\lambda_n C_n=0.
 \end{aligned}$$

On voit aisément que les coniques A et C et la conique U jouent elles-mêmes le rôle de coniques  $\Sigma$ , et qu'en somme chacune des coniques mises en présence passe par les points d'intersection de  $n$  couples de ces coniques.

Ce théorème donne naturellement lieu à un théorème corrélatif, à des corollaires, à des applications aux coniques sphériques, etc.; mais on comprend facilement que je m'abstienne de les développer ici.

