

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

WOEPCKE

**Addition à la discussion de deux méthodes arabes pour  
déterminer une valeur approchée de  $\sin 1^\circ$**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 1<sup>re</sup> série*, tome 19 (1854), p. 301-303.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1854\\_1\\_19\\_\\_301\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1854_1_19__301_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

ADDITION

A LA

DISCUSSION DE DEUX MÉTHODES ARABES

POUR DÉTERMINER UNE VALEUR APPROCHÉE DE  $\sin 1^\circ$  [\*];

PAR M. WOEPCKE.

En exposant le procédé employé par Oloug-Beg, pour former les coefficients de sa série (page 172), j'aurais dû peut-être indiquer aussi de quelle manière Oloug-Beg a pu être conduit à cette méthode. Je m'empresse de suppléer à cette omission, en tâchant de résoudre la question par une conjecture qui, je crois, peut en offrir une explication satisfaisante.

L'équation qu'il s'agit de résoudre est

$$X = \frac{A + X^3}{B},$$

où

$$A = am + a_0 + a_1 \frac{1}{m} + a_2 \frac{1}{m^2} + \dots,$$

$$B = bm;$$

donc

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = \frac{a}{b} + \frac{a_0}{b} \frac{1}{m} + \frac{a_1}{b} \frac{1}{m^2} + \frac{a_2}{b} \frac{1}{m^3} + \dots \\ \quad + \frac{X^3}{b} \frac{1}{m}. \end{array} \right.$$

On aura, comme une première approximation, en prenant seule-

---

[\*] Voir le tome XIX de ce Journal, pages 153 et suivantes.

ment le premier terme de la série (I),

$$X_1 = \frac{a}{b} = a'_0 + \frac{\alpha_0}{b}.$$

Seconde approximation, allant jusqu'au deuxième terme de la série (I),

$$X_2 = X_1 + \left( \frac{\alpha_0}{b} + \frac{X_1^3}{b} \right) \frac{1}{m},$$

et, en négligeant  $\frac{\alpha_0}{b}$  dans  $X_1^3$ ,

$$\begin{aligned} &= X_1 + \frac{a_0 + (a'_0)^3}{b} \frac{1}{m} = a'_0 + \frac{m\alpha_0 + (a'_0)^3 + a_0}{b} \frac{1}{m} \\ &= a'_0 + a'_1 \frac{1}{m} + \left( \frac{\alpha_1}{b} \right) \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

Troisième approximation, allant jusqu'au troisième terme de la série (I),

$$X_3 = X_2 + \frac{a_1}{b} \frac{1}{m^2} + \frac{X_2^3 - X_1^3}{b} \cdot \frac{1}{m},$$

et, en négligeant  $\left( \frac{\alpha_1}{b} \right) \frac{1}{m}$  dans  $X_2^3$  et  $\frac{\alpha_0}{b}$  dans  $X_1^3$ ,

$$\begin{aligned} &= X_2 + \left\{ \frac{a_1}{b} + \frac{m \left[ \left( a'_0 + a'_1 \frac{1}{m} \right)^3 - (a'_0)^3 \right]}{b} \right\} \frac{1}{m^2} \\ &= a'_0 + a'_1 \frac{1}{m} + \frac{m\alpha_1 + m \left[ \left( a'_0 + a'_1 \frac{1}{m} \right)^3 - (a'_0)^3 \right] + a_1}{b} \frac{1}{m^2} \\ &= a'_0 + a'_1 \frac{1}{m} + a'_2 \frac{1}{m^2} + \left( \frac{\alpha_2}{b} \right) \frac{1}{m^2}. \end{aligned}$$

Quatrième approximation, allant jusqu'au quatrième terme de la série (I),

$$X_4 = X_3 + \frac{a_2}{b} \frac{1}{m^3} + \frac{X_3^3 - X_2^3}{b} \frac{1}{m},$$

et, en négligeant  $\left( \frac{\alpha_2}{b} \right) \frac{1}{m^2}$  dans  $X_3^3$  et  $\left( \frac{\alpha_1}{b} \right) \frac{1}{m}$  dans  $X_2^3$ ,

$$\begin{aligned}
 &= X_3 + \left\{ \frac{a_2}{b} + \frac{m^2 \left[ \left( a'_0 + a'_1 \frac{1}{m} + a'_2 \frac{1}{m^2} \right)^3 - \left( a'_0 + a'_1 \frac{1}{m} \right)^3 \right]}{b} \right\} \frac{1}{m^3} \\
 &= a'_0 + a'_1 \frac{1}{m} + a'_2 \frac{1}{m^2} \\
 &\quad + \frac{m a_2 + m^2 \left[ \left( a'_0 + a'_1 \frac{1}{m} + a'_2 \frac{1}{m^2} \right)^3 - \left( a'_0 + a'_1 \frac{1}{m} \right)^3 \right] + a_3}{b m^3} \\
 &= a'_0 + a'_1 \frac{1}{m} + a'_2 \frac{1}{m^2} + a'_3 \frac{1}{m^3} + \left( \frac{a_3}{b} \right) \frac{1}{m^3}.
 \end{aligned}$$

On obtient ainsi, comme on voit, la série d'Oloug-Beg. Le point essentiel consiste à remarquer que l'on reprend, dans chaque approximation, le terme  $\frac{X^3}{b} \frac{1}{m}$  de la série (1), en en retranchant ce que donnait déjà l'approximation précédente, pour éviter le double emploi.