JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

LÉOPOLD KRONECKER

Note sur les fonctions semblables des racines d'une équation

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^re^ série, tome 19 (1854), p. 279-280.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1854_1_19__279_0>

NOTE

SUR

LES FONCTIONS SEMBLABLES DES RACINES D'UNE ÉQUATION ;

PAR M. LÉOPOLD KRONECKER.

Soient $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \theta$ les racines d'une équation et $F(\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \theta)$, $f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \theta)$ deux fonctions rationnelles de ces racines. Supposons que ces fonctïons soient telles que toute substitution qui change la valeur algébrique de $f(\alpha, \beta, \ldots, \theta)$ change aussi celle de $F(\alpha, \beta, \ldots, \theta)$, ou, ce qui revient au même, que les substitutions qui laissent la fonction $F(\alpha, \beta, \ldots, \theta)$ invariable ne produisent non plus aucun changement sur la fonction $f(\alpha, \beta, \ldots, \theta)$. Puis désignons par $F_1, F_2, \ldots, F_n$ toutes les valeurs distinctes que prend la fonction $F(\alpha, \beta, \ldots, \theta)$ quand on y permute les lettres qu'elle renferme, et par $f_1, f_2, \ldots, f_n$ les valeurs correspondantes de la fonction $f(\alpha, \beta, \ldots, \theta)$. Supposons, enfin, les indices tellement arrangés que les m premières expressions, savoir, $f_1, f_2, \ldots, f_m$ soient toutes les valeurs *distinctes* que prend la fonction $f(\alpha, \beta, \ldots, \theta)$ quand on y permute les lettres $\alpha, \beta, \ldots, \theta$. Cela posé, le produit

$$(1) \qquad (x + F_1 . y - f_1)(x + F_2 . y - f_2) \ldots (x + F_n . y - f_n)$$

sera une fonction entière des variables x et y dont les coefficients pourront s'exprimer rationnellement par les coefficients de l'équation donnée. Pareillement, le produit

$$(2) \qquad (x + F_1 . y - f_1)(x + F_1 . y - f_2) \ldots (x + F_1 . y - f_m)$$

sera une fonction entière de la quantité $(x + F_1 . y)$ dont les coefficients pourront s'exprimer rationnellement par les coefficients de l'équation donnée. Désignons donc par $\varphi(x, y)$ le produit (1) et par

$\psi(x+F_1.y)$ le produit (2), et cherchons le plus grand commun diviseur des deux fonctions $\varphi(x,y)$ et $\psi(x+F_1.y)$, en les considérant comme fonctions de la variable x seule. On trouvera ainsi une fonction entière de x et y dont les coefficients s'exprimeront rationnellement par F_1 et par les coefficients de l'équation donnée. Soit donc $X(F_1, x, y)$ cette fonction où nous pourrons supposer le coefficient de la plus haute puissance de x égal à 1. Cela posé, la fonction $X(F_1, x, y)$ sera évidemment égale au produit de tous les facteurs linéaires communs aux deux fonctions $\varphi(x,y)$ et $\psi(x+F_1.y)$. On aura, par suite, l'équation

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} X(F_1, x, y) &= (x + F_1.y - f_1)(x + F_a.y - f_a) \\ &\times (x + F_b.y - f_b)\ldots(x + F_k.y - f_k), \end{aligned} \right.$$

$a, b,\ldots, k$ désignant tous les indices pour lesquels les valeurs *numériques* de $F_a, F_b,\ldots, F_k$ sont égales à celles de F_1, quoique $f_1, f_a, f_b,\ldots, f_k$ soient distinctes quant à la forme algébrique. Cette équation fait voir, en y faisant $y = 0$, que f_1 dépend d'une équation dont les coefficients s'expriment rationnellement en fonction de F_1 et des coefficients de l'équation donnée, et dont le degré est égal au nombre des valeurs numériquement égales $F_1, F_a, F_b,\ldots, F_k$.

Il est visible que tout cela s'applique au cas spécial où les fonctions $F(\alpha, \beta,\ldots, \theta)$ et $f(\alpha, \beta,\ldots, \theta)$ sont des fonctions semblables.

Ensuite, en désignant par r le nombre des racines $\alpha, \beta,\ldots, \theta$, faisons $f_1(\alpha, \beta,\ldots, \theta) = \alpha$ et supposons que la fonction $F(\alpha, \beta,\ldots, \theta)$ soit telle que les $1.2.3\ldots r$ valeurs qu'elle prend quand on y permute les racines, soient toutes différentes. Cela posé, l'équation (3) se réduira à celle-ci:

$$X(F_1, x, y) = x + F_1.y - \alpha;$$

d'où l'on voit qu'on peut exprimer une quelconque des racines α, $\beta,\ldots, \theta$ en fonction rationnelle de F_1 et des coefficients de l'équation donnée.