JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

P.-E. BIVER

Théorie analytique des moindres carrés

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 18 (1853), p. 169-200.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1853_1_18__169_0>

THÉORIE ANALYTIQUE DES MOINDRES CARRÉS;

Par M. P.-E. BIVER,
Lieutenant au corps d'État-Major belge.

La méthode des moindres carrés donne lieu aujourd'hui à d'assez nombreuses applications; il est évidemment à désirer que toutes les personnes qui se trouvent dans le cas de s'en servir en connaissent la théorie. Malheureusement, la démonstration de Laplace présente des développements et des difficultés qui la mettent hors de la portée du grand nombre. Bien des tentatives ont été faites pour y suppléer d'une manière satisfaisante par des spéculations moins élevées; le présent Mémoire est un essai dans ce sens.

J'ai cru possible d'attacher une signification à la formule très-simple sur laquelle repose la méthode, sans invoquer le secours de notions plus ou moins étrangères à la question. A cet effet, j'ai imaginé une fonction que je nomme *risque d'erreur;* en partant de la définition de cette fonction et de l'examen du problème complet de la compensation des erreurs, je crois être parvenu, dans les paragraphes ci-après, à démontrer successivement et directement les théorèmes fondamentaux nécessaires à la solution du problème, *dans le cas le plus général qui puisse se présenter*. Quant aux résultats remarquables et aux procédés simplifiés auxquels conduit la théorie des moindres carrés, je ne m'en occupe point ici : une fois les théorèmes fondamentaux établis, il est facile d'y rattacher les conséquences qu'on en a déduites.

§ I.

But de la théorie.

Dans la pratique de plusieurs sciences, on a besoin de se procurer des valeurs aussi exactes que possible pour certaines quantités : l'astronomie, la géodésie, la physique présentent surtout cette exigence. Mais, quelque parfaits que soient les moyens employés à la mesure de ces valeurs, quelque habile que soit l'observateur, il est bien des sources d'erreur qu'il est impossible d'éviter. Ces sources sont de deux espèces bien distinctes : les unes, inhérentes à la nature particulière des moyens d'observation, produisent des erreurs régulières dépendant de circonstances appréciables; les autres consistent dans les imperfections des sens et des instruments, et dans mille influences diverses qu'on ne saurait distinguer : elles donnent lieu à des erreurs fortuites et irrégulières. Parmi les sources d'erreur de la première espèce, nous citerons les dilatations des règles, les excentricités, les défauts de collimation, les phases des signaux géodésiques, les réfractions, la déclinaison magnétique et ses variations, etc. L'observateur qui prétend à une certaine exactitude doit étudier les lois des erreurs de cette catégorie et annoter constamment des éléments de correction, ou combiner ses observations de manière à pouvoir, par le calcul, dépouiller ses résultats des erreurs régulières. Restent donc les erreurs fortuites; et celles-ci, on ne peut espérer de les apprécier d'une manière certaine : leur nature s'y oppose. Une seule ressource se présente à l'observateur : il doit varier habilement les circonstances de ses mesures et les répéter un assez grand nombre de fois; alors tout le porte à croire que les mêmes quantités auront été affectées d'erreurs fortuites, tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre; et, par suite, qu'il peut établir une espèce de compensation par une combinaison bien entendue de ses mesures. Mais y a-t-il une combinaison qu'il faille adopter de préférence à toute autre, et quelle est-elle? Voilà donc la question qui arrête l'observateur : la *théorie des moindres carrés* a pour objet d'y répondre, dans le cas où rien ne permet de supposer que les erreurs fortuites se produisent plus facilement positives que négatives, ou *vice versâ*.

Nous ferons remarquer que, dans ces tentatives de compensation, l'on peut être dans le cas d'avoir à comparer des mesures obtenues par des moyens d'une perfection inégale, tellement que l'on doive accorder plus de confiance à l'une qu'à l'autre. D'après ceci, nous dirons que des valeurs différentes, mais puisées à la même source, ont une *précision* égale, et que cette précision varie avec la source, de façon qu'il est essentiel, dans nos recherches, de reconnaître les moyens d'évaluer la précision des valeurs en même temps que ceux de compenser les erreurs.

Afin d'éviter la confusion, nous désignerons uniformément, dans tout ce qui suit, par x, y, z, u, t,..., les valeurs inconnues à déterminer, et par q leur nombre. Remarquant ensuite que les observations ne portent pas toujours directement sur les inconnues, mais souvent sur des fonctions données d'une ou plusieurs inconnues, nous désignerons par v_1, v_2, v_3,..., les quantités observées ou mesurées; par k_1, k_2, k_3,..., les valeurs obtenues pour ces quantités et *dégagées des erreurs régulières*; par p le nombre des observations; par h_1, h_2, h_3,..., les précisions des valeurs k_1, k_2, k_3,...; et par h', h'', h''',..., les précisions des valeurs finales x', y', z',..., que nous trouverons pour x, y, z,.... Lorsqu'il aura été possible d'observer directement les inconnues, une ou plusieurs des quantités v seront égales à x, d'autres à y, etc.; mais ce cas rentre dans celui, plus général, où l'on observe des fonctions connues

$$v_1 = f_1(x, y, z,...), \quad v_2 = f_2(x, y, z,...), \quad \text{etc.}$$

Il peut arriver, de plus, que les inconnues soient liées par des *équations de condition nécessaires*, rigoureuses,

$$0 = F_1(x, y, z,...), \quad 0 = F_2(x, y, z,...);$$

telle est, par exemple, l'équation

$$0 = 180^\circ - x - y - z,$$

si x, y, z sont les trois angles d'un triangle rectiligne. Nous désignerons par i le nombre de ces équations, i pouvant être nul; et nous voyons ainsi que le nombre d'inconnues réellement à déterminer se réduit à $q-i$; donc, dès que $p > q-i$, nous avons un excès d'observations qui peut nous conduire à une compensation d'erreurs. En effet, en combinant avec les i équations nécessaires $q-i$ des *équations approchées*

$$v_1 = k_1, \quad v_2 = k_2, \quad \text{etc.},$$

nous pourrons en déduire des valeurs pour les inconnues; et ces valeurs n'étant pas exactes, à cause de l'inexactitude des mesures $k_1, k_2, k_3, \ldots$, ne pourront satisfaire que par le plus grand hasard aux $p-q+i$ équations approchées restantes : l'existence des erreurs nous est donc révélée par l'incompatibilité des $p+i$ équations. Cette incompatibilité peut disparaître, si nous faisons aux valeurs $k_1, k_2, k_3, \ldots$, des corrections $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots$; alors, dans un système de q équations, nous pourrons déterminer encore les inconnues en fonction des corrections; et, en substituant ces nouvelles valeurs dans les $p-q+i$ équations restantes, nous aurons entre $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots$, autant de relations nécessaires à la compatibilité. Tous les systèmes de corrections satisfaisant à ces relations sont possibles, et dans l'ignorance complète où nous sommes de la véritable grandeur des erreurs de $k_1, k_2, k_3, \ldots$, à compenser, nous devons nous contenter de rechercher parmi tous ces *systèmes possibles* celui qui est le plus plausible, eu égard à l'ensemble de toutes les observations faites.

D'après ce qui précède, la théorie des moindres carrés doit résoudre la double question : Un système d'observations étant faites, 1° trouver le système des corrections les plus plausibles à faire aux valeurs observées; 2° déterminer les précisions des observations et des résultats qu'elles fournissent.

§ II.

Définition du risque d'erreur.

Nous nous proposons, en premier lieu, de trouver le système de corrections le plus plausible, qui correspond naturellement au système le plus plausible de valeurs des inconnues. Or, nous comprenons que l'ensemble des observations, sans nous donner de lumières positives sur les erreurs réelles, puisse nous indiquer le risque que nous courons de nous écarter de la vérité en adoptant certaines corrections : c'est ce que nous appellerons le *risque d'erreur* de ces corrections, ou des valeurs correspondantes des inconnues. Nous allons développer cette notion du risque d'erreur.

1°. Imaginons d'abord qu'une seule observation ait été faite; nous aurons $v_1 = k_1$. L'absence de tout autre renseignement fait que, eu égard à cette observation, le risque d'erreur particulier d'une correction Δ_1 sera d'autant plus grand que Δ_1 sera plus grand, sera un minimum pour $\Delta_1 = 0$, et sera le même que celui de la correction $-\Delta_1$, c'est-à-dire sera une fonction paire de Δ_1. La même correction, faite à une autre observation de même précision, donnerait en outre le même risque d'erreur.

2°. Passons au cas où nous aurions fait p observations, sans aucune liaison entre elles; par exemple, où nous aurions mesuré p fois l'angle formé en une station entre un point fixe et un signal qui peut être mobile d'une observation à l'autre; les p mesures différeront généralement et ne pourront fournir aucun contrôle les unes pour les autres. Dans cette hypothèse, pour un système de corrections que nous pourrons admettre, les risques d'erreurs particuliers se composeront en un risque d'erreur général, qui ne pourra dépendre que des grandeurs des corrections qui composent le système, et des précisions des observations; ce risque d'erreur devra encore être une fonction paire des corrections, devenir un minimum absolu pour toutes les corrections $= 0$, et, de ce point, croître avec chacune et avec toutes, indéfiniment; de plus, toutes les corrections devront y entrer symétriquement lorsque les observations sont également précises, car alors on ne peut concevoir qu'une même correction, faite à diverses observations, influe différemment sur le risque d'erreur; enfin, le même système de corrections, appliqué à un système différent d'observations, égales en précision aux premières, donnerait lieu au même risque d'erreur.

3°. Arrivons au cas des observations liées entre elles, telles qu'on les fait réellement; supposons, par exemple, que nous joignions aux observations du cas précédent la certitude de la fixité du signal. Chaque observation n'en aura été ni plus ni moins exacte; un même système de corrections ne s'écartera ni plus ni moins de la vérité, que nous ayons ou que nous n'ayons pas cette certitude. Le risque d'erreur de ce système sera donc le même dans les deux cas; seulement, dans le premier, tous les systèmes de corrections étant possibles, celui qui présentait le moindre risque d'erreur était

$$\Delta_1 = 0, \quad \Delta_2 = 0, \ldots,$$

et, maintenant que nous devons avoir

$$x = k_1 + \Delta_1 = k_2 + \Delta_2 = k_3 + \Delta_3 = \ldots,$$

les corrections possibles dépendent les unes des autres, et le risque d'erreur minimum, eu égard à cette dépendance, ne correspondra plus à des corrections nulles, puisque celles-ci seraient incompatibles; par suite, le moindre des risques d'erreur possibles ne sera pas le moindre de tous les risques d'erreur. On conçoit aisément que le même raisonnement peut être appliqué à toute autre hypothèse, et, par conséquent, le risque d'erreur, dans le troisième cas, est toujours le même que dans le deuxième; seulement, le système de corrections le plus plausible varie avec les équations auxquelles doivent satisfaire les systèmes possibles, équations qui dérivent, comme nous l'avons vu au § I, des relations entre les quantités observées et les inconnues d'une part, et entre les inconnues elles-mêmes d'autre part.

Cette identité que nous établissons entre le risque d'erreur d'un même système de corrections dans le deuxième et dans le troisième cas, implique la condition expresse que les erreurs des valeurs données par l'observation soient parfaitement indépendantes les unes des autres, comme si ces valeurs ne se rapportaient pas aux mêmes inconnues ou à des fonctions des mêmes inconnues. Et chaque fois que plusieurs valeurs approchées auront été déduites des *mêmes* observations, leurs erreurs ne seront plus indépendantes, les corrections ne devront plus l'être, et la compensation ne pourra pas être établie entre ces valeurs approchées; il faudra alors remonter aux quantités données plus directement par l'observation. Cette précaution négligée peut conduire, dans les applications, aux plus grandes absurdités.

Le risque d'erreur d'un système de corrections est donc toujours une fonction paire de ces corrections, croissant indéfiniment avec chacune d'elles, et, de plus, symétrique, quand les observations sont d'égale précision; et le minimum de ce risque d'erreur correspond aux valeurs les plus plausibles des corrections et des inconnues.

Il est clair, maintenant, que la solution générale de la première partie de notre problème des compensations revient à trouver l'expression analytique du risque d'erreur, le calcul nous donnant facilement ensuite les valeurs des corrections correspondant au minimum.

§ III.

Expression analytique du risque d'erreur.

Pour arriver graduellement à la solution générale du problème de la compensation des erreurs, nous démontrerons d'abord comme lemme, et d'après Encke (*Annuaire astronomique de Berlin* pour 1834), le principe des moyennes, savoir :

Dans le cas où les observations, d'une précision uniforme, se rapportent directement à une seule inconnue, c'est-à-dire où $v_1 = v_2 = v_3 = \ldots = x$, la valeur la plus plausible de x est la moyenne arithmétique des valeurs observées k_1, k_2, k_3,....

Si, d'abord, deux observations seulement ont été faites, savoir $v_1 = k_1$, $v_2 = k_2$, nulle d'entre elles ne méritant la préférence, il faut admettre pour x une valeur également différente de k_1 et de k_2, ce qui ne peut se faire qu'en posant

$$x - k_1 = k_2 - x, \quad \text{ou} \quad x = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

Ceci suppose qu'une déviation positive ou négative, d'égale grandeur absolue, doive être regardée comme également à craindre; mais cette hypothèse est fondée : 1° parce qu'elle est la plus simple possible; 2° parce que, les observations ayant été faites avec le plus grand soin, on peut bien supposer à priori que la déviation ait lieu dans un certain sens de préférence, mais on n'a aucun moyen de s'assurer si c'est en plus ou en moins. Ainsi, sauf autre lumière, $\frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ est la seule valeur généralement bonne.

Passons à la considération de trois observations. Comme il faut les faire entrer en ligne de compte sur la même ligne, il faudra que x soit une fonction symétrique de k_1, k_2 et k_3. Mais on peut aussi imaginer que l'une des observations vienne se ranger troisième après les deux autres déjà considérées, ce qui donnerait à déduire x de $\frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ et k_3, ou de $\frac{1}{2}(k_1 + k_3)$ et k_2, ou de $\frac{1}{2}(k_2 + k_3)$ et k_1. Or cette déduction doit se faire de la même manière dans les trois cas ; donc, si

$$x = \psi\left[\frac{1}{2}(k_1 + k_2),\ k_3\right],$$

on a en même temps

$$x = \psi\left[\frac{1}{2}(k_1 + k_3),\ k_2\right]$$

et

$$x = \psi\left[\frac{1}{2}(k_2 + k_3),\ k_1\right].$$

Posant

$$k_1 + k_2 + k_3 = s_3,$$

on a

$$x = \psi\left[\frac{1}{2}(s_3 - k_3),\ k_3\right] = \psi\left[\frac{1}{2}(s_3 - k_2),\ k_2\right],$$

ou, en changeant le signe fonctionnel,

$$x = \chi(s_3,\ k_3) = \chi(s_3,\ k_2);$$

cette égalité ne peut exister que si χ est une fonction de s_3 seul, puisque nulle relation ne lie k_3 et k_2; on a donc généralement

$$x = \chi(s_3),$$

χ représentant une fonction déterminée, mais encore inconnue. Or, dans le cas particulier de $k_1 = k_2 = k_3$, $s_3 = 3k_1$, tandis qu'il faut évidemment $x = k_1$; donc

$$\frac{s_3}{3} = \chi(s_3),$$

et, en général,

$$x = \frac{1}{3}(k_1 + k_2 + k_3).$$

De même nous avons, dans le cas de p observations,

$$x = \frac{1}{p}(k_1 + k_2 + \ldots k_p);$$

car, si nous supposons la proposition démontrée pour $p - 1$ observations, il nous vient, comme ci-dessus,

$$\begin{aligned} x &= \psi\left[\frac{1}{p-1}(k_1 + k_2 + \ldots k_{p-2} + k_{p-1}),\ k_p\right] \\ &= \psi\left[\frac{1}{p-1}(k_1 + k_2 + \ldots k_{p-2} + k_p),\ k_{p-1}\right], \end{aligned}$$

ou

$$x = \psi\left[\frac{1}{p-1}(s_p - k_p),\ k_p\right] = \psi\left[\frac{1}{p-1}(s_p - k_{p-1}),\ k_{p-1}\right],$$

ou encore

$$x = \chi(s_p, k_p) = \chi(s_p, k_{p-1}),$$

c'est-à-dire

$$x = \chi(s_p)$$

simplement; tandis que le cas particulier $k_1 = k_2 = \ldots = k_p$ nous donne

$$x = k_1 = \frac{s_p}{p} = \chi(s_p),$$

et détermine ainsi la forme de cette fonction. Maintenant, la proposition étant démontrée plus haut pour trois observations, il en résulte qu'elle est vraie pour quatre, puis pour cinq, pour six, et ainsi de suite, indéfiniment.

Nous voyons que le principe des moyennes arithmétiques donne

$$px = k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_p,$$

en même temps que

$$x = k_1 + \Delta_1 = k_2 + \Delta_2 = k_3 + \Delta_3 = \ldots = k_p + \Delta_p$$

donne

$$px = k_1 + k_2 + \ldots + k_p + \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_p;$$

ainsi, lorsque l'on a

$$v_1 = v_2 = v_3 = \ldots = x \quad \text{et} \quad h_1 = h_2 = h_3 = \ldots,$$

le système de corrections le plus plausible est celui qui donne

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \ldots = 0.$$

Ce système doit rendre aussi le risque d'erreur un minimum. Grâce à cette propriété, nous allons parvenir à établir l'expression analytique la plus générale du risque d'erreur.

A cet effet, bornons-nous d'abord au cas où les observations sont encore toutes d'égale précision, mais se rapportent à plusieurs inconnues ou fonctions d'inconnues. Le risque d'erreur d'un système de corrections $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots$, est alors (§ II) une fonction symétrique paire de ces corrections, croissant indéfiniment avec chacune d'elles et susceptible d'un minimum; il doit donc pouvoir être représenté par une série, suivant les puissances paires, positives et ascendantes des corrections, savoir, de la manière la plus générale :

$$\begin{aligned}
&A + B(\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \ldots) + C[\Delta_1^4 + \Delta_2^4 + \Delta_3^4 + \ldots + C'(\Delta_1^2\Delta_2^2 + \Delta_1^2\Delta_3^2 + \Delta_2^2\Delta_3^2 + \ldots)] \\
&\quad + D[\Delta_1^6 + \Delta_2^6 + \Delta_3^6 + \ldots) + D'(\Delta_1^4\Delta_2^2 + \Delta_1^4\Delta_3^2 + \Delta_2^4\Delta_1^2 + \ldots) + D''(\Delta_1^2\Delta_2^2\Delta_3^2 + \ldots)] + \ldots \\
&\quad + N\left\{\begin{aligned}
&\Delta_1^{2n} + \Delta_2^{2n} + \Delta_3^{2n} + \ldots + N'(\Delta_1^{2n-2}\Delta_2^2 + \Delta_1^{2n-2}\Delta_3^2 + \ldots) \\
&\quad + N''(\Delta_1^{2n-4}\Delta_2^4 + \Delta_1^{2n-4}\Delta_3^4 + \ldots) \\
&\quad + N''_1(\Delta_1^{2n-4}\Delta_2^2\Delta_3^2 + \Delta_1^{2n-4}\Delta_2^2\Delta_4^2 + \ldots) \\
&\quad + N'''(\Delta_1^{2n-6}\Delta_2^6 + \Delta_1^{2n-6}\Delta_3^6 + \ldots) + N'''_1(\Delta_1^{2n-6}\Delta_2^4\Delta_3^2 + \ldots) \\
&\quad + N'''_2(\Delta_1^{2n-6}\Delta_2^2\Delta_3^2\Delta_4^2 \ldots) + \ldots
\end{aligned}\right\} + \ldots
\end{aligned}$$

Examinons s'il ne doit pas y avoir pourtant quelque relation particulière entre les coefficients de ce développement, pour qu'il satisfasse à la condition exprimée ci-dessus, savoir, pour qu'il devienne un minimum par

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \ldots = 0,$$

quand

$$v_1 = v_2 = v_3 = \ldots = x \quad \text{ou} \quad k_1 + \Delta_1 = k_2 + \Delta_2 = k_3 + \Delta_3 = \ldots.$$

La condition du minimum est que la dérivée du polynôme par rapport à la variable devienne nulle; mais ici, en prenant pour variable Δ_1, on a

$$\Delta_2 = \Delta_1 + k_1 - k_2, \quad \Delta_3 = \Delta_1 + k_1 - k_3, \quad \text{etc.};$$

de sorte que les dérivées des autres corrections sont encore l'unité, comme celle de la variable. D'après cela, la dérivée du développement du risque d'erreur devient :

$$\begin{aligned}
2B(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \ldots) &+ C[4(\Delta_1^3 + \Delta_2^3 + \Delta_3^3 + \ldots) + 2C'(\Delta_1^2\Delta_2 + \Delta_1\Delta_2^2 + \Delta_1^2\Delta_3 + \ldots)] \\
&+ D[6(\Delta_1^5 + \Delta_2^5 + \Delta_3^5 + \ldots) + \ldots] + \ldots \\
&+ N\left\{\begin{aligned}
&2n(\Delta_1^{2n-1} + \Delta_2^{2n-1} + \Delta_3^{2n-1} + \ldots) \\
&+ 2N'(\Delta_1^{2n-2}\Delta_2 + \Delta_1^{2n-2}\Delta_3 + \ldots) \\
&+ (2n-2)N'(\Delta_1^{2n-3}\Delta_2^2 + \Delta_1^{2n-3}\Delta_3^2 + \ldots) \\
&+ 4N''(\Delta_1^{2n-4}\Delta_2^3 + \Delta_1^{2n-4}\Delta_3^3 + \ldots) \\
&+ (2n-4)N''(\Delta_1^{2n-5}\Delta_2^4 + \Delta_1^{2n-5}\Delta_3^4 + \ldots) \\
&+ 2N''_1(\Delta_1^{2n-4}\Delta_2\Delta_3^2 + \Delta_1^{2n-4}\Delta_2^2\Delta_3 + \ldots) \\
&+ (2n-4)N''_1(\Delta_1^{2n-5}\Delta_2^2\Delta_3^2 + \Delta_1^{2n-5}\Delta_2^2\Delta_4^2 + \ldots) \\
&+ 6N'''(\Delta_1^{2n-6}\Delta_2^5 + \Delta_1^{2n-6}\Delta_3^5 + \ldots) \\
&+ (2n-6)N'''(\Delta_1^{2n-7}\Delta_2^6 + \Delta_1^{2n-7}\Delta_3^6 + \ldots) \\
&+ 4N'''_1(\Delta_1^{2n-6}\Delta_2^3\Delta_3^2 + \ldots) \\
&+ (2n-6)N'''_1(\Delta_1^{2n-7}\Delta_2^4\Delta_3^2 + \ldots) \\
&+ 2N'''_1(\Delta_1^{2n-6}\Delta_2^4\Delta_3 + \ldots) + 2N'''_2(\Delta_1^{2n-6}\Delta_2\Delta_3^2\Delta_4^2 + \ldots) \\
&+ (2n-6)N'''_2(\Delta_1^{2n-7}\Delta_2^2\Delta_3^2\Delta_4^2 + \ldots) + \ldots
\end{aligned}\right\} + \ldots
\end{aligned}$$

Ce polynôme doit s'annuler quand on y fait

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \ldots = 0 \quad \text{ou} \quad \Delta_1 = -\Delta_2 - \Delta_3 - \ldots,$$

quels que soient d'ailleurs $k_1, k_2, k_3, \ldots$, et, par conséquent, $\Delta_2, \Delta_3, \ldots$; or, chaque accolade contient un ensemble de termes homogènes d'un degré particulier; la substitution ne peut donc pas amener de réduction entre les diverses accolades, et chacune doit disparaître séparément. Ainsi les coefficients B, C, D, ..., N restent indéterminés; mais nous examinerons s'il ne faut pas spécialiser les autres coefficients. A cet effet, considérons le terme du $(2n-1)^e$ degré, affecté de N; pour que l'hypothèse

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \ldots = 0$$

l'annule, il faut qu'il soit divisible par la somme des corrections. Or, si nous essayions cette division, nous trouverions un caractère de divisibilité purement algébrique (*voir* la note), savoir, qu'il faut

$$N' = n, \quad N'' = n\frac{(n-1)}{2}, \quad N''_1 = n(n-1), \quad N''' = n\frac{(n-1)}{2}\frac{(n-2)}{3},$$

$$N'''_1 = n\frac{(n-1)}{2}(n-2), \quad N'''_2 = n(n-1)(n-2), \quad \text{etc.}$$

Substituant ces valeurs dans le terme du $2n^{ième}$ degré du développement du risque d'erreur, ce terme devient

$$N\left\{\begin{array}{l} \Delta_1^{2n} + \Delta_2^{2n} + \Delta_3^{2n} + \ldots + n(\Delta_1^{2n-2}\Delta_2^2 + \Delta_1^{2n-2}\Delta_3^2 + \ldots) \\ \quad + n\frac{(n-1)}{2}[\Delta_1^{2n-4}(\Delta_2^4 + \Delta_3^4 + \ldots + 2\Delta_2^2\Delta_3^2 + \ldots) + \Delta_2^{2n-4}(\Delta_1^4 + \ldots) + \ldots] \\ \quad + n\frac{(n-1)}{2}\frac{(n-2)}{3}\left[\begin{array}{c}\Delta_1^{2n-6}(\Delta_2^6 + 3\Delta_2^4\Delta_3^2 + 3\Delta_2^2\Delta_3^4 + 6\Delta_2^2\Delta_3^2\Delta_4^2 + \ldots + \Delta_3^6 + \ldots) \\ + \Delta_2^{2n-6}(\Delta_1^6 + 3\Delta_1^4\Delta_3^2 + \ldots) + \ldots\end{array}\right] + \ldots \end{array}\right\};$$

c'est-à-dire, en le comparant au développement du binôme de Newton,

$$N(\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \ldots)^n.$$

Ce résultat transforme le développement du risque d'erreur en

$$A + B(\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \ldots) + C(\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \ldots)^2 + \ldots$$

ou

$$\Phi(\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \ldots).$$

D'abord nous reconnaissons à posteriori que cette expression satisfait toujours au cas particulier ci-dessus, pourvu que Φ soit une fonction continue, puisque la dérivée

$$\Phi'(\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \ldots) \times (2\Delta_1 + 2\Delta_2 + 2\Delta_3 + \ldots)$$

s'annule quand la somme des corrections égale o.

Ensuite nous remarquerons que, la fonction Φ devant être continue et croissante avec les variables, d'après la définition du risque d'erreur, elle croîtra et décroîtra en même temps que $(\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \ldots)$, et atteindra toujours son minimum pour les mêmes valeurs que cette somme de carrés; donc toutes les formes continues de

$$\Phi(\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \ldots)$$

sont aptes à représenter le risque d'erreur, et toutes donnent le même système de valeurs plausibles. Ainsi se trouve exprimé analytiquement le vague inhérent à la nature du problème proposé et à la définition du risque d'erreur, et nous voyons pourtant que ce vague ne nous empêche pas de résoudre le problème d'une manière certaine, en rendant un minimum l'expression très-simple $\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \ldots$: de là le nom de la *méthode des moindres carrés*, que l'on appellerait plus exactement *méthode de la moindre somme des carrés*.

§ IV.

Influence de la précision des observations.

Nous avons remarqué déjà que les observations peuvent être de *précisions* diverses, et que cette circonstance change le mode de compensation; il est temps de voir comment la précision intervient dans les calculs, et de lui assigner une signification mathématique.

Il est clair que, dans le cas d'observations directes, également bonnes, d'une même inconnue, la valeur obtenue pour celle-ci par la moyenne arithmétique mérite plus de confiance qu'aucune des valeurs d'observation, et qu'elle en mérite d'autant plus que le nombre des observations est plus grand. Prenant donc pour type un système d'observations de très-peu de précision, les valeurs compensées résultant de 2, 3, 4,..., observations auront des précisions croissantes et chacune peu différente de la précédente; nous pourrons ainsi comparer, sous le rapport de la précision, la valeur donnée par une bonne observation à celle résultant de la moyenne d'un certain nombre g d'observations du premier système : ce nombre g est appelé *poids* ou *importance* de l'observation unique.

D'après cela, si nous avons à compenser des observations de précisions, et, par conséquent, d'importances différentes, nous voyons déjà un moyen de les réduire à une série d'observations toutes de la précision du système pris pour type. En effet, g_1 étant le poids de l'observation $v_1 = k_1$, cette observation est équivalente, par définition, à g_1 observations types

$$v_1 = x_1, \quad v_1 = x_2, \ldots, v_1 = x_{g_1},$$

qui donneraient pour moyenne

$$\frac{1}{g_1}(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{g_1}) = k_1.$$

De cette façon, écrivant le risque d'erreur d'après le § III, on aurait, pour chaque observation réelle telle que $v_1 = k_1$, une somme de carrés de corrections de la forme

$$\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \ldots + \Delta_{g_1}^2 = (v_1 - x_1)^2 + (v_1 - x_2)^2 + \ldots + (v_1 - x_{g_1})^2,$$

qui devient

$$\begin{aligned} &g_1 v_1^2 - 2v_1(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{g_1}) + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_{g_1}^2 \\ &= g_1 v_1^2 - 2g_1 v_1 k_1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_{g_1}^2 \\ &= g_1(v_1 - k_1)^2 + (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{g_1}^2 - g_1 k_1^2). \end{aligned}$$

Puisqu'il faut rendre la somme des carrés des corrections un minimum, en disposant des quantités $v_1, v_2, v_3, \ldots$, nous voyons que les quantités

$$(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{g_1}^2 - g_1 k_1^2)$$

peuvent être négligées dans la solution; mais il y a plus, il faut les considérer comme nulles, ainsi que nous allons le faire voir de suite.

Nous voyons, en effet, que le risque d'erreur subit, par les variations de la correction $v_1 - k_1$, les mêmes variations que si l'on avait remplacé l'observation unique $v_1 - k_1$, de poids g_1, par une seule observation type telle que

$$v_1 \sqrt{g_1} = k_1 \sqrt{g_1};$$

il résulte de là que :

1°. L'augmentation du risque d'erreur provenant du terme

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_{g_1}^2 - g_1 k_1^2)$$

est due simplement à ce que nous avons substitué à une observation, qui n'implique aucune impossibilité en elle-même, g_1 observations qui sont en contradiction entre elles; afin que cette substitution soit légitime, il faut que la contradiction disparaisse, ou que les valeurs hypothétiques $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{g_1}$, soient toutes égales entre elles et à k_1, ce qui donne

$$(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{g_1}^2 - g_1 k_1^2) = 0.$$

2°. Une observation $v_1 = k_1$ de poids g_1 équivaut à une observation type

$$v_1 \sqrt{g_1} = k_1 \sqrt{g_1};$$

la correction $v_1 - k_1$ d'une observation de poids g_1 est donc $\sqrt{g_1}$ fois moindre que celle $v_1 \sqrt{g_1} - k_1 \sqrt{g_1}$ de l'observation type, et l'on peut dire que la précision est $\sqrt{g_1}$ fois plus grande.

Ainsi la *précision* d'une observation est proportionnelle à la racine carrée de son poids, et si nous prenons pour unité des précisions celle des observations types, nous aurons

$$h_1^2 = g_1.$$

Nous pouvons donc considérer la précision comme uniforme et égale à l'unité dans le problème général énoncé à la fin du § I, pourvu que nous substituions aux observations réelles des observations fictives de fonctions

$$v_1 \sqrt{g_1}, \quad v_2 \sqrt{g_2}, \quad v_3 \sqrt{g_3}, \ldots, \quad \text{ou} \quad h_1 v_1, \quad h_2 v_2, \quad h_3 v_3, \ldots,$$

qui auraient donné des valeurs $h_1 k_1, h_2 k_2, h_3 k_3, \ldots$; désignant alors par

$$\delta_1 = h_1 \Delta_1, \quad \delta_2 = h_2 \Delta_2, \quad \delta_3 = h_3 \Delta_3, \ldots,$$

les corrections à faire à ces nouvelles observations, tous les raisonnements des paragraphes précédents deviendront applicables, et le système des valeurs compensées sera celui qui donnera un minimum pour $\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \ldots + \delta_p^2$

C'est ici le lieu d'introduire une notion encore, qui nous sera utile plus tard. Représentons un instant par E l'erreur fortuite, variable, d'une observation; cette erreur étant due à la rencontre de certaines circonstances, se reproduira chaque fois que les mêmes causes se présenteront ensemble; d'après cela, si le nombre des combinaisons qui amènent l'erreur E est à celui de toutes les combinaisons également possibles comme $1 : \varpi$, nous devons présumer que, sur p observations, il y en aura $\frac{p}{\varpi}$ égales à E, et cette présomption sera d'autant plus fondée que le nombre p sera plus considérable; de la sorte, les sommes des erreurs des p observations, de leurs carrés, de leurs cubes, etc., seront

$$\sum\left(\frac{p}{\varpi}\mathrm{E}\right),\quad \sum\left(\frac{p}{\varpi}\mathrm{E}^2\right),\quad \sum\left(\frac{p}{\varpi}\mathrm{E}^3\right),\quad \text{etc.},$$

le signe $\sum$ s'étendant à toutes les valeurs correspondantes de E et de ϖ. Les moyennes des erreurs, de leurs carrés, de leurs cubes, etc., seront donc

$$\frac{1}{p}\sum\left(\frac{p}{\varpi}\mathrm{E}\right),\quad \frac{1}{p}\sum\left(\frac{p}{\varpi}\mathrm{E}^2\right),\quad \frac{1}{p}\sum\left(\frac{p}{\varpi}\mathrm{E}^3\right),\quad \text{etc.},$$

ou

$$\sum\left(\frac{\mathrm{E}}{\varpi}\right),\quad \sum\left(\frac{\mathrm{E}^2}{\varpi}\right),\quad \sum\left(\frac{\mathrm{E}^3}{\varpi}\right),\quad \text{etc.};$$

ces résultats n'approchant toutefois de la vérité qu'à mesure que p augmente, ainsi qu'il est dit plus haut. Ainsi, dans une série nombreuse d'observations, ces moyennes ne dépendent pas du nombre de celles-ci, mais seulement des erreurs E et des rapports ϖ, c'est-à-dire des moyens d'observation employés; ou bien encore, ces moyennes sont sensiblement constantes pour des observations d'égale origine, prises en nombre assez grand. Comme la forme de la fonction représentant le risque d'erreur nous conduit naturellement à la considération des carrés des erreurs, nous prendrons note particulièrement de la moyenne des carrés des erreurs d'une série nombreuse d'observations : on est convenu d'appeler *erreur moyenne*, l'erreur dont le carré est égal à la moyenne susdite.

Cela posé, nous prendrons, pour plus de simplicité, pour observations types, ou de poids et de précision $= 1$, celles dont l'erreur moyenne est une unité ($0'',01$ ou $0^{\mathrm{m}},0001$, ou toute autre unité que l'on voudra); mais une série d'observations de précision h_1 est équivalente à une série d'observations types donnant lieu à des erreurs h_1 fois plus grandes; la somme des carrés des erreurs du deuxième système sera donc h_1^2 fois la somme des carrés des erreurs du premier, et les moyennes de ces carrés seront dans le même rapport : il en résulte que l'erreur moyenne des observations de précision 1 est h_1 fois supérieure à celle des observations de précision h_1; cette dernière erreur moyenne est donc $\frac{1}{h_1}$, ou, représentant par m_1 l'erreur moyenne correspondante à une précision h_1,

$$m_1 = \frac{1}{h_1}, \quad m_1 h_1 = 1.$$

§ V.

Calcul des valeurs les plus plausibles des inconnues.

Les valeurs les plus plausibles des inconnues doivent satisfaire, d'après ce qui précède, à l'équation

$$\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \ldots = \text{min.};$$

dans cette équation, à vrai dire, entrent les précisions h_1, h_2, $h_3, \ldots$, que nous n'avons encore aucun moyen d'évaluer; mais nous les considérerons comme connues dans ce paragraphe, et, par suite, nos calculs seront au moins directement applicables au cas où $h_1 = h_2 = h_3 =$ etc., permet de faire abstraction de la précision : ils seront applicables au cas général, du moment que nous saurons mesurer les précisions.

Nous avons p équations de la forme

$$\delta = h\Delta = hv - hk = hf(x, y, z, \ldots) - hk,$$

et i de la forme

$$0 = F(x, y, z, \ldots).$$

Lorsque ces équations ne sont pas linéaires, les calculs auxquels elles donnent lieu deviennent impraticables; on doit les transformer comme il suit : dans les i équations nécessaires

$$0 = F(x, y, z, \ldots),$$

que nous désignerons abréviativement par

$$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_i,$$

et dans $q - i$ des équations approchées

$$f(x, y, z, \ldots) = k,$$

on détermine pour $x, y, z, \ldots$, des valeurs approchées $x_1, y_1, z_1, \ldots$; de sorte que l'on a

$$x = x_1 + x_2, \quad y = y_1 + y_2, \quad z = z_1 + z_2, \quad \text{etc.},$$

x_2, y_2, z_2 étant des différences inconnues, mais petites. Le théorème de Taylor donne maintenant, en négligeant les carrés de ces différences, et en représentant par $f'_x, f'_y, f'_z, \ldots$, les dérivées de la fonction f par rapport à $x, y, z, \ldots$,

$$\delta = hf(x_1, y_1, z_1, \ldots) - hk + hf'_x(x_1, y_1, z_1, \ldots)x_2$$
$$+ hf'_y(x_1, y_1, z_1, \ldots)y_2 + hf'_z(x_1, y_1, z_1, \ldots)z_2 + \ldots;$$

cette expression peut être écrite sous la forme

$$\delta = n + ax_2 + by_2 + cz_2 + \ldots.$$

Les équations nécessaires peuvent de même être ramenées à la forme linéaire. Il en résulte qu'en abandonnant les inconnues primitives pour d'autres dont elles dépendent immédiatement et d'une manière connue, on peut toujours n'avoir à faire qu'à des équations linéaires. De plus, si la suite des calculs donnait, pour les différences x_2, y_2, z_2, des valeurs assez grandes pour que l'on pût regarder l'omission de leurs carrés comme nuisible à l'exactitude requise, on reprendrait les calculs en mettant pour $x, y, z, \ldots,$

$$x_1 + x_2 + x_3, \quad y_1 + y_2 + y_3, \quad z_1 + z_2 + z_3, \ldots,$$

et cette fois on serait certain d'avance que les valeurs de x_3, y_3, z_3 sont très-petites.

Nous n'avons donc jamais qu'à traiter un système de la forme

$$\begin{aligned}
&\delta_1 = n_1 + a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots,\\
&\delta_2 = n_2 + a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\delta_p = n_p + a_p x + b_p y + c_p z + \ldots,\\
&0 = \theta_1 = \mathrm{N}_1 + \mathrm{A}_1 x + \mathrm{B}_1 y + \mathrm{C}_1 z + \ldots,\\
&0 = \theta_2 = \mathrm{N}_2 + \mathrm{A}_2 x + \mathrm{B}_2 y + \mathrm{C}_2 z + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&0 = \theta_i = \mathrm{N}_i + \mathrm{A}_i x + \mathrm{B}_i y + \mathrm{C}_i z + \ldots,\\
&\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \ldots + \delta_p^2 = \text{minimum}.
\end{aligned}$$

Commençons par développer $\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \ldots$, en substituant pour $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots,$ leurs valeurs. Nous avons pour coefficient de x^2, dans la somme des carrés des corrections,

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots a_p^2;$$

pour coefficient de xy,

$$2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \ldots a_p b_p).$$

Afin de réduire ces développements, nous admettons la notation généralement en usage chez les auteurs allemands pour désigner une somme de termes analogues. D'après cette notation, (aa) représente la somme des produits aa depuis le premier $a_1 a_1$ jusqu'au dernier $a_p a_p$; (ab) est la somme des produits ab depuis le premier $a_1 b_1$ jusqu'au dernier $a_p b_p$; et ainsi de suite. De même, $(\delta\delta)$ est la somme des carrés des corrections; $(a\delta)$ est la somme des produits de chaque correction par le coefficient de x dans cette correction, etc. Le développement susdit devient maintenant

$$\begin{aligned}(\delta\delta) = (nn) + 2(an)x + (aa)x^2 + 2(bn)y + 2(ab)xy + (bb)y^2 + 2(cn)z\\ + 2(ac)xz + 2(bc)yz + (cc)z^2 + \ldots.\end{aligned}$$

Il faut rechercher les valeurs des q inconnues qui rendent $(\partial\partial)$ un minimum, tout en satisfaisant aux i équations $\theta = 0$; nous pouvons donc poser encore $q - i$ équations entre les inconnues pour arriver au minimum; mais la forme de $(\partial\partial)$ permet de déterminer celui-ci aisément, en séparant ce développement en une somme de q carrés (à cause des q carrés $x^2, y^2, z^2, \ldots$), plus un terme constant; dès lors le minimum est atteint évidemment, si les q termes variables et additifs de $(\partial\partial)$ peuvent s'annuler séparément. Or, nous ne pouvons disposer que de $q - i$ inconnues; il faut donc faire entrer dans les q carrés i constantes arbitraires $K_1, K_2, K_3, \ldots, K_i$, que nous déterminerons de façon à rendre les q conditions de nullité compatibles : ces constantes, entrant dans les carrés, seront multipliées dans le développement de $(\partial\partial)$ par les premières puissances des inconnues. Afin que ces termes nouveaux, contenant les inconnues, n'altèrent pas la valeur de $(\partial\partial)$, nous multiplierons respectivement θ_1 par K_1, θ_2 par K_2, θ_3 par K_3, etc.; et alors, comme

$$\theta_1 K_1 = 0, \quad \theta_2 K_2 = 0, \quad \theta_3 K_3 = 0, \ldots,$$

la somme des i produits est

$$(\theta K) = 0,$$

et nous pourrons écrire

$$(\partial\partial) = (\partial\partial) + (\theta K).$$

Ainsi, nous ajouterons au développement précédent de $(\partial\partial)$, et sans changer ses *valeurs possibles*, les termes

$$(NK) + (AK)x + (BK)y + (CK)z + \ldots.$$

Cela posé, effectuons la séparation de $(\partial\partial) + (\theta K)$ en carrés. Réunissant d'abord tous les termes en x, savoir :

$$(AK)x + 2(an)x + (aa)x^2 + 2(ab)xy + 2(ac)xz + 2(ad)xu + \ldots,$$

nous voyons qu'ils appartiennent au développement du carré de

$$\frac{1}{\sqrt{(aa)}}\left[\frac{1}{2}(AK) + (an) + (aa)x + (ab)y + (ac)z + (ad)u + \ldots\right],$$

ou

$$\frac{1}{\sqrt{(aa)}}\left[\frac{1}{2}(AK) + (a\partial)\right],$$

et qu'il manque, pour compléter le carré, les termes

$$\frac{1}{(aa)}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{4}(AK)^2 + (AK)(an) + (an)^2 + (AK)(ab)y + 2(an)(ab)y + (ab)^2y^2 \\ \qquad + (AK)(ac)z + 2(an)(ac)z + 2(ab)(ac)yz + (ac)^2z^2 \\ \qquad + (AK)(ad)u + 2(an)(ad)u + 2(ab)(ad)yu + 2(ac)(ad)zu \\ \qquad + (ad)^2u^2 + \ldots\end{array}\right\}.$$

Nous pouvons donc écrire

$$
\begin{aligned}
(\delta\delta) + (\theta\mathrm{K}) = {} & \left[\frac{\frac{1}{2}(\mathrm{AK}) + (a\delta)}{\sqrt{(aa)}}\right]^2 + (\mathrm{NK}) - \frac{(\mathrm{AK})^2}{4(aa)} - \frac{(\mathrm{AK})(an)}{(aa)} + (nn) - \frac{(an)^2}{(aa)} \\
& + \left[(\mathrm{BK}) - \frac{(ab)}{(aa)}(\mathrm{AK})\right] y + 2\left[(bn) - \frac{(ab)}{(aa)}(an)\right] y + \left[(bb) - \frac{(ab)^2}{(aa)}\right] y^2 \\
& + \left[(\mathrm{CK}) - \frac{(ac)}{(aa)}(\mathrm{AK})\right] z + 2\left[(cn) - \frac{(ac)}{(aa)}(an)\right] z + 2\left[(bc) - \frac{(ab)(ac)}{(aa)}\right] yz \\
& + \left[(cc) - \frac{(ac)^2}{(aa)}\right] z^2 + \left[(\mathrm{DK}) - \frac{(ad)}{(aa)}(\mathrm{AK})\right] u + 2\left[(dn) - \frac{(ad)}{(aa)}(an)\right] u \\
& + 2\left[(bd) - \frac{(ab)(ad)}{(aa)}\right] yu + 2\left[(cd) - \frac{(ac)(ad)}{(aa)}\right] zu \\
& + \left[(dd) - \frac{(ad)^2}{(aa)}\right] u^2 + \ldots.
\end{aligned}
$$

Ce développement s'abrége considérablement si nous étudions la valeur des coefficients tels que

$$
(nn) - \frac{(an)^2}{(aa)}, \quad (bn) - \frac{(ab)}{(aa)}(an),
$$

$$
(bb) - \frac{(ab)^2}{(aa)}, \quad (cn) - \frac{(ac)}{(aa)}(an), \quad (bc) - \frac{(ab)(ac)}{(aa)}, \quad \text{etc.};
$$

le premier se transforme comme suit :

$$
\begin{aligned}
& (nn) - \frac{(an)^2}{(aa)} \\
& = \frac{(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + \ldots)(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots) - (a_1 n_1 + a_2 n_2 + a_3 n_3 + \ldots)^2}{(aa)} \\
& = \frac{\left(\begin{array}{l} \overline{a_1^2 n_1^2} + a_1^2 n_2^2 + a_1^2 n_3^2 + \ldots + a_2^2 n_1^2 + \overline{a_2^2 n_2^2} + a_2^2 n_3^2 + \ldots + a_3^2 n_1^2 + a_3^2 n_2^2 + \overline{a_3^2 n_3^2} + \ldots \\ \qquad - \overline{a_1^2 n_1^2} - 2 a_1 a_2 n_1 n_2 - \overline{a_2^2 n_2^2} - 2 a_1 a_3 n_1 n_3 - 2 a_2 a_3 n_2 n_3 - \overline{a_3^2 n_3^2} - \ldots \end{array}\right)}{(aa)} \\
& = \frac{(a_1 n_2 - a_2 n_1)^2 + (a_1 n_3 - a_3 n_1)^2 + (a_2 n_3 - a_3 n_2)^2 + \ldots}{(aa)},
\end{aligned}
$$

et le second devient

$$
\begin{aligned}
& (bn) - \frac{(ab)}{(aa)}(an) \\
& = \frac{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots)(b_1 n_1 + b_2 n_2 + b_3 n_3 + \ldots) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \ldots)(a_1 n_1 + a_2 n_2 + a_3 n_3 + \ldots)}{(aa)} \\
& = \frac{\left(\begin{array}{l} \overline{a_1^2 b_1 n_1} + a_1^2 b_2 n_2 + a_1^2 b_3 n_3 + \ldots + a_2^2 b_1 n_1 + \overline{a_2^2 b_2 n_2} + a_2^2 b_3 n_3 + \ldots + a_3^2 b_1 n_1 + a_3^2 b_2 n_2 + \overline{a_3^2 b_3 n_3} + \ldots - \overline{a_1^2 b_1 n_1} \\ - a_1 a_2 b_1 n_2 - a_1 a_3 b_1 n_3 - \ldots - a_1 a_2 b_2 n_1 - \overline{a_2^2 b_2 n_2} - a_2 a_3 b_2 n_3 - \ldots - a_1 a_3 b_3 n_1 - a_2 a_3 b_3 n_2 - \overline{a_3^2 b_3 n_3} - \ldots \end{array}\right)}{(aa)} \\
& = \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)(a_1 n_2 - a_2 n_1) + (a_1 b_3 - a_3 b_1)(a_1 n_3 - a_3 n_1) + (a_2 b_3 - a_3 b_2)(a_2 n_3 - a_3 n_2) + \ldots}{(aa)};
\end{aligned}
$$

de même, on a

$$(bb) - \frac{(ab)^2}{(aa)} = \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + \ldots}{(aa)},$$

$$(cn) - \frac{(ac)}{(aa)}(an)$$

$$= \frac{(a_1 c_2 - a_2 c_1)(a_1 n_2 - a_2 n_1) + (a_1 c_3 - a_3 c_1)(a_1 n_3 - a_3 n_1) + (a_2 c_3 - a_3 c_2)(a_2 n_3 - a_3 n_2) + \ldots}{(aa)}.$$

Il survient donc une grande simplification si nous posons

$$\frac{a_1 n_2 - a_2 n_1}{\sqrt{(aa)}} = n'_1, \quad \frac{a_1 n_3 - a_3 n_1}{\sqrt{(aa)}} = n'_2, \quad \frac{a_2 n_3 - a_3 n_2}{\sqrt{(aa)}} = n'_3, \ldots,$$

$$\frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{\sqrt{(aa)}} = b'_1, \quad \frac{a_1 b_3 - a_3 b_1}{\sqrt{(aa)}} = b'_2, \quad \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{\sqrt{(aa)}} = b'_3, \ldots,$$

$$\frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{\sqrt{(aa)}} = c'_1, \quad \frac{a_1 c_3 - a_3 c_1}{\sqrt{(aa)}} = c'_2, \quad \frac{a_2 c_3 - a_3 c_2}{\sqrt{(aa)}} = c'_3, \ldots;$$

car nous avons alors

$$(nn) - \frac{(an)^2}{(aa)} = n'^2_1 + n'^2_2 + n'^2_3 + \ldots = (n'n'),$$

$$(bn) - \frac{(ab)}{(aa)}(an) = (b'n'), \quad (bb) - \frac{(ab)^2}{(aa)} = (b'b'),$$

$$(cn) - \frac{(ac)}{(aa)}(an) = (c'n'), \quad \text{etc.}$$

Représentons encore par des abréviations les expressions suivantes, savoir :

$$\frac{\frac{1}{2}(\mathrm{AK}) + (a\delta)}{\sqrt{(aa)}} = \alpha, \quad (\mathrm{NK}) - \frac{(an)}{(aa)}(\mathrm{AK}) - \frac{(\mathrm{AK})^2}{4(aa)} = \mathrm{N}',$$

$$(\mathrm{BK}) - \frac{(ab)}{(aa)}(\mathrm{AK}) = \mathrm{B}', \quad (\mathrm{CK}) - \frac{(ac)}{(aa)}(\mathrm{AK}) = \mathrm{C}', \quad (\mathrm{DK}) - \frac{(ad)}{(aa)}(\mathrm{AK}) = \mathrm{D}', \ldots;$$

et il vient enfin

$$\begin{aligned}(\delta\delta) + (\theta\mathrm{K}) = \alpha^2 &+ \mathrm{N}' + (n'n') + \mathrm{B}'y + 2(b'n')y + (b'b')y^2 \\ &+ \mathrm{C}'z + 2(c'n')z + 2(b'c')yz + (c'c')z^2 + \mathrm{D}'u + 2(d'n')u \\ &+ 2(b'd')yu + 2(c'd')zu + (d'd')u^2 + \ldots.\end{aligned}$$

Or ce développement, à part α^2, est exactement analogue au développement primitif de $(\delta\delta)+(\theta K)$; posons donc, semblablement à ce qui a été fait plus haut,

$$\begin{gathered}
\delta'_1 = n'_1 + b'_1 y + c'_1 z + d'_1 u + \ldots,\\
\delta'_2 = n'_2 + b'_2 y + c'_2 z + d'_2 u + \ldots,\\
\delta'_3 = n'_3 + b'_3 y + c'_3 z + d'_3 u + \ldots,\\
\frac{b'_1 n'_2 - b'_2 n'_1}{\sqrt{(b'b')}} = n''_1, \quad \frac{b'_1 n'_3 - b'_3 n'_1}{\sqrt{(b'b')}} = n''_2,\\
\frac{b'_1 c'_2 - b'_2 c'_1}{\sqrt{(b'b')}} = c''_1, \quad \frac{b'_1 c'_3 - b'_3 c'_1}{\sqrt{(b'b')}} = c''_2,\\
\frac{b'_1 d'_2 - b'_2 d'_1}{\sqrt{(b'b')}} = d''_1, \quad \frac{b'_1 d'_3 - b'_3 d'_1}{\sqrt{(b'b')}} = d''_2,\\
\frac{\frac{1}{2}B' + (b'\delta')}{\sqrt{(b'b')}} = \beta', \quad N' - \frac{(b'n')}{(b'b')}B' - \frac{B'^2}{4(b'b')} = N'',\\
C' - \frac{(b'c')}{(b'b')}B' = C'', \quad D' - \frac{(b'd')}{(b'b')}B' = D'', \ \ldots,
\end{gathered}$$

et nous avons

$$\begin{aligned}
(\delta\delta)+(\theta K) &= \alpha^2 + (\delta'\delta') + N' + B'y + C'z + D'u + \ldots\\
&= \alpha^2 + \beta'^2 + (\delta''\delta'') + N'' + C''z + D''u + \ldots.
\end{aligned}$$

En continuant ces transformations, nous verrions nécessairement encore disparaître une nouvelle inconnue à la séparation de chaque nouveau carré γ''^2, $\vartheta'''^2, \ldots$, analogue à α^2 et à β'^2; de façon qu'après le $q^{ième}$ carré, toutes les inconnues seraient épuisées; il ne resterait que $[\delta^{(q)}\delta^{(q)}] + N^{(q)}$, et la parenthèse $[\delta^{(q)}\delta^{(q)}]$ se réduirait elle-même à $[n^{(q)}n^{(q)}]$. Si donc nous nous bornons ici au cas de cinq inconnues, pour ne pas trop compliquer les notations, nous pouvons écrire

$$(\delta\delta)+(\theta K) = \alpha^2 + \beta'^2 + \gamma''^2 + \vartheta'''^2 + \varepsilon^{\text{IV}2} + (n^{\text{V}}n^{\text{V}}) + N^{\text{V}}.$$

Observons maintenant que le développement de $(\delta\delta)+(\theta K)$ est égal à $(\delta\delta)$ pour tous les *systèmes possibles* de valeurs de $x, y, z, \ldots$, quelques valeurs constantes arbitraires que nous adoptions pour $K_1, K_2, K_3, \ldots$, et que tous les termes α^2, β'^2, $\gamma''^2, \ldots$, ayant pour numérateurs des carrés et pour dénominateurs des sommes de carrés (aa), $(b'b')$, $(c''c''), \ldots$, sont essentiellement additifs; il en résulte que, pour tous les systèmes de valeurs de K, le minimum de $(\delta\delta)$ ou $(\delta\delta)+(\theta K)$ sera le même et correspondra à la moindre valeur de

$$\alpha^2 + \beta'^2 + \gamma''^2 + \vartheta'''^2 + \varepsilon^{\text{IV}2},$$

et que, s'il est un système de valeurs de K qui permette d'avoir

$$\alpha^2 + \beta'^2 + \gamma''^2 + \vartheta'''^2 + \varepsilon^{\text{IV}2} = 0,$$

ce seront les valeurs de x, y, z, u, t, satisfaisant à cette équation, qui donneront le minimum pour $(\delta\delta)$. Mais cette équation se décompose nécessairement en q autres; de sorte que les valeurs les plus plausibles de x, y, z, u, t devront satisfaire à q équations de condition

$$\alpha = 0, \quad \beta' = 0, \quad \gamma'' = 0, \quad \vartheta''' = 0, \quad \varepsilon^{\text{IV}} = 0.$$

Reste à voir si ces valeurs sont possibles, c'est-à-dire si elles vérifient les équations $\theta = 0$; mais puisque nous pouvons disposer de q inconnues x, y, z,..., et de i arbitraires K_1, K_2, K_3 pour satisfaire les q équations de condition et les i équations nécessaires, le problème est généralement soluble et déterminé. Ajoutons que $(n^{\text{v}}n^{\text{v}})$ est positif et invariable; ainsi l'hypothèse possible de

$$K_1 = K_2 = K_3 = \ldots = 0,$$

donnant

$$(NK) = 0, \quad (AK) = 0, \quad (BK) = 0, \quad (CK) = 0, \ldots,$$
$$N' = 0, \quad B' = 0, \quad C' = 0, \ldots, \quad N'' = 0, \quad C'' = 0, \ldots, \quad N^{\text{v}} = 0,$$

montre que le minimum de $(\delta\delta)$ est plus grand que $(n^{\text{v}}n^{\text{v}})$; par conséquent, pour les valeurs de x, y, z, u, t, K_1, K_2, K_3,..., qui font

$$\alpha = \beta' = \gamma'' = \vartheta''' = \varepsilon^{\text{IV}} = 0,$$

N^{v} est nécessairement positif; si cela n'était pas, la disparition des carrés pourrait ne pas correspondre au minimum absolu de $(\delta\delta) + (\theta K)$.

Pour arriver à la solution des $q + i$ équations, remarquons que les expressions α, β', γ'', ϑ''', ε^{IV} contiennent, outre les arbitraires K_1, K_2, K_3,..., la première, les inconnues x, y, z, u, t; la deuxième, y, z, u, t seulement; la troisième, z, u, t; la quatrième, u, t; la cinquième, t; de plus, elles sont linéaires. On trouve donc immédiatement, par $\varepsilon^{\text{IV}} = 0$, t en fonction des arbitraires; puis u par $\vartheta''' = 0$ et par la substitution de t; z par $\gamma'' = 0$ et par la substitution de t et de u; y et x de même. Mettant ces valeurs dans les équations linéaires $\theta = 0$, il vient i équations linéaires entre les i arbitraires. Les Allemands appellent les arbitraires *corrélats* (korrelaten), et les i dernières équations, *équations aux corrélats;* les arbitraires sont aisément calculées en nombres dans ces équations, et leur substitution dans les expressions de x, y, z, u, t donne enfin les valeurs les plus plausibles des inconnues.

Examinons encore, pour terminer ce paragraphe, si cette série de calculs indiqués peut échouer devant une impossibilité, soit absurdité, soit indétermination.

Dans la première partie des calculs, savoir la séparation de $(\delta\delta)$ en carrés, on ne peut être arrêté que parce que l'une des expressions n'_1, n'_2, n'_3,..., b'_1, b'_2, b'_3,..., c'_1, c'_2, c'_3,..., α, N''_1, B'_1, C'_1,..., n''_1, n''_2,..., c''_1, c''_2,..., N'', C'', D'',..., devient infinie ou indéterminée; ce qui exige, en tous cas,

$$(aa) = 0, \quad \text{ou} \quad (b'b') = 0, \quad \text{ou} \quad (c''c'') = 0, \quad \text{etc.};$$

c'est-à-dire, à la fois,

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 0, \ldots, \quad \text{ou} \quad b'_1 = 0, \quad b'_2 = 0, \quad b'_3 = 0, \ldots,$$

ou

$$c''_1 = c''_2 = c''_3 = 0, \ldots.$$

1°.
$$a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

suppose que les observations sont indépendantes de x; alors x est une inconnue en dehors des observations, qui doit être éliminée entre les équations $\theta = 0$: ce premier cas ne peut donc se présenter.

2°.
$$b'_1 = b'_2 = b'_3 = 0$$

ou

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = a_1 b_3 - a_3 b_1 = \ldots = 0$$

donne

$$a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = a_3 : b_3 = \text{etc.},$$

et fait disparaître simultanément dans $(\delta\delta)$, lors de la séparation du carré α^2, tous les termes en y, sauf $B'y$; passant immédiatement à la séparation du carré en z, t, u, l'impossibilité est évitée, et il vient

$$(\delta\delta) = \alpha^2 + B'y + \gamma''^2 + \vartheta'''^2 + \varepsilon^{\text{IV}} + (n^{\text{v}} n^{\text{v}}) + N^{\text{v}}.$$

Disposant alors d'une des arbitraires pour faire $B' = 0$, il ne reste que $q - 1$ équations de condition et i équations nécessaires pour déterminer q inconnues et $i - 1$ arbitraires; ainsi le problème est encore soluble, et, du reste,

$$\alpha = 0, \quad \gamma'' = 0, \quad \vartheta''' = 0, \quad \varepsilon^{\text{IV}} = 0$$

donneront bien le minimum de

$$(\delta\delta) = \alpha^2 + \gamma''^2 + \vartheta'''^2 + \varepsilon^{\text{IV}2} + (n^{\text{v}} n^{\text{v}}) + N^{\text{v}}.$$

Si pourtant il n'y avait pas d'équation nécessaire, il n'y aurait pas d'arbitraires, et il viendrait simplement

$$(\delta\delta) = \alpha^2 + \gamma''^2 + \vartheta'''^2 + \varepsilon^{\text{IV}} + (n^{\text{v}} n^{\text{v}}),$$

ce qui exigerait, pour le minimum,

$$\alpha = 0, \quad \gamma'' = 0, \quad \vartheta''' = 0, \quad \varepsilon^{\text{IV}} = 0;$$

ainsi on trouverait t, puis u, puis z; mais l'équation pour déterminer y manquerait, et l'on aurait, par $\alpha = 0$, x en fonction de y indéterminé. Cela prouverait que les observations faites ne peuvent pas déterminer x et y; en effet, comme

$$a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = a_3 : b_3 = \text{etc.},$$

on ne pourrait même obtenir des valeurs approchées pour ces inconnues au moyen des équations approchées, car, dans l'élimination, x et y disparaîtraient toujours ensemble.

3°.
$$c''_1 = c''_2 = c''_3 = \ldots = 0$$

change les équations de condition en
$$\alpha = 0, \quad \beta' = 0, \quad C'' = 0, \quad \vartheta''' = 0, \quad \varepsilon^{\text{IV}} = 0$$

sans amener d'impossibilité. Ce cas est entièrement analogue au précédent; il donne
$$b'_1 : c'_1 = b'_2 : c'_2 = b'_3 : c'_3 = \ldots;$$

ou, en désignant par λ ce rapport constant,
$$b'_1 = c'_1 \lambda, \quad b'_2 = \lambda c'_2, \quad \text{etc.}$$

La substitution des valeurs de b'_1, c'_1, b'_2, $c'_2, \ldots$, dans ces équations donne
$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = a_1 \lambda c_2 - a_2 \lambda c_1, \quad a_1 b_3 - a_3 b_1 = a_1 \lambda c_3 - a_3 \lambda c_1, \quad \text{etc.},$$
ou
$$a_1 (b_2 - \lambda c_2) = a_2 (b_1 - \lambda c_1), \quad a_1 (b_3 - \lambda c_3) = a_3 (b_1 - \lambda c_1), \quad \text{etc.},$$
ou encore
$$a_1 : (b_1 - \lambda c_1) = a_2 : (b_2 - \lambda c_2) = a_3 : (b_3 - \lambda c_3) = \ldots;$$
soit
$$a_1 : (b_1 - \lambda c_1) = \mu,$$
d'où
$$a_1 = \mu b_1 - \lambda \mu c_1, \quad \delta_1 = b_1 (y + \mu x) + c_1 (z - \lambda \mu x) + d_1 u + \ldots,$$
$$\delta_2 = b_2 (y + \mu x) + c_2 (z - \lambda \mu x) + d_2 u + \ldots.$$

Cette forme d'équations montre à l'évidence qu'elles ne peuvent servir qu'à la détermination des inconnues composées $y + \mu x$, $z - \lambda \mu x$, u, $t, \ldots$, et, par conséquent, que x, y, z resteront indéterminées numériquement.

Il résulte de tout cela que si ce cas présente, comme le précédent, une indétermination lorsqu'il n'y a pas d'équations nécessaires, c'est à cause de certaines relations entre les coefficients de δ_1, δ_2, $\delta_3, \ldots$, relations qui mettent un obstacle analogue à la détermination approchée des inconnues.

Il est inutile de pousser plus loin cette discussion, pour prouver que la méthode ne peut être en défaut que lorsque les observations sont essentiellement insuffisantes.

La deuxième partie des calculs, c'est-à-dire la résolution des équations aux corrélats, est évidemment possible quand les équations nécessaires sont compatibles : ces deux systèmes d'équations sont au fond identiques, à cause de l'intime liaison des valeurs des inconnues et de celles des corrélats, qui peuvent s'exprimer les unes par les autres en fonctions linéaires.

§ VI.

Calcul des précisions.

En commençant ce paragraphe, rappelons que le § II suppose explicitement que les valeurs données par l'observation, ou plutôt les erreurs de ces valeurs, sont indépendantes; c'est-à-dire que si, à la vérité, les valeurs exactes sont liées entre elles par leurs expressions en fonction d'un nombre restreint d'inconnues, les valeurs approchées n'ont cependant pas été déduites les unes des autres, mais bien déterminées isolément et successivement. D'après cela, si nous possédons un système de valeurs approchées pour certaines quantités, il ne peut être assimilé à un système d'observations que pour autant que ces valeurs n'aient pas été déduites les unes des autres.

Les équations de condition

$$\alpha = 0, \quad \beta' = 0, \quad \gamma'' = 0, \ldots,$$

sont la transformation ou la réalisation de la condition du minimum, et doivent exister simultanément, chacune contribuant d'ailleurs séparément à cette réalisation et devant être satisfaite au même titre que les autres; ces q équations peuvent donc être considérées comme résultant d'un système d'observations indépendantes de α, β', γ'', ... Or, le risque d'erreur d'un système quelconque de corrections possibles faites aux observations réelles est

$$\Phi(\delta\delta) = \Phi[\alpha^2 + \beta'^2 + \gamma''^2 + \ldots + (n^{\mathrm{v}} n^{\mathrm{v}}) + \mathrm{N}^{\mathrm{v}}];$$

ce risque d'erreur est le même que celui d'un système de corrections faites à q observations

$$\alpha = 0, \quad \beta' = 0, \quad \gamma'' = 0, \ldots,$$

et à $p - q$ autres observations

$$w_1 = 0, \quad w_2 = 0, \quad w_3 = 0, \ldots,$$

toutes de précision $= 1$, pourvu que

$$(ww) = (n^{\mathrm{v}} n^{\mathrm{v}}) + \mathrm{N}^{\mathrm{v}}.$$

Les deux systèmes de p observations sont donc équivalents, et de là nous tirons les deux conclusions suivantes :

1°. Les valeurs

$$\alpha = 0, \quad \beta' = 0, \quad \gamma'' = 0, \ldots,$$

qui nous sont données indépendamment l'une de l'autre par le système d'observations proposé

$$v_1 = k_1, \quad v_2 = k_2, \quad v_3 = k_3, \ldots,$$

sont déterminées de la même façon que par des observations de précision $= 1$.

2°. Le système fictif d'observations de α, β', γ'', ..., n'est pas complétement identique avec le système proposé, à cause du moindre nombre d'observations qu'il contient ou de la différence de p et q. Il donne lieu à une différence dans le risque d'erreur, différence qui devient constante quand il n'y a pas d'équation nécessaire, c'est-à-dire quand i des inconnues ont été originairement éliminées; car alors il n'y a pas de corrélats, et nous avons

$$\mathrm{N}^{\mathrm{v}} = 0.$$

Comme nous avons, dans ce cas,

$$\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \ldots + \delta_p^2 = \alpha^2 + \beta'^2 + \gamma''^2 + \ldots + (n^{\mathrm{v}} n^{\mathrm{v}}),$$

quelles que soient les valeurs mises pour $x, y, z, \ldots$, il en résulte que si nous pouvions donner aux inconnues leurs valeurs vraies, $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_p, \alpha, \beta', \gamma'', \ldots$, deviendraient les erreurs vraies des valeurs o, o, o,..., o, o, o, o,..., déterminées pour toutes ces fonctions avec une précision uniforme $= 1$; la moyenne des carrés de ces erreurs vraies serait donc sensiblement $= 1$ (§ IV); de sorte que

$$(\delta\delta) = p, \quad \alpha^2 + \beta'^2 + \gamma''^2 + \ldots = q - i$$

(l'élimination de i des inconnues a réduit leur nombre et celui des fonctions $\alpha, \beta', \gamma'', \ldots$, à $q - i$). Or la somme $(n^{\text{v}} n^{\text{v}})$ est constante, et par suite, quoique nous ne puissions jamais découvrir les valeurs vraies des inconnues, nous n'en voyons pas moins que nous devons toujours avoir

$$(n^{\text{v}} n^{\text{v}}) = p - q + i;$$

$(n^{\text{v}} n^{\text{v}})$ est d'ailleurs la valeur minimum de $(\delta\delta)$ ou ce que devient cette somme après la substitution, pour les inconnues, de leurs valeurs les plus plausibles.

D'après cette deuxième conclusion, nous voyons que si nous faisons une série de p observations de précision uniforme $= h$, nous pouvons d'abord trouver les valeurs les plus plausibles des inconnues, conformément au premier alinéa du § V; ensuite, désignant par $\Delta'_1, \delta'_1, \Delta'_2, \delta'_2, \Delta'_3, \delta'_3, \ldots$, les résultats de la substitution de ces valeurs dans $\Delta_1, \delta_1, \Delta_2, \delta_2, \Delta_3, \delta_3, \ldots$, nous avons

$$(\delta' \delta') = h^2 (\Delta' \Delta') = p - q + i;$$

de là nous déduisons

$$h = \sqrt{\frac{p - q + i}{(\Delta' \Delta')}} \quad \text{et} \quad m = \frac{1}{h} = \sqrt{\frac{(\Delta' \Delta')}{p - q + i}},$$

formules qui donnent le moyen de calculer la précision et l'erreur moyenne d'un système d'observations également bonnes.

Ainsi, en traitant séparément chaque série d'observations d'égale précision, nous pouvons connaître tous les coefficients $h_1, h_2, h_3, \ldots$, entrant dans $(\delta\delta)$, ce qui rend possible la résolution du problème général de la compensation. Il reste à déterminer enfin les précisions des résultats de cette compensation.

A cet effet, observons que la première des deux conclusions ci-dessus nous apprend que les valeurs

$$\alpha = 0, \quad \beta' = 0, \quad \gamma'' = 0, \quad \text{etc.},$$

ont une précision $= 1$, et peuvent être considérées comme indépendantes les unes des autres; d'autre part, nous avons (§ V)

$$\varepsilon^{\text{IV}} = \frac{\frac{1}{2} \mathrm{E}^{\text{IV}} + (e^{\text{IV}} \delta^{\text{IV}})}{\sqrt{(e^{\text{IV}} e^{\text{IV}})}}$$

et

$$\delta_1^{\text{IV}} = n_1^{\text{IV}} + e_1^{\text{IV}} t, \quad \delta_2^{\text{IV}} = n_2^{\text{IV}} + e_2^{\text{IV}} t, \ldots;$$

d'où

$$(e^{\text{IV}} \delta^{\text{IV}}) = (e^{\text{IV}} n^{\text{IV}}) + (e^{\text{IV}} e^{\text{IV}}) t,$$

et

$$\varepsilon^{\text{iv}} = \frac{E^{\text{iv}} + 2(e^{\text{iv}} n^{\text{iv}})}{2\sqrt{(e^{\text{iv}} e^{\text{iv}})}} + \sqrt{(e^{\text{iv}} e^{\text{iv}})}\, t,$$

ou

$$t = \frac{1}{\sqrt{(e^{\text{iv}} e^{\text{iv}})}}\, \varepsilon^{\text{iv}} - \frac{E^{\text{iv}} + 2(e^{\text{iv}} n^{\text{iv}})}{2(e^{\text{iv}} e^{\text{iv}})}.$$

Ceci nous indique d'abord que la valeur la plus plausible de t est le deuxième terme, puisque celle de ε^{iv} est o; ensuite, lorsque $i = 0$, E^{iv} devient nul, le deuxième terme est constant, et, par suite, la précision de cette valeur de t est $\sqrt{(e^{\text{iv}} e^{\text{iv}})}$ fois plus grande que celle de $\varepsilon^{\text{iv}} = 0$, qui est l'unité. Voilà donc déterminée la précision de la valeur plausible de t; on aurait de même celles des valeurs plausibles de x, y, z, u, savoir,

$$\sqrt{(a^{\text{iv}} a^{\text{iv}})}, \quad \sqrt{(b^{\text{iv}} b^{\text{iv}})}, \quad \sqrt{(c^{\text{iv}} c^{\text{iv}})}, \quad \sqrt{(d^{\text{iv}} d^{\text{iv}})},$$

en recommençant autant de fois la séparation des carrés dans $(\delta\delta) + (\theta K)$, pour conserver successivement chacune des inconnues jusqu'à la fin. Mais nous allons découvrir bientôt un moyen moins long et qui pourra servir lorsque, i n'étant pas nul, E^{iv} est variable et la précision de t est plus compliquée.

Remarquons que, dans la recherche des valeurs plausibles, nous avons détermine les corrélats dans les équations nécessaires, en déduisant de

$$\alpha = 0, \quad \beta' = 0, \quad \gamma'' = 0, \ldots,$$

les valeurs des inconnues en fonction des corrélats. Pour tenir compte de l'influence des erreurs de α, β', γ'', ..., sur les corrélats, il faut opérer d'une façon plus complète, en exprimant x, y, z, u, t en fonction des arbitraires et de α, β', γ'', ϑ''', ε^{iv}, au moyen des équations

$$\alpha = \frac{\frac{1}{2}(AK) + (a\delta)}{\sqrt{(aa)}}, \quad \beta' = \frac{\frac{1}{2}B' + (b'\delta')}{\sqrt{(b'b')}}, \quad \gamma'' = \frac{\frac{1}{2}C'' + (c''\delta'')}{\sqrt{(c''c'')}}, \quad \text{etc.}$$

De cette façon, les équations aux corrélats contiennent α, β', γ'', ..., et ces variables entrent dans l'expression des corrélats; en substituant les valeurs ainsi trouvées pour les corrélats dans les développements complets de $x, y, z, \ldots$, on a la formule générale des valeurs possibles des inconnues. Ces valeurs deviennent les plus plausibles dès que l'on y fait

$$\alpha = \beta' = \gamma'' = \ldots = 0.$$

Maintenant, toutes les inconnues sont données en fonctions linéaires des variables $\alpha, \beta', \gamma'', \ldots$; connaissant la précision des valeurs de celle-ci $(0, 0, 0, \ldots)$, il s'agit de déterminer les précisions des valeurs résultantes des inconnues.

Afin de résoudre ce problème, supposons que nous ayons, par exemple,

$$x = r + r_1\alpha + r_2\beta' + r_3\gamma'' + \ldots.$$

Les valeurs de α, β', γ'' étant données indépendamment l'une de l'autre, nous pouvons les considérer comme le résultat d'observations directes, ayant pour but la détermination des inconnues α, β', x, par exemple, et γ'' étant une fonction

$$-\frac{r}{r_3}-\frac{r_1}{r_3}\alpha-\frac{r_2}{r_3}\beta'+\frac{1}{r_3}x.$$

Alors la valeur la plus plausible de x et sa précision sont données par le procédé indiqué plus haut.

Les corrections $\alpha-0$, $\beta'-0$, $\gamma''-0$, multipliées par la précision 1 et élevées au carré, donnent pour somme analogue à ($\delta\delta$),

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta'^2+\gamma''^2 &= \alpha^2+\beta'^2+\frac{1}{r_3^2}(-r-r_1\alpha-r_2\beta'+x)^2\\ &= \frac{r^2}{r_3^2}+\frac{2rr_1}{r_3^2}\alpha+\frac{r_1^2+r_3^2}{r_3^2}\alpha^2+2\frac{rr_2}{r_3^2}\beta'+2\frac{r_1r_2}{r_3^2}\alpha\beta'\\ &\quad+\frac{r_2^2+r_3^2}{r_3^2}\beta'^2-\frac{2r}{r_3^2}x-2\frac{r_1}{r_3^2}\alpha x-2\frac{r_2}{r_3^2}\beta' x+\frac{1}{r_3^2}x^2.\end{aligned}$$

Le premier carré à séparer est évidemment celui de

$$\frac{rr_1}{r_3\sqrt{r_1^2+r_3^2}}+\frac{\sqrt{r_1^2+r_3^2}}{r_3}\alpha+\frac{r_1r_2}{r_3\sqrt{r_1^2+r_3^2}}\beta'-\frac{r_1}{r_3\sqrt{r_1^2+r_3^2}}x;$$

il reste

$$\frac{r^2}{r_1^2+r_3^2}+\frac{2rr_2}{r_1^2+r_3^2}\beta'+\frac{r_1^2+r_2^2+r_3^2}{r_1^2+r_3^2}\beta'^2-\frac{2r}{r_1^2+r_3^2}x-\frac{2r_2}{r_1^2+r_3^2}\beta' x+\frac{x^2}{r_1^2+r_3^2}.$$

Le second carré à séparer est celui de

$$\frac{rr_2}{\sqrt{(r_1^2+r_3^2)(r_1^2+r_2^2+r_3^2)}}+\sqrt{\frac{r_1^2+r_2^2+r_3^2}{r_1^2+r_3^2}}\beta'-\frac{r_2}{\sqrt{(r_1^2+r_3^2)(r_1^2+r_2^2+r_3^2)}}x;$$

il reste

$$\frac{r^2}{r_1^2+r_2^2+r_3^2}-\frac{2rx}{r_1^2+r_2^2+r_3^2}+\frac{x^2}{r_1^2+r_2^2+r_3^2},$$

ou le carré de

$$\frac{r-x}{\sqrt{(r_1^2+r_2^2+r_3^2)}}.$$

Si nous représentons les trois carrés par α_1^2, $\beta_1'^2$, $\gamma_1''^2$, il vient

$$\gamma_1''=\frac{r-x}{\sqrt{(r_1^2+r_2^2+r_3^2)}},\quad x=r-\gamma_1''\sqrt{(r_1^2+r_2^2+r_3^2)},$$

c'est-à-dire que, la précision de $\gamma_1''=0$ étant l'unité, celle de $x=r$ est

$$\sqrt{(r_1^2+r_2^2+r_3^2)}$$

fois moindre, ou

$$1:\sqrt{(r_1^2+r_2^2+r_3^2)},$$

et l'erreur moyenne est

$$= \sqrt{(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)}.$$

Ainsi, les inconnues étant exprimées complétement en fonction de α, β', γ'', ..., l'erreur moyenne de la valeur plausible de chacune est égale à la racine carrée de la somme des carrés des coefficients de ces variables dans son expression.

Enfin si, au moyen des valeurs plausibles de x, y, z, ..., nous trouvons celles d'une fonction

$$X = \varphi(x, y, z, \ldots),$$

la propriété précédente peut encore nous servir à trouver la précision de cette valeur. En effet, il suffit de développer X en fonction linéaire, comme au § V, soit

$$X = s + s_1 x + s_2 y + s_3 z + \ldots;$$

nous ne pouvons pas de là déduire directement la précision de X, parce que les valeurs de x, y, z, ..., ne sont pas indépendantes l'une de l'autre, comme celles de α, β', γ'', ...; il faut donc, conformément au commencement de ce paragraphe, substituer à x, y, z, ..., leurs expressions en α, β', γ'',..., et alors le développement de X devient analogue à celui de x, savoir

$$X = s' + s'_1\alpha + s'_2\beta' + s'_3\gamma'' + \ldots,$$

et la précision de $X = s'$ est

$$1 : \sqrt{s_1'^2 + s_2'^2 + s_3'^2 + \ldots}.$$

Si, au lieu d'avoir X en x, y, z, ..., cette inconnue était donnée directement en fonction de valeurs indépendantes, par exemple

$$X = \varphi(v_1, v_2, v_3, \ldots),$$

l'expression

$$X = s + s_1 v_1 + s_2 v_2 + s_3 v_3 + \ldots$$

serait comparable à celle de

$$x = r + r_1\alpha + r_2\beta' + r_3\gamma'' + \ldots;$$

en effet,

$$\delta_1 = h_1(v_1 - k_1), \quad \delta_2 = h_2(v_2 - k_2)\ldots$$

donne

$$v_1 = k_1 + \frac{\delta_1}{h_1}, \quad v_2 = k_2 + \frac{\delta_2}{h_2}, \ldots,$$

$$X = s + s_1 k_1 + s_2 k_2 + s_3 k_3 + \ldots + \frac{s_1}{h_2}\delta_1 + \frac{s_2}{h_2}\delta_2 + \frac{s_3}{h_3}\delta_3 + \ldots,$$

et dans ce développement, δ_1, δ_2, δ_3,..., sont des quantités ayant des valeurs indépendantes $= 0$ et de précision $= 1$, de même que α, β', γ'', ..., ci-dessus. Ainsi l'erreur moyenne de X est

$$\sqrt{\frac{s_1^2}{h_1^2} + \frac{s_2^2}{h_2^2} + \frac{s_3^2}{h_3^2} + \ldots};$$

et comme

$$h_1^2 = \frac{1}{m_1^2}, \quad h_2^2 = \frac{1}{m_2^2}, \quad h_3^2 = \frac{1}{m_3^2}, \ldots,$$

le carré de cette erreur moyenne devient

$$m_1^2 s_1^2 + m_2^2 s_2^2 + m_3^2 s_3^2 + \ldots,$$

formule simple et symétrique.

§ VII.

Récapitulation.

La suite des théorèmes établis dans les paragraphes précédents donne la solution suivante au problème général énoncé au § I :

Il faut séparer d'abord les observations en autant de séries qu'il y a eu de moyens d'observation différents ; on peut alors considérer la précision comme uniforme dans chaque série. On transforme les équations

$$v = k$$

en équations de la forme

$$\delta = 0,$$

ainsi qu'il est indiqué au § V. Dans chaque série d'équations

$$\delta = 0,$$

combinée avec les équations nécessaires qui lient entre elles les inconnues contenues dans cette série, on élimine les inconnues dépendantes ; on compense la série transformée par la condition

$$(\delta\delta) = \text{minimum},$$

en faisant abstraction de la précision uniforme et inconnue ; on substitue dans $(\delta\delta)$ les valeurs ainsi trouvées pour les inconnues, et l'on déduit la précision de la série d'observations par la formule

$$h = \sqrt{\frac{p - q + i}{(\delta\delta)}}.$$

Ayant déterminé ainsi la précision de chaque série d'observations, on reprend le système de toutes les équations primitives

$$\delta = 0 \quad \text{et} \quad \theta = 0,$$

et l'on forme, comme il est indiqué au § V, les équations

$$\alpha = \frac{\frac{1}{2}(\mathrm{AK}) + (a\delta)}{\sqrt{(aa)}},$$

$$\beta' = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{B}' + (b'\delta')}{\sqrt{(b'b')}},$$

$$\gamma'' = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{C}'' + (c''\delta'')}{\sqrt{(c''c'')}}, \quad \text{etc.}$$

On déduit de ces équations, en commençant par la dernière, toutes les inconnues en fonction des corrélats et de α, β', γ'', ... ; on substitue ces expressions des inconnues dans les équations nécessaires, et l'on obtient les équations complètes aux corrélats. Ces dernières permettent de déterminer les valeurs des corrélats en fonction de α, β', γ'',..., et ces valeurs, substituées dans les expressions obtenues précédemment pour les inconnues, donnent les valeurs de celles-ci en fonction des mêmes variables. Alors les valeurs plausibles des inconnues sont ce que l'on obtient pour elles en faisant

$$\alpha = \beta' = \gamma'' = \ldots = 0,$$

et les erreurs moyennes de ces valeurs sont les racines carrées des sommes des carrés des coefficients de α, β', γ'', ..., dans l'expression de chaque inconnue respectivement.

NOTE.

Démonstration d'un théorème algébrique invoqué au § III.

La recherche de l'expression analytique du risque d'erreur, au § III, repose sur une propriété algébrique des fonctions symétriques. Comme je ne pense point que cette propriété ait été énoncée ni démontrée jusqu'à ce jour, j'ai cru devoir y consacrer une note.

Si un polynôme symétrique homogène de degré $2n$ contient, à des puissances paires seulement, des variables Δ_1, Δ_2, Δ_3,... en nombre égal au moins à $2n$, et si les dérivées de toutes les variables sont égales à l'unité, la dérivée du polynôme ne saurait être divisible par la somme des variables, sans que le polynôme lui-même ne soit égal à une puissance de la somme des carrés des variables, multipliée par un coefficient constant, ou $= N(\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \ldots)^n$.

Le polynôme supposé est représenté de la façon la plus générale par

$$N\left\{\begin{aligned}&\Delta_1^{2n} + \Delta_2^{2n} + \Delta_3^{2n} + \ldots + N'(\Delta_1^{2n-2}\Delta_2^2 + \Delta_1^{2n-2}\Delta_3^2 + \ldots)\\ &\quad + N''(\Delta_1^{2n-4}\Delta_2^4 + \Delta_1^{2n-4}\Delta_3^4 - \ldots) + N_1''(\Delta_1^{2n-4}\Delta_2^2\Delta_3^2 + \Delta_1^{2n-4}\Delta_2^2\Delta_4^2 + \ldots)\\ &\quad + N'''(\Delta_1^{2n-6}\Delta_2^6 + \Delta_1^{2n-6}\Delta_3^6 + \ldots) + N_1'''(\Delta_1^{2n-6}\Delta_2^4\Delta_3^2 + \Delta_1^{2n-6}\Delta_2^2\Delta_3^4 + \ldots)\\ &\quad + N_2'''(\Delta_1^{2n-6}\Delta_2^2\Delta_3^2\Delta_4^2 + \ldots) + \ldots \text{ etc.}\end{aligned}\right\}.$$

Sa dérivée devient alors

$$N\left\{\begin{aligned}&2n(\Delta_1^{2n-1} + \Delta_2^{2n-1} + \Delta_3^{2n-1} + \ldots)\\ &\qquad + N'[(2n-2)\Delta_1^{2n-3}\Delta_2^2 + 2\Delta_1^{2n-2}\Delta_2 + (2n-2)\Delta_1^{2n-3}\Delta_3^2 + 2\Delta_1^{2n-2}\Delta_3 + \ldots]\\ &\qquad + N''[(2n-4)\Delta_1^{2n-5}\Delta_2^4 + 4\Delta_1^{2n-4}\Delta_2^3 + \ldots]\\ &\qquad + N_1''[(2n-4)\Delta_1^{2n-5}\Delta_2^2\Delta_3^2 + 2\Delta_1^{2n-4}\Delta_2\Delta_3^2 + 2\Delta_1^{2n-4}\Delta_2^2\Delta_3 + \ldots]\\ &\qquad + N'''[(2n-6)\Delta_1^{2n-7}\Delta_2^6 + 6\Delta_1^{2n-6}\Delta_2^5 + \ldots]\\ &\qquad + N_1'''\left[\begin{aligned}&(2n-6)\Delta_1^{2n-7}\Delta_2^4\Delta_3^2 + \ldots\\ &\qquad + 4\Delta_1^{2n-6}\Delta_2^3\Delta_3^2 + 2\Delta_1^{2n-6}\Delta_2^4\Delta_3 + \ldots\end{aligned}\right]\\ &\qquad + N_2'''\left[\begin{aligned}&(2n-6)\Delta_1^{2n-7}\Delta_2^2\Delta_3^2\Delta_4^2 + 2\Delta_1^{2n-6}\Delta_2\Delta_3^2\Delta_4^2\\ &\qquad + 2\Delta_1^{2n-6}\Delta_2^2\Delta_3\Delta_4^2 + 2\Delta_1^{2n-6}\Delta_2^2\Delta_3^2\Delta_4 \ldots\end{aligned}\right] \text{ etc.}\end{aligned}\right\}.$$

Cette expression est divisible, par hypothèse, par $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \ldots$; pour que cela soit, il faut que le reste de la division ordonnée par rapport à Δ_1, par exemple, soit nul, et, par conséquent, que tous les termes dissemblables de ce reste s'annulent séparément. Afin de reconnaître comment cette condition se traduit algébriquement, nous allons effectuer la division, et pour abréger les notations, nous représenterons par $S\Delta_2$ la somme $\Delta_2+\Delta_3+\Delta_4+\ldots$, par $S\Delta_2^{2n-1}$ la somme $\Delta_2^{2n-1}+\Delta_3^{2n-1}+\ldots$, par $S\Delta_2^2\Delta_3^2$ la somme $\Delta_2^2\Delta_3^2+\Delta_2^2\Delta_4^2+\ldots+\Delta_3^2\Delta_4^2+\ldots$, etc.; en un mot, le signe S indiquera la somme de tous les termes symétriques à celui qui le suit, formés avec les variables Δ_2, Δ_3, Δ_4,.... Notre premier dividende ordonné devient ainsi, abstraction faite du coefficient N,

$$\begin{aligned}
2n\Delta_1^{2n-1} &+ (2N'S\Delta_2)\Delta_1^{2n-2} + [2(n-1)N'S\Delta_2^2]\Delta_1^{2n-3}\\
&+ (4N''S\Delta_2^3 + 2N''_1 S\Delta_2^2\Delta_3)\Delta_1^{2n-4}\\
&+ [2(n-2)N''S\Delta_2^4 + 2(n-2)N''_1 S\Delta_2^2\Delta_3^2]\Delta_1^{2n-5}\\
&+ (6N'''S\Delta_2^5 + 2N'''_1 S\Delta_2^4\Delta_3 + 4N'''_1 S\Delta_2^3\Delta_3^2 + 2N'''_2 S\Delta_2^2\Delta_3^2\Delta_4)\Delta_1^{2n-6}\\
&+ \begin{bmatrix} 2(n-3)N'''S\Delta_2^6 + 2(n-3)N'''_1 S\Delta_2^4\Delta_3^2 \\ + 2(n-3)N'''_2 S\Delta_2^2\Delta_3^2\Delta_4^2 \end{bmatrix}\Delta_1^{2n-7} + \ldots
\end{aligned}$$

Le diviseur est

$$\Delta_1 + S\Delta_2.$$

Premier quotient : $2n\Delta_1^{2n-2}$; *produit* par $S\Delta_2$,

$$= (2nS\Delta_2)\Delta_1^{2n-2};$$

reste, le terme en Δ_1^{2n-1} disparaît, le coefficient de Δ_1^{2n-2} devient

$$2(N'-n)S\Delta_2.$$

Deuxième quotient : $[2(N'-n)S\Delta_2]\Delta_1^{2n-3}$. Dans le produit par $S\Delta_2$, nous aurons le carré de $S\Delta_2$ ou

$$\Delta_2^2 + 2\Delta_2\Delta_3 + \Delta_3^2 + 2\Delta_2\Delta_4 + 2\Delta_3\Delta_4 + \Delta_4^2 + \ldots,$$

ou, d'après nos abréviations,

$$S\Delta_2^2 + 2S\Delta_2\Delta_3;$$

le *produit* par $S\Delta_2$ est donc

$$[2(N'-n)S\Delta_2^2 + 4(N'-n)S\Delta_2\Delta_3]\Delta_1^{2n-3}.$$

Reste, le terme en Δ_1^{2n-2} disparaît, le coefficient de Δ_1^{2n-3} devient

$$[2(n-2)N' + 2n]S\Delta_2^2 - 4(N'-n)S\Delta_2\Delta_3.$$

Troisième quotient. C'est le coefficient précédent multiplié par Δ_1^{2n-4}. Dans ce quotient, le terme en $S\Delta_2\Delta_3$ donnera au produit un terme en $S\Delta_2\Delta_3\Delta_4$; or chaque $\Delta_2\Delta_3\Delta_4$ est donné par $\Delta_2\Delta_3\times\Delta_4$, $\Delta_2\Delta_4\times\Delta_3$, $\Delta_3\Delta_4\times\Delta_2$; ce terme sera donc

$$[3.4(N'-n)S\Delta_2\Delta_3\Delta_4]\Delta_1^{2n-4};$$

il ne pourra se réduire avec le dividende, passera tout entier dans le reste, puis dans le quatrième quotient, et donnera au quatrième produit un terme

$$[4.3.4(N'-n)S\Delta_2\Delta_3\Delta_4\Delta_5]\Delta_1^{2n-5},$$

qui ne peut encore se réduire avec aucun autre. Il y aura donc, au reste final, un terme tel que

$$(2n-1)\ldots 5.4.3.4\,(N'-n)\,S\,\Delta_2\,\Delta_3\,\Delta_4\,\Delta_5\,\Delta_6\ldots\,\Delta_{2n};$$

et comme le reste final doit disparaître pour que la division soit possible, il faut que

$$N' = n.$$

(Remarquons ici que la supposition du nombre de variables au moins égal à $2n$ est nécessaire dans l'énoncé du théorème; en effet, si ce nombre était inférieur à $2n$, le terme indiqué ci-dessus ne pourrait se produire, et l'on ne serait plus en droit de conclure $N' = n$.)

D'après ceci, le troisième quotient se réduit à

$$[2n(n-1)\,S\,\Delta_2^2]\,\Delta_1^{2n-4}.$$

Produit par $S\Delta_2$: $S\Delta_2^2 \times S\Delta_2$ donnera des termes tels que Δ_2^3 et $\Delta_2^2\,\Delta_3$, et chacun ne peut se présenter qu'une fois; le produit est donc

$$[2n(n-1)\,S\,\Delta_2^3 + 2n(n-1)\,S\,\Delta_2^2\,\Delta_3]\,\Delta_1^{2n-4}.$$

Le premier terme du *reste* sera

$$\left\{[4N'' - 2n(n-1)]\,S\,\Delta_2^3 + [2N''_1 - 2n(n-1)]\,S\,\Delta_2^2\,\Delta_3\right\}\Delta_1^{2n-4}.$$

Quatrième quotient. Le terme en $S\Delta_2^2\,\Delta_3$ de ce quotient donnera au produit un terme

$$\left\{2[2N''_1 - 2n(n-1)]\,S\,\Delta_2^2\,\Delta_3\,\Delta_4\right\}\Delta_1^{2n-5}$$

(provenant de $\Delta_2^2\Delta_3 + \Delta_4$ et de $\Delta_2^2\,\Delta_4 \times \Delta_3$), qui ne trouvera point son semblable et persévérera jusqu'au reste final, de même qu'il a été dit pour le terme en $S\,\Delta_2\,\Delta_3$ ci-dessus. Le coefficient entre crochets affecterait successivement

$$2\,\Delta_1^{2n-5}\,S\,\Delta_2^2\,\Delta_3\,\Delta_4,\quad 2.3\,\Delta_1^{2n-6}\,S\,\Delta_2^2\,\Delta_3\,\Delta_4\,\Delta_5,\quad \text{etc.};$$

donc il faut qu'il s'annule de lui-même, et qu'on ait

$$N''_1 = n(n-1);$$

le quotient se réduit à

$$[4N'' - 2n(n-1)]\,S\,\Delta_2^3 \times \Delta_1^{2n-5}.$$

Produit par $S\,\Delta_2$:

$$\left\{[4N'' - 2n(n-1)]\,S\Delta_2^4 + [4N'' - 2n(n-1)]\,S\Delta_2^3\Delta^3\right\}\Delta_1^{2n-5}.$$

Premier terme du *reste :*

$$\left\{\begin{matrix}[2(n-4)N'' + 2n(n-1)]\,S\Delta_2^4 - [4N'' - 2n(n-1)]\,S\Delta_2^3\,\Delta_3 \\ + 2(n-2)\,n(n-1)\,S\,\Delta_2^2\,\Delta_3^2\end{matrix}\right\}\Delta_1^{2n-5}.$$

Cinquième quotient. Le coefficient de $S\,\Delta_2^3\,\Delta_3$, terme qui donnerait

$$S\,\Delta_2^3\,\Delta_3\,\Delta_4,\quad S\,\Delta_2^3\,\Delta_3\,\Delta_4\,\Delta_5,\ldots,$$

doit, comme il a été dit pour d'autres, s'évanouir; d'où

$$N'' = n\left(\frac{n-1}{2}\right).$$

Le quotient devient

$$n(n-1)(n-2)(S\Delta_2^4 + 2S\Delta_2^2\Delta_3^2)\Delta_1^{2n-6}.$$

Produit :

$$n(n-1)(n-2)(S\Delta_2^5 + S\Delta_2^4\Delta_3 + 2S\Delta_2^3\Delta_3^2 + 2S\Delta_2^2\Delta_3^2\Delta_4)\Delta_1^{2n-6}.$$

Reste :

$$\left.\begin{cases} [6N''' - n(n-1)(n-2)]S\Delta_2^5 + [2N'''_1 - n(n-1)(n-2)]S\Delta_2^4\Delta_3 \\ \quad + [4N'''_1 - 2n(n-1)(n-2)]S\Delta_2^3\Delta_3^2 \\ \quad + [2N'''_2 - 2n(n-1)(n-2)]S\Delta_2^2\Delta_3^2\Delta_4 \end{cases}\right\}\Delta_1^{2n-6}.$$

Sixième quotient. Le coefficient de $S\Delta_2^4\Delta_3$ doit être annulé, de même que celui de $S\Delta_2^2\Delta_3^2\Delta_4$; ainsi nous avons

$$N'''_1 = n\left(\frac{n-1}{2}\right)(n-2) \quad \text{et} \quad N'''_2 = n(n-1)(n-2),$$

et le quotient devient

$$[6N''' - n(n-1)(n-2)]S\Delta_2^5 . \Delta_1^{2n-7}.$$

Produit :

$$[6N''' - n(n-1)(n-2)](S\Delta_2^6 + S\Delta_2^5\Delta_3)\Delta_1^{2n-7}.$$

Reste :

$$\left.\begin{cases} [2(n-6)N''' + n(n-1)(n-2)]S\Delta_2^6 - [6N''' - n(n-1)(n-2)]S\Delta_2^5\Delta_3 \\ \quad + n(n-1)(n-2)(n-3)S\Delta_2^4\Delta_3^2 \\ \quad + 2n(n-1)(n-2)(n-3)S\Delta_2^2\Delta_3^2\Delta_4^2 \end{cases}\right\}\Delta_1^{2n-7}.$$

Septième quotient. Nous aurions encore

$$N''' = n\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right).$$

Nous ne pousserons pas cette division plus loin; mais la substitution des valeurs de N', N'', N''_1, N''', N'''_1, N'''_2 dans le polynôme proposé, ordonné par rapport à Δ_1, donne

$$N\begin{Bmatrix} \Delta_1^{2n} + n\Delta_1^{2n-2}(\Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \ldots) + n\left(\frac{n-1}{2}\right)\Delta_1^{2n-4}(\Delta_2^4 + \Delta_3^4 + \ldots) \\ + n(n-1)\Delta_1^{2n-4}(\Delta_2^2\Delta_3^2 + \Delta_2^2\Delta_4^2 + \ldots) \\ + n\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\Delta_1^{2n-6}(\Delta_2^6 + \Delta_3^6 + \ldots) \\ + \dfrac{n(n-1)(n-2)}{2}\Delta_1^{2n-6}(\Delta_2^4\Delta_3^2 + \Delta_2^2\Delta_3^4 \ldots) \\ + n(n-1)(n-2)\Delta_1^{2n-6}(\Delta_2^2\Delta_3^2\Delta_4^2 + \ldots) + \ldots \end{Bmatrix},$$

ou

$$N\left\{\begin{matrix}\Delta_1^{2n} + n\Delta_1^{2(n-2)}(\Delta_2^2+\Delta_3^2+\ldots) + n\left(\frac{n-1}{2}\right)\Delta^{2(n-2)}(\Delta_2^2+\Delta_3^2+\ldots)^2 \\ + n\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\Delta^{2(n-3)}(\Delta_2^2+\Delta_3^2+\ldots)^3+\ldots\end{matrix}\right\},$$

ou enfin

$$N(\Delta_1^2+\Delta_2^2+\Delta_3^2+\ldots)^n.$$

C. Q. F. D.

Nous placerons ici quelques mots d'explication pour aller au-devant d'une objection que l'on peut faire à l'emploi de ce théorème à la page 177.

Dans le développement du risque d'erreur en série, le degré $2n$ du terme quelconque est évidemment illimité ; il faut donc supposer dans la formule le nombre des variables ou des corrections également illimité, puisque, aux termes du théorème ci-dessus, ce nombre doit être au moins égal à $2n$. Cette nécessité semble priver la démonstration de la forme analytique du risque d'erreur du caractère de généralité.

Mais nous voyons d'abord que, en ayant égard à cette condition, la démonstration rappelée prouve bien qu'en développant en série le risque d'erreur des corrections à faire à un système de $2n$ observations, les termes du développement jusqu'au $2n^{ième}$ degré inclusivement se réduisent à la forme

$$A + B(S\Delta_1^2) + C(S\Delta_1^2)^2 + \ldots + N(S\Delta_1^2)^n.$$

Si nous considérons maintenant un système quelconque, contenant un nombre moindre d'observations, nous pourrons toujours concevoir le système complété jusqu'au nombre $2n$ par des observations fictives et indépendantes ; et comme les corrections de ces dernières observations devront nécessairement être nulles, nous voyons que le risque d'erreur gardera la même forme, avec cette seule différence que $S\Delta_1^2$ contiendra un moindre nombre de termes.

Ainsi, le risque d'erreur d'un système de p corrections peut toujours se mettre sous la forme $A + B(S\Delta_1^2) + C(S\Delta_1^2)^2 + D(S\Delta_1^2)^3 + \ldots + N(S\Delta_1^2)^n +$ des termes de degré supérieur à $2n$, à condition que $2n > p$.

Il nous suffit d'ajouter que $2n$ est un nombre essentiellement fini, mais que rien ne limite, l'esprit pouvant concevoir un système d'observations en nombre indéfiniment grand. Donc le développement du risque d'erreur ne saurait renfermer un terme qui ne rentre sous la forme $\Phi(S\Delta_1^2)$.