JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J.-H. JELLETT

Sur la surface dont la courbure moyenne est constante

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 18 (1853), p. 163-167.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1853_1_18__163_0>

SUR

LA SURFACE DONT LA COURBURE MOYENNE EST CONSTANTE;

PAR M. J.-H. JELLETT,

Professeur à l'Université de Dublin.

En cherchant, par la méthode des variations, la surface d'une étendue donnée qui renferme le volume le plus grand, on trouve, comme on sait, que la courbure moyenne de la surface cherchée doit être constante. Si l'on exprime cette condition en différentielles partielles, on a l'équation

$$(\mathrm{A}) \qquad (1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t + \frac{2}{a}(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}} = 0.$$

Outre cette équation générale, le calcul des variations fournit des conditions aux limites qui servent à déterminer les fonctions arbitraires qui se trouvent dans sa solution. Malheureusement on n'a pas encore pu intégrer l'équation (A), ce qui nous empêche d'obtenir la solution générale de la question proposée.

Il y a cependant un cas dans lequel on sait d'avance le résultat qu'on doit obtenir. Quand on cherche, parmi toutes les surfaces *fermées*, celle qui renferme un volume maximum, des considérations simples montrent que la surface cherchée est une sphère. Mais on n'a pas encore pu démontrer ce résultat par le calcul des variations, ce qui semble être une assez grande lacune dans cette méthode.

« On sait, dit M. Delaunay (*Journal de l'École Polytechnique*,
» tome XVIII, page 110), que, parmi les surfaces fermées d'une
» étendue donnée, la sphère est celle qui renferme le volume le plus
» grand; mais cette solution n'a pas encore pu être tirée des équations
» que fournit le calcul des variations.... Il est facile de voir que la

» variation de l'intégrale ne contiendra pas de termes aux limites. Les
» conditions de maximum absolu se réduiront donc à la seule équa-
» tion (A). Ainsi, pour démontrer que la surface cherchée est une
» sphère, il faudrait faire voir que la sphère est la seule surface fer-
» mée qui soit comprise dans cette équation, et c'est ce qu'on n'a
» pas encore pu faire. »

J'ai considéré cette question précisément comme M. Delaunay l'a posée, et, ayant réussi à la résoudre pour une assez grande classe des surfaces, je me propose ici de faire voir que, parmi toutes les surfaces dont le volume peut être exprimé par l'intégrale

$$\int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2\, dr \sin\theta\, d\theta\, d\varphi,$$

la sphère est la seule dont la courbure moyenne est constante. Pour cela, je donnerai d'abord quelques théorèmes, qui sont d'ailleurs assez remarquables. J'adopterai dans tout ce qui suit les notations que voici :

Soit P la perpendiculaire abaissée de l'origine, que l'on suppose être prise à l'intérieur d'une surface fermée, sur le plan tangent. Soit $d\omega$ l'élément de la surface sphérique que décrit un rayon parallèle à cette perpendiculaire et dont la longueur est l'unité, en sorte que

$$d\omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi,$$

θ, φ étant les angles polaires qui déterminent la position de la perpendiculaire. Soient S l'aire totale de la surface et dS l'élément de cette aire. Représentons par I l'intégrale

$$\iint \mathrm{P}\, d\omega,$$

en supposant que cette intégrale s'étende à toute la surface. Enfin, soient R, R′ les rayons de courbure principaux au point qu'on considère. Nous aurons les théorèmes suivants :

Théorème I. *Dans une surface quelconque fermée,*

$$2\mathrm{I} = \iint \left(\frac{1}{\mathrm{R}} + \frac{1}{\mathrm{R'}}\right) d\mathrm{S}, \tag{B}$$

si l'on suppose que l'intégrale s'étende à toute la surface.

Il me suffit ici d'énoncer ce théorème. On en trouvera la démonstration dans mon *Calculus of variations*, pages 351 à 353.

THÉORÈME II. *Dans une surface quelconque fermée,*

$$(C)\qquad 2S = \iint P\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) dS,$$

en supposant, comme dans le théorème précédent, que l'intégrale s'étende à toute la surface.

En effet, soient x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point de la surface, et posons

$$\xi = \frac{p(px + qy - z)}{\sqrt{1+p^2+q^2}} - x\sqrt{1+p^2+q^2},$$

$$\eta = \frac{q(px + qy - z)}{\sqrt{1+p^2+q^2}} - y\sqrt{1+p^2+q^2},$$

en conservant la notation ordinaire de différentielles partielles. Nous aurons donc, en différentiant,

$$\frac{d\xi}{dx} = (px + qy - z)\left[\frac{(1+q^2)r - pqs}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}\right] + s\frac{py - qx}{\sqrt{1+p^2+q^2}} - \sqrt{1+p^2+q^2},$$

$$\frac{d\eta}{dy} = (px + qy - z)\left[\frac{(1+p^2)t - pqs}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}\right] + s\frac{qx - py}{\sqrt{1+p^2+q^2}} - \sqrt{1+p^2+q^2}.$$

Ajoutant ces équations, nous trouverons

$$\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} = (px + qy - z)\frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}} - 2\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

Mais, en vertu des relations

$$P = \frac{z - px - qy}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = -\frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

cette équation peut s'écrire

$$\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} = \left[P\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) - 2\right]\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

On a donc

$$2\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy = P\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy$$
$$-\left(\frac{d\xi}{dy}+\frac{d\eta}{dy}\right)dx\,dy,$$

ou, plus simplement,

$$2\,dS = P\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)dS - \left(\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}\right)dx\,dy.$$

En intégrant et désignant par Σ l'aire d'une portion de la surface terminée à une courbe quelconque, nous aurons

$$\text{(D)}\qquad 2\Sigma = \iint P\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)dS + \int\left(\xi\frac{dy}{dx}-\eta\right)dx,$$

où l'intégrale double s'étend à toute la portion que l'on considère, et l'intégrale simple à toute la courbe limite. On peut déduire plusieurs conséquences curieuses de cette équation; mais, pour notre but immédiat, il me suffit de remarquer qu'en étendant l'intégration à toute la surface, l'intégrale simple disparaîtra évidemment. On a donc simplement

$$2S = \iint P\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)dS. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Théorème III. Maintenant considérons l'équation

$$\text{(E)}\qquad \frac{1}{R}+\frac{1}{R'}=\frac{2}{a},$$

qui représente une surface dont la courbure moyenne est constante. Mettant cette équation sous la forme

$$\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}\right)^2 = \frac{4}{a^2}-\frac{4}{RR'},$$

multipliant par $\frac{1}{4}P\,dS$ et intégrant, on trouve facilement

$$\text{(F)}\qquad M = a^2 I + \frac{a^2}{4}\iint\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}\right)^2 P\,dS,$$

en représentant par M le triple du volume. Cela posé, si l'on multiplie l'équation (E) par dS et qu'on intègre, on trouve, en vertu de l'équation (B),

$$\iint dS\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)=2\iint P\,d\omega=\frac{2S}{a};$$

on a donc

$$S=aI.$$

Multipliant de nouveau l'équation (E) par $P\,dS$ et intégrant, on a, en vertu de l'équation (C),

$$S=\frac{M}{a}.$$

Éliminant S entre ces équations, nous aurons

$$M=a^2 I.$$

Cette condition réduit l'équation (F) à

$$\iint\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}\right)^2 P\,dS=0.$$

Mais comme

$$P\,dS=r^3\sin\theta\,d\theta\,d\varphi,$$

on voit facilement que, pour la classe des surfaces qu'on considère, tous les éléments dont cette dernière intégrale est composée sont essentiellement positifs. L'intégrale totale ne peut donc pas s'évanouir à moins que chacun des éléments ne devienne nul.

On a donc, pour tous les points de la surface,

$$\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}=0,\quad \frac{1}{R}+\frac{1}{R'}=\frac{2}{a}.$$

Donc

$$R=R'=a,$$

ce qui montre que la surface cherchée est une sphère dont le rayon est a.