JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. TISSOT

Sur un déterminant d'intégrales définies

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 17 (1852), p. 177-185.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1852_1_17__177_0>

SUR UN DÉTERMINANT D'INTÉGRALES DÉFINIES;

PAR M. A. TISSOT.

1. A l'aide d'un changement de variables, M. William Roberts a établi [*], entre certaines intégrales définies, des relations analogues à celle que donne le théorème de Legendre sur les fonctions elliptiques complètes de première et de seconde espèce à modules complémentaires. On peut obtenir une formule, qui comprendra ces relations comme cas particuliers, en calculant le déterminant

$$D = \sum \left[\pm \int_a^{a_1} e^{-x} \frac{dx}{\varphi(x)} \int_{a_1}^{a_2} e^{-x} \frac{x\,dx}{\varphi_1(x)} \cdots \int_{a_{n-1}}^{a_n} e^{-x} \frac{x^{n-1}\,dx}{\varphi_{n-1}(x)} \int_{a_n}^{\infty} e^{-x} \frac{x^n\,dx}{\varphi_n(x)} \right],$$

ou, ce qui revient au même, l'intégrale définie multiple

$$(1)\quad D = \int_a^{a_1} \int_{a_1}^{a_2} \cdots \int_{a_{n-1}}^{a_n} \int_{a_n}^{\infty} \frac{e^{-x-x_1-\ldots-x_{n-1}-x_n}\,\Pi(x, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)}{\varphi(x)\varphi_1(x_1)\ldots\varphi_{n-1}(x_{n-1})\varphi_n(x_n)} dx\,dx_1\ldots dx_{n-1}\,dx_n;$$

$\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$,..., $\varphi_{n-1}(x)$, $\varphi_n(x)$ représentent ici les expressions que l'on trouve, en donnant à l'indice i toutes les valeurs entières, depuis zéro jusqu'à n, dans

$$\varphi_i(x) = (x-a)^m (x-a_1)^{m_1} \ldots (x-a_i)^{m_i} (a_{i+1}-x)^{m_{i+1}} \ldots (a_n - x)^{m_n};$$

m, m_1,..., m_{n-1}, m_n sont des exposants positifs plus petits que l'unité, ou des exposants négatifs quelconques; enfin, la fonction Π remplace le produit

$$\Pi(x, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = (x_1 - x)(x_2 - x)\ldots(x_n - x)(x_2 - x_1)\ldots(x_n - x_1)\ldots(x_n - x_{n-1}).$$

[*] Tome XVI du présent Journal.

Soit p_i le complément de m_i à l'unité; posons

$$F_i(x) = (x-a)(x-a_1)\ldots(x-a_i)(a_{i+1}-x)\ldots(a_n-x);$$

si nous indiquons par la lettre Γ les intégrales eulériennes de deuxième espèce, et au moyen d'accents les dérivées prises par rapport à x, la formule en question sera

$$(2)\quad D = \Gamma(p)\Gamma(p_1)\ldots\Gamma(p_n)\frac{F'(a)^p F'_1(a_1)^{p_1}\ldots F'_n(a_n)^{p_n}}{\Pi(a, a_1,\ldots, a_n)} e^{-a-a_1-\ldots-a_n}.$$

2. Lorsque $n+1$ quantités $A, A_1,\ldots, A_{n-1}, A_n$ satisfont à une même équation différentielle linéaire dont le second membre est nul, et dont la variable indépendante est a, le déterminant

$$R = \sum\left[\pm A\frac{dA_1}{da}\cdots\frac{d^{n-1}A_{n-1}}{da_{n-1}}\frac{d^n A_n}{da_n}\right]$$

peut se mettre sous la forme

$$R = \gamma e^{-\int P da},$$

P étant le rapport du coefficient du second terme à celui du premier, dans l'équation différentielle linéaire, et γ une constante par rapport à a.

Pour établir la formule (2), je m'appuierai sur cette propriété, qui a été démontrée par M. Liouville [*]; après avoir prouvé qu'il y a lieu de l'appliquer ici, je n'aurai plus qu'à déterminer la valeur particulière de γ.

3. Considérons d'abord le cas où n serait égal à l'unité, et où, par conséquent, la notation précédente donnerait

$$\varphi(x) = (x-a)^m(a_1-x)^{m_1},\quad \varphi_1(x) = (x-a)^m(x-a_1)^{m_1},$$

$$D = \int_a^{a_1} e^{-x}\frac{dx}{\varphi(x)}\int_{a_1}^{\infty} e^{-x}\frac{x\,dx}{\varphi_1(x)} - \int_a^{a_1} e^{-x}\frac{x\,dx}{\varphi(x)}\int_{a_1}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{\varphi_1(x)}.$$

La formule à démontrer devient alors

$$D = \Gamma(p)\Gamma(p_1)(a_1-a)^{p+p_1-1}e^{-a-a_1},$$

[*] Tome X du présent Journal.

p et p_1 représentant, comme tout à l'heure, les différences $1 - m$ et $1 - m_1$. Or, il est facile de vérifier qu'en posant

$$A = \int_a^{a_1} e^{-x} \frac{(x-a)^p}{(a_1 - x)^{m_1}} dx, \quad A_1 = \int_{a_1}^{\infty} e^{-x} \frac{(x-a)^p}{(x-a_1)^{m_1}} dx,$$

$$B = \int_a^{a_1} \frac{e^{-x}\,dx}{(x-a)^m (a_1 - x)^{m_1}}, \quad B_1 = \int_{a_1}^{\infty} \frac{e^{-x}\,dx}{(x-a)^m (x-a)^{m_1}},$$

on pourra mettre D sous la forme

$$D = A_1 B - B_1 A;$$

et, si l'on différentie par rapport à a les deux membres de cette équation, il viendra

$$\frac{dD}{da} = m A_1 \int_a^{a_1} \frac{e^{-x}\,dx}{(x-a)^{1+m}(a_1 - x)^{m_1}}$$
$$- m A \int_{a_1}^{\infty} \frac{e^{-x}\,dx}{(x-a)^{1+m}(x-a_1)^{m_1}} - A_1 \frac{e^{-a}}{\varphi(a)};$$

le dernier terme de cette expression est nul ou infini, suivant que l'exposant m est négatif ou positif. On a d'ailleurs identiquement

$$d\left[e^{-x}\frac{(a_1 - x)^{p_1}}{(x-a)^m}\right] = -m(a_1 - a)\frac{e^{-x}\,dx}{(x-a)^{1+m}(a_1-x)^{m_1}}$$
$$-(a_1 - a + p + p_1 - 1)\frac{e^{-x}\,dx}{(x-a)^m (a_1 - x)^{m_1}} + e^{-x}\frac{(x-a)^p}{(a_1-x)^{m_1}} dx,$$

d'où l'on tire, en intégrant depuis a jusqu'à a_1,

$$m\int_a^{a_1} \frac{e^{-x}\,dx}{(x-a)^{1+m}(a_1 - x)^{m_1}} = \frac{A}{a_1 - a} - \left(1 + \frac{p+p_1-1}{a_1 - a}\right) B + \frac{e^{-a}}{\varphi(a)};$$

de même, si après avoir différentié $e^{-x}\frac{(x-a_1)^{p_1}}{(x-a)^m}$ par rapport à x, et ordonné le résultat suivant les puissances de $x - a$, on intégrait entre les limites a_1 et ∞, on trouverait

$$m\int_{a_1}^{\infty} \frac{e^{-x}\,dx}{(x-a)^{1+m}(x-a_1)^{m_1}} = \frac{A_1}{a_1 - a} - \left(1 + \frac{p+p_1-1}{a_1-a}\right) B_1.$$

Par la substitution de ces valeurs aux intégrales, autres que A et A_1, qui entrent dans l'expression de $\frac{dD}{da}$, on fera disparaître de cette expression le terme qui contient $\varphi(a)$ en dénominateur, et on obtiendra, toutes réductions faites,

$$\frac{dD}{da} = -\left(1 + \frac{p + p_1 - 1}{a_1 - a}\right) D.$$

On aura donc, en intégrant, et en représentant par γ une quantité indépendante de a,

$$D = \gamma (a_1 - a)^{p+p_1-1} e^{-a}. \tag{3}$$

4. Pour calculer γ, nous pouvons faire, dans cette dernière formule, $a = a_1$, ou, ce qui revient au même, remplacer a par $a_1 - \varepsilon$, et faire converger ε vers zéro; or l'expression du déterminant sous forme d'intégrale définie multiple, savoir

$$D = \int_a^{a_1} \int_{a_1}^{\infty} \frac{e^{-x-x_1}(x_1 - x)\, dx\, dx_1}{(x-a)^m (a_1 - x)^{m_1} (x_1 - a)^m (x_1 - a_1)^{m_1}},$$

devient, lorsqu'on pose

$$x = a_1 - (1-\varepsilon) z, \quad x_1 = a_1 + y,$$

et qu'on assigne à ε une valeur très-petite,

$$E = \varepsilon^{p+p_1-1} e^{-2a_1} \int_0^1 \frac{dz}{z^m (1-z)^{m_1}} \int_0^{\infty} e^{-y} y^{p+p_1-1}\, dy,$$

ou bien, en introduisant les fonctions Γ,

$$E = \Gamma(p)\Gamma(p_1)\, \varepsilon^{p+p_1-1} e^{-2a_1}.$$

Dans les mêmes circonstances, l'équation (3) donne

$$E = \gamma \varepsilon^{p+p_1-1} e^{-a_1};$$

on a donc

$$\gamma = \Gamma(p)\Gamma(p_1) e^{-a_1},$$

et, par conséquent,

$$D = \Gamma(p)\Gamma(p_1)(a_1 - a)^{p+p_1-1} e^{-a-a_1}.$$

5. La formule (2) se trouvant établie, lorsque n est égal à l'unité, il suffit maintenant de faire voir que, si elle est vraie pour tout déter-

minant composé avec n^2 intégrales définies, qui remplissent les conditions voulues, elle le sera encore pour ceux qui en renfermeront $(n+1)^2$. La même conséquence aurait pu se déduire de l'examen du cas particulier où l'on a

$$n = 0,$$

car alors l'expression $\Pi(a, a_1, \ldots, a_n)$, c'est-à-dire le déterminant $\Sigma(\pm a^0, a_1^1, \ldots, a_n^n)$, dans lequel les indices supérieurs doivent être pris comme exposants, se réduit à l'unité, et la formule (2) devient évidente. Aussi les développements précédents ont-ils principalement pour but d'éclaircir, par un exemple, la démonstration qui va suivre.

6. Le déterminant proposé ne change pas lorsque, sous le signe *somme* de chaque intégrale définie, on remplace, au numérateur, x par $x - a$; de sorte que l'on a

$$D = \sum\left[\pm \int_a^{a_1} e^{-x}\frac{dx}{\varphi(x)}\int_{a_1}^{a_2} e^{-x}\frac{x-a}{\varphi_1(x)}dx \ldots \int_{a_{n-1}}^{a_n} e^{-x}\frac{(x-a)^{n-1}}{\varphi_{n-1}(x)}dx\int_{a_n}^{\infty} e^{-x}\frac{(x-a)^n}{\varphi_n(x)}dx\right];$$

cette expression revient, en effet, comme la première, à l'intégrale multiple (1). Or, si l'on pose

$$A_i = \int_{a_i}^{a_{i+1}} e^{-x}\frac{(x-a)^n}{\varphi(x)}dx,$$

et qu'on différentie $n-k$ fois par rapport à a, k désignant l'un des nombres entiers $0, 1, 2, \ldots, n$, il viendra

$$(4)\quad \frac{d^{n-k}A_i}{da^{n-k}} = (-1)^{n-k+m_1+m_2+\ldots+m_i}(n-m)(n-1-m)\ldots(k+1-m)\int_{a_i}^{a_{i+1}} e^{-x}\frac{(x-a)^k}{\varphi_i(x)}dx.$$

Le coefficient du second membre de cette égalité varie avec k et avec i, mais il se décompose en deux facteurs

$$\alpha_k = (-1)^{n-k}(n-m)(n-1-m)\ldots(k+1-m)$$

et

$$\beta_i = (-1)^{m_1+m_2+\ldots+m_i},$$

dépendant chacun d'un seul de ces indices; en représentant par R le déterminant

$$R = \sum\left[\pm A\frac{dA_1}{da}\ldots\frac{d^{n-1}A_{n-1}}{da^{n-1}}\frac{d^nA_n}{da^n}\right],$$

et par θ le produit $\alpha\beta\alpha_1\beta_1\ldots\alpha_n\beta_n$, on aura donc

$$R = \theta D.$$

7. L'égalité (4) subsiste pour $k = -1$, tant que a_i est différent de a; elle peut s'écrire

$$(5)\qquad \int_{a_i}^{a_{i+1}} e^{-x}\frac{(x-a)^{k-1}}{\varphi(x)}\,dx = \frac{1}{\alpha_{k-1}}\frac{d^{n+1-k}A_i}{da^{n+1-k}};$$

d'ailleurs, si l'on pose

$$\varpi(x) = F(x) + \frac{F(x)\varphi'(x)}{\varphi(x)},$$

on trouvera facilement

$$d\left[\frac{e^{-x}F(x)}{(x-a)\varphi(x)}\right] = \{[F'(x) - \varpi(x)](x-a) - F(x)\}\frac{e^{-x}dx}{(x-a)^2\varphi(x)},$$

d'où l'on tire, en développant les polynômes $\varpi(x)$, $F(x)$ et $F'(x)$ suivant les puissances de $x-a$, puis en intégrant entre les limites a_i et a_{i+1}, dont la première est encore supposée différente de a,

$$(6)\qquad \sum_{k=0}^{k=n+1}\left[\frac{(k+1)\varpi^{(k)}(a) - kF^{(k+1)}(a)}{\Gamma(k+2)}\int_{a_i}^{a_{i+1}} e^{-x}\frac{(x-a)^{k-1}}{\varphi(x)}\,dx\right] = 0.$$

Enfin, si l'on remplace l'intégrale de la parenthèse par l'expression (5), on obtiendra l'équation différentielle linéaire de l'ordre $n+1$,

$$(7)\qquad \sum_{k=0}^{k=n+1}\left[\frac{(k+1)\varpi^{(k)}(a) - kF^{(k+1)}(a)}{\alpha_{k-1}\Gamma(k+2)}\frac{d^{n+1-k}A_i}{da^{n+1-k}}\right] = 0,$$

à laquelle satisfont $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Je dis qu'il en est de même de A : en effet, lorsque a_i est égal à a, l'équation (5) a lieu pour $k = 1, 2, \ldots, n$; mais, si l'on y fait $k = 0$, il faut ajouter à son second membre $\frac{e^{-a}}{m\varphi(a)}$, et, par conséquent, $\frac{e^{-a}\varpi(a)}{m\varphi(a)}$ au premier membre de l'équation (7). D'un autre côté, ce premier membre doit être diminué de $e^{-a}\frac{F'(a)}{\varphi(a)}$, comme celui de l'équation (6); or il est facile de voir que ces deux quantités, qui seraient nulles d'elles-mêmes pour $m < 0$, mais infinies pour $m > 0$, se détruisent mutuellement [*].

8. Cela posé, en mettant successivement $A, A_1, \ldots, A_n$, au lieu de A_i, dans l'équation (7), on aura, entre les $n+2$ coefficients de ses différents termes, $n+1$ équations du premier degré, desquelles on pourra tirer les rapports de ces coefficients à l'un d'entre eux, en fonction de $A, A_1, \ldots, A_n$ et des dérivées de ces quantités par rapport à a. En particulier, le rapport P du coefficient du second terme à celui du premier sera donné par une fraction ayant pour dénominateur R, et pour numérateur ce même déterminant, dans lequel on aurait mis, au lieu des dérivées de l'ordre n, les dérivées de l'ordre $n+1$ changées de signe. Le résultat de cette substitution ne diffère de $-\frac{dR}{da}$ que par une somme de termes qui se détruisent deux à deux, puisqu'on peut les grouper en n déterminants, dans chacun desquels deux lignes verticales ou deux lignes horizontales présenteraient une composition identique. On a donc

$$P = -\frac{1}{R}\frac{dR}{da},$$

ou bien, en remplaçant R par θD, et observant que θ est indépendant de a,

$$P = -\frac{1}{D}\frac{dD}{da};$$

si l'on intègre par rapport à a, et qu'on désigne par γ une fonction encore inconnue de $a_1, a_2, \ldots, a_n$, il viendra

$$D = \gamma e^{-\int P\,da}.$$

[*] Toutes les intégrales de la forme

$$\int_a^x e^{-x}\frac{(x-a)^k}{\varphi(x)}\,dx$$

peuvent s'obtenir linéairement au moyen de n d'entre elles, pour lesquelles k est l'un des nombres $0, 1, 2, \ldots, n$: celles-ci n'existent jamais sous forme finie; elles fournissent, comme les transcendantes dont la différentielle est algébrique, les intégrales complètes d'autant d'équations différentielles linéaires avec second membre. (*Voir*, pour ces dernières transcendantes, un Mémoire de M. Hermite, tome IX du présent Journal.)

9. L'équation (7) peut s'écrire

$$\frac{\varpi(a)}{(n-m)(n-1-m)\ldots(1-m)m}\frac{d^{n+1}A_i}{da^{n+1}}$$
$$+\frac{2\varpi'(a)-F''(a)}{2(n-m)(n-1-m)\ldots(1-m)}\frac{d^nA_i}{da^n}+\ldots=0.$$

de sorte que l'on a

$$P=m\frac{2\varpi'(a)-F''(a)}{2\varpi(a)},$$

c'est-à-dire

$$P=1+\frac{p+p_1-1}{a_1-a}+\frac{p+p_2-1}{a_2-a}+\ldots+\frac{p+p_n-1}{a_n-a};$$

et l'expression de D devient, lorsqu'on y introduit cette valeur de P,

$$(8)\quad D=\gamma(a_1-a)^{p+p_1-1}(a_2-a)^{p+p_2-1}\ldots(a_n-a)^{p+p_n-1}e^{-a}.$$

10. Représentons par Δ la limite vers laquelle converge le rapport de D à $(a_1-a)^{p+p_1-1}$, lorsque a s'approche indéfiniment de a_1; puisque γ est indépendant de a, nous aurons, en vertu de l'équation (8),

$$(9)\qquad \gamma(a_2-a_1)^{p+p_2-1}\ldots(a_n-a_1)^{p+p_n-1}e^{-a_1}=\Delta.$$

Pour calculer Δ, on peut recourir à l'expression du déterminant sous forme d'intégrale définie multiple; si l'on pose, dans cette expression,

$$a=a_1-\varepsilon,\quad x=a_1-\varepsilon(1-z),$$

afin de mettre en évidence le facteur ε^{p+p_1-1}, et si, après avoir supprimé ce facteur, on fait $\varepsilon=0$, on trouvera, en introduisant les intégrales eulériennes de deuxième espèce,

$$(10)\quad \Delta=\frac{\Gamma(p)\Gamma(p_1)}{\Gamma(p+p_1)}(a_2-a_1)^{p_2-1}(a_3-a_1)^{p_3-1}\ldots(a_n-a_1)^{p_n-1}e^{-a_1}D_1;$$

nous désignons ici par D_1 un déterminant analogue à D, et qui correspondrait à la composition suivante de $\varphi_i(x)$,

$$(x-a_1)^{m+m_1-1}(x-a_2)^{m_2}\ldots(x-a_i)^{m_i}(a_{i+1}-x)^{m_{i+1}}\ldots(a_n-x)^{m_n}.$$

Par hypothèse, on peut appliquer à ce déterminant la formule (2); il suffit d'y omettre les facteurs $\Gamma(p)$, $F'(a)$ et e^{-a}, puis d'y remplacer p_1 par $p+p_1$, $F'_i(a_i)$ par $\frac{F'_i(a_i)}{a_i - a}$, et $\Pi(a, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ par $\Pi(a_1, a_2, \ldots, a_n)$; elle donne alors

$$(11)\qquad D_1 = \Gamma(p+p_1)\Gamma(p_2)\ldots\Gamma(p_n)\frac{F'_1(a_1)^{p+p_1}F'_2(a_2)^{p_2}\ldots F'_n(a_n)^{p_n}e^{-a_1-a_2-\ldots-a_n}}{(a_1-a)^{p+p_1}(a_2-a)^{p_2}\ldots(a_n-a)^{p_n}\Pi(a_1, a_2, \ldots, a_n)}.$$

Si maintenant on multiplie membre à membre les équations (8), (9), (10) et (11), on obtiendra la relation qu'il s'agissait de démontrer.

11. Lorsque les exposants $m, m_1, \ldots, m_n$ sont tous égaux à $\frac{1}{2}$, cette relation devient

$$D = \pi^{\frac{n+1}{2}} e^{-a-a_1-\ldots-a_n}.$$

En faisant dans cette dernière

$$n = 2,\quad a = 0,\quad a_1 = b^2,\quad a_2 = c^2,\quad x = u^2,$$

on retrouve celle qui a été donnée par M. William Roberts.