

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

A. TISSOT

Thèse de mécanique

*Journal de mathématiques pures et appliquées 1<sup>re</sup> série*, tome 17 (1852), p. 88-116.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1852\\_1\\_17\\_\\_88\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1852_1_17__88_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

---

# THÈSE DE MÉCANIQUE,

PAR M. A. TISSOT,

Ancien Élève de l'École Polytechnique.

---

## *Mouvement d'un point matériel pesant sur une sphère.*

1. Dans le mouvement d'un point matériel soumis à la seule action de la pesanteur, et assujéti à rester sur une sphère, le temps dépend, par une intégrale elliptique de première espèce, de la distance  $z$  du mobile au plan horizontal, qui passe par le centre de la sphère, et l'angle  $\psi$  du plan vertical, qui contient ces deux points, avec un plan vertical fixe, s'exprime, au moyen de  $z$ , par la somme de deux intégrales de troisième espèce. L'application des principes exposés par M. Jacobi, dans les *Fundamenta nova, etc.*, et l'emploi de la transcendante  $\Theta$  permettront donc d'obtenir, en fonction du temps, les variables de la question [\*]. Ainsi, la solution complète du problème ne sera plus bornée au cas où, le mobile s'écartant très-peu du point le plus bas de la sphère, on serait autorisé à négliger les quantités très-petites du troisième ordre; de plus, les caractères de périodicité, qui n'ont été constatés que pour ce cas particulier, et dans les limites de l'approximation indiquée, se trouveront établis d'une manière rigoureuse, quelle que soit l'amplitude du mouvement.

### *Calcul de $z$ en fonction du temps.*

2. Si l'on appelle  $R$  le rayon de la sphère,  $g$  l'intensité de la pesanteur, et si l'on représente le temps par  $t$ , on aura, en prenant l'axe

---

[\*] Cette application sera analogue à celle qui a été faite par M. Jacobi à la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, dans le cas où il n'y a pas de forces extérieures. (Tome XIV du présent Journal; et, pour le Mémoire complet, *Journal de M. Crelle*, tome XXXIX.)

des  $z$  dans le sens de la pesanteur, et en supposant, pour fixer les idées, que le mouvement ait d'abord lieu de bas en haut [\*],

$$dt = \frac{-R dz}{\sqrt{(R^2 - z^2)(2gz + G) - G'^2}}$$

Soient, au point de départ,  $z_0$  la valeur de  $z$ ,  $v_0$  la vitesse, et  $\omega$  l'angle que fait la direction de cette vitesse, avec la tangente horizontale menée à la sphère par le même point; les constantes  $G$  et  $G'$  auront pour expressions

$$G = v_0^2 - 2gz_0, \quad G' = v_0 \cos \omega \sqrt{R^2 - z_0^2},$$

et, si l'on pose

$$G' = c \sqrt{2g}, \quad v_0^2 = 2g(z_0 - h),$$

ce qui donne

$$G = -2gh, \quad c^2 = (R^2 - z_0^2)(z_0 - h) \cos^2 \omega,$$

il viendra

$$dt = \frac{R}{\sqrt{2g}} \frac{-dz}{\sqrt{(R^2 - z^2)(z - h) - c^2}}$$

3. La quantité soumise au radical, lorsqu'on y remplace  $z$  successivement par

$$-\infty, \quad -R, \quad z_0, \quad R,$$

prend les signes

$$+, \quad -, \quad +, \quad -;$$

en l'égalant à zéro, on trouverait donc pour  $z$  trois racines réelles : la plus grande comprise entre  $z_0$  et  $R$ , la seconde entre  $-R$  et  $z_0$ , la troisième négative et plus grande que  $R$  en valeur absolue. Si l'on représente ces racines, dans l'ordre indiqué, par  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $-\gamma$ , on aura

$$dt = \frac{R}{\sqrt{2g}} \frac{-dz}{\sqrt{(\gamma + z)(\alpha - z)(z - \beta)}}$$

On voit que, dans le cours du mouvement,  $z$  restera compris entre

[\*] *Mécanique de Poisson*, tome I<sup>er</sup>.

les limites  $\alpha$  et  $\beta$ , et passera alternativement de l'une à l'autre, sans que le mobile s'arrête, puisque la vitesse de ce mobile sur la courbe qu'il décrit, savoir

$$v = \sqrt{2g(z-h)},$$

ne devient jamais nulle.

La relation, qui existe entre les racines et le coefficient du troisième terme de l'équation en  $z$ , donne

$$(\alpha + \beta)\gamma = R^2 + \alpha\beta,$$

de sorte que la somme  $\alpha + \beta$  est positive; par conséquent, il en est de même de  $\alpha$ . La courbe décrite par le mobile est donc toujours située, au moins en partie, dans l'hémisphère inférieur. Pour qu'elle coupe la circonférence du grand cercle horizontal, il faut que le point de départ soit situé au-dessus de cette circonférence, ou bien que la vitesse initiale satisfasse à la condition

$$v_0^2 > 2gz_0 \frac{R^2}{R^2 \sin^2 \omega + z_0^2 \cos^2 \omega}.$$

4. Pour plus de simplicité, nous compterons le temps à partir de l'une des époques où le point matériel est le plus bas possible; nous aurons, à un instant quelconque,

$$t = \frac{R}{\sqrt{2g}} \int_{\alpha}^z \frac{-dz}{\sqrt{(\gamma+z)(\alpha-z)(z-\beta)}}.$$

On peut poser

$$z = \alpha \cos^2 \varphi + \beta \sin^2 \varphi \quad \text{et} \quad k^2 = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \gamma},$$

$k$  étant une quantité réelle et plus petite que l'unité; alors, si l'on désigne par  $u$  l'intégrale elliptique de première espèce dont l'amplitude est  $\varphi$ , et qui a pour module  $k$ , il viendra, d'après la notation de M. Jacobi,

$$\alpha - z = (\alpha - \beta) \sin^2 \text{am } u,$$

$$z - \beta = (\alpha - \beta) \cos^2 \text{am } u,$$

$$\gamma + z = (\alpha + \gamma) \Delta^2 \text{am } u;$$

en représentant par  $K$  l'intégrale complète, et en posant

$$T = \frac{2R}{\sqrt{2g(\alpha + \gamma)}} K,$$

on aura donc

$$u = \frac{K}{T} t \quad \text{et} \quad z = \alpha \cos^2 \text{am } u + \beta \sin^2 \text{am } u.$$

5. Appelons  $k'$  le complément  $\sqrt{1 - k^2}$  du module  $k$ ,  $K'$  l'intégrale complète qui a pour module  $k'$ , et soient

$$q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}, \quad x = \frac{\pi}{2K} u = \frac{\pi}{2T} t;$$

si l'on désigne par  $\Theta(u)$  et par  $H(u)$  les développements très-conver-  
gents

$$(1) \quad \Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = 1 - 2q \cos 2x + 2q^4 \cos 4x - 2q^9 \cos 6x + \dots,$$

$$(2) \quad H\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = 2\sqrt[4]{q} \sin x - 2\sqrt[4]{q^9} \sin 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}} \sin 5x - \dots,$$

et si l'on fait

$$\Theta(K - u) = \Theta_1(u), \quad H(K - u) = H_1(u),$$

on aura [\*]

$$\sin \text{am } u = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H(u)}{\Theta(u)},$$

$$\cos \text{am } u = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{H_1(u)}{\Theta(u)},$$

$$\Delta \text{am } u = \sqrt{k'} \frac{\Theta_1(u)}{\Theta(u)},$$

et, par conséquent,

$$z = \frac{\alpha k' H_1^2(u) + \beta H^2(u)}{k \Theta^2(u)};$$

de sorte que  $z$  est connu en fonction de  $t$ .

6. Le temps que le point matériel emploie pour passer de l'un à

[\*] *Fundamenta nova theoriæ Functionum ellipticarum* de M. Jacobi, page 183.

l'autre des deux plans horizontaux, qui limitent le mouvement dans le sens vertical, est  $T$ . Toutes les fois que  $t$  augmente de  $2T$ ,  $u$  augmente de  $2K$ ; or les formules (1) et (2) donnent

$$\Theta(2K + u) = \Theta(u), \quad H(2K + u) = -H(u);$$

$z$  est donc une fonction périodique du temps, et la période est  $2T$ .

Les mêmes formules donnent encore

$$\Theta(K + u) = \Theta(K - u), \quad H(K + u) = H(K - u);$$

par conséquent,  $z$  prend la même valeur, à des intervalles de temps égaux, avant et après la fin de chaque demi-période.

Pour

$$\operatorname{am} u = \frac{\pi}{4},$$

on a

$$z = \frac{z + \beta}{2},$$

et pour

$$\sin^2 \operatorname{am} u = \frac{1}{1+k'},$$

on a [\*]

$$u = \frac{K}{2} \quad \text{et} \quad z = \frac{\beta + k'\alpha}{1+k'}.$$

Ainsi, au milieu d'une demi-période, le mobile ne se trouve pas à égale distance des deux plans limites, mais au-dessus de cette position.

7. L'expression de  $z$  peut être elle-même développée en série; car, si l'on pose

$$A = \frac{q}{(1-q)^2} + \frac{q^3}{(1-q^3)^2} + \frac{q^5}{(1-q^5)^2} + \dots,$$

$$B = \frac{q}{(1+q)^2} + \frac{q^3}{(1+q^3)^2} + \frac{q^5}{(1+q^5)^2} + \dots,$$

[\*] *Traité des Fonctions elliptiques* de Legendre, tome I<sup>er</sup>.

on aura [\*]

$$\frac{1}{2} \left( \frac{kK}{\pi} \right)^2 \sin^2 \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} = A - \frac{q \cos 2x}{1-q^2} - \frac{2q^2 \cos 4x}{1-q^4} - \frac{3q^3 \cos 6x}{1-q^6} - \dots,$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{kK}{\pi} \right)^2 \cos^2 \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} = B + \frac{q \cos 2x}{1-q^2} + \frac{2q^2 \cos 4x}{1-q^4} + \frac{3q^3 \cos 6x}{1-q^6} + \dots,$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{2} \left( \frac{kK}{\pi} \right)^2 z = A\beta + B\alpha + (\alpha - \beta) \left( \frac{q \cos 2x}{1-q^2} + \frac{2q^2 \cos 4x}{1-q^4} + \frac{3q^3 \cos 6x}{1-q^6} + \dots \right).$$

8. Ce développement sera d'autant plus convergent, que  $\alpha$  différera moins de  $\beta$ , ou que la courbe suivie par le mobile s'écartera moins d'un petit cercle horizontal; mais lorsque  $c$  sera voisin de zéro, et  $h$  de  $-R$ , c'est-à-dire lorsque le mobile décrira sensiblement, d'un mouvement très-lent, le grand cercle vertical qui passe par le point de départ, il sera plus avantageux de développer la valeur de  $z$  suivant les puissances de la quantité

$$q' = e^{-\pi \frac{K}{K'}} = e^{\frac{\pi^2}{\log q}},$$

qui sera alors peu différente de zéro. Or, à cause de la formule [\*\*]

$$\cos \operatorname{am}(u, k) = \sec \operatorname{am}(iu, k'),$$

dans laquelle  $i$  représente le radical imaginaire  $\sqrt{-1}$ , cette valeur de  $z$  peut s'écrire

$$z = \beta + (\alpha - \beta) \sec^2 \operatorname{am}(iu, k');$$

on a, d'ailleurs [\*\*\*],

$$\frac{1}{2} \left( \frac{k'K}{\pi} \right)^2 \sec^2 \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} = -B + \frac{1}{8 \cos^2 x} + \frac{q^2 \cos 2x}{1-q^2} - \frac{2q^4 \cos 4x}{1-q^4} + \frac{3q^6 \cos 6x}{1-q^6} - \dots$$

Si l'on combine cette équation avec la précédente, après avoir rem-

[\*] *Fundamenta nova, etc.*, page 110.

[\*\*] *Fundamenta nova, etc.*, page 34.

[\*\*\*] *Fundamenta nova, etc.*, page 113.

placé  $x$  par  $\frac{\pi u}{2K}$ , puis  $u$  par  $iu$ , et  $k$  par  $k'$ , on trouvera, en tenant compte de la relation

$$2 \cos \frac{ni\pi u}{2K'} = e^{\frac{n\pi u}{2K'}} + e^{-\frac{n\pi u}{2K'}} = q'^{-\frac{x}{\pi}} + q'^{\frac{x}{\pi}},$$

et en représentant par  $B'$  ce que devient  $B$ , lorsqu'on y met  $q'$  au lieu de  $q$ ,

$$\begin{aligned} \left(\frac{kK'}{\pi}\right)^2 \frac{z-\beta}{z-\beta} = & -2B' + \frac{1}{\left(q'^{-\frac{x}{\pi}} + q'^{\frac{x}{\pi}}\right)^2} + q'^2 \frac{q'^{-\frac{2x}{\pi}} + q'^{\frac{2x}{\pi}}}{1-q'^2} \\ & - 2q'^4 \frac{q'^{-\frac{4x}{\pi}} + q'^{\frac{4x}{\pi}}}{1-q'^4} + 3q'^6 \frac{q'^{-\frac{6x}{\pi}} + q'^{\frac{6x}{\pi}}}{1-q'^6} - \dots \end{aligned}$$

*Calcul de l'angle  $\psi$ .*

9. De l'équation que fournit le principe des aires, appliqué au plan horizontal, savoir,

$$r^2 \frac{d\psi}{dt} = G',$$

on tire, en remplaçant  $r^2$  ou  $R^2 - z^2$  et  $dt$  par leurs valeurs,

$$d\psi = \frac{c}{\sqrt{\alpha + \gamma}} \frac{2R du}{[R + \alpha - (\alpha - \beta) \sin^2 am u][R - \alpha + (\alpha - \beta) \sin^2 am u]}.$$

Si l'on intègre, après avoir décomposé en fractions simples, on aura donc

$$\begin{aligned} \psi = & \frac{c}{\sqrt{\alpha + \gamma}} \int_0^u \frac{du}{R + \alpha - (\alpha - \beta) \sin^2 am u} \\ & + \frac{c}{\sqrt{\alpha + \gamma}} \int_0^u \frac{du}{R - \alpha + (\alpha - \beta) \sin^2 am u}. \end{aligned}$$

Dans le coefficient de la première intégrale, remplaçons la constante  $c$  par sa valeur

$$c = \sqrt{(R + \alpha)(R + \beta)(\gamma - R)},$$

déduite de l'équation

$$(3) \quad (R^2 - z^2)(z - h) - c^2 = (\gamma + z)(\alpha - z)(z - \beta),$$

en y faisant  $z = -R$ , et décomposons la fraction, qui est sous le signe somme, en deux autres, dont l'une ait en numérateur  $\sin^2 \operatorname{amp} u$ ; cette intégrale deviendra

$$\frac{\sqrt{(\gamma - R)(R + \beta)}}{\sqrt{(\alpha + \gamma)(R + \alpha)}} u + \frac{(\alpha - \beta)\sqrt{(\gamma - R)(R + \beta)}}{(R + \alpha)\sqrt{(\gamma + \alpha)(R + \alpha)}} \int_0^u \frac{\sin^2 \operatorname{am} u \, du}{1 - \frac{\alpha - \beta}{R + \alpha} \sin^2 \operatorname{am} u}.$$

Or, soit  $\mu$  un angle compris entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ , et tel que l'on ait

$$\operatorname{tang} \mu = \sqrt{\frac{\gamma - R}{R + \beta}},$$

si l'on pose

$$a = \int_0^\mu \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}},$$

on aura

$$\sin \operatorname{am}(a, k') = \sqrt{\frac{\gamma - R}{\beta + \gamma}},$$

$$\cos \operatorname{am}(a, k') = \sqrt{\frac{R + \beta}{\beta + \gamma}},$$

$$\Delta \operatorname{am}(a, k') = \sqrt{\frac{R + \alpha}{\alpha + \gamma}};$$

les formules [\*]

$$\sin \operatorname{am}(iu) = i \operatorname{tang} \operatorname{am}(u, k'),$$

$$\cos \operatorname{am}(iu) = \frac{1}{\cos \operatorname{am}(u, k')},$$

$$\Delta \operatorname{am}(iu) = \frac{\Delta \operatorname{am}(u, k')}{\cos \operatorname{am}(u, k')},$$

donneront donc ici

$$\sin \operatorname{am}(ia) = i \sqrt{\frac{\gamma - R}{R + \beta}},$$

$$\cos \operatorname{am}(ia) = \sqrt{\frac{\beta + \gamma}{R + \beta}},$$

$$\Delta \operatorname{am}(ia) = k' \sqrt{\frac{R + \alpha}{R + \beta}}.$$

---

[\*] *Fundamenta nova, etc.*, page 34.

D'ailleurs, si l'on applique aux intégrales  $ia$  et  $K$  les formules d'addition, on trouve

$$\begin{aligned}\sin \operatorname{am} (ia + K) &= \frac{\cos \operatorname{am} (ia)}{\Delta \operatorname{am} (ia)}, \\ \cos \operatorname{am} (ia + K) &= -\frac{k' \sin \operatorname{am} (ia)}{\Delta \operatorname{am} (ia)}, \\ \Delta \operatorname{am} (ia + K) &= \frac{k'}{\Delta \operatorname{am} (ia)};\end{aligned}$$

ou bien, en ayant égard aux valeurs précédentes,

$$\begin{aligned}\sin \operatorname{am} (ia + K) &= \sqrt{\frac{\alpha + \gamma}{R + \alpha}}, \\ \cos \operatorname{am} (ia + K) &= -i \sqrt{\frac{\gamma - R}{R + \alpha}}, \\ \Delta \operatorname{am} (ia + K) &= \sqrt{\frac{R + \beta}{R + \alpha}}.\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{(\gamma - R)(R + \beta)}}{\sqrt{(\alpha + \gamma)(R + \alpha)}} &= \frac{i \cos \operatorname{am} (ia + K) \Delta \operatorname{am} (ia + K)}{\sin \operatorname{am} (ia + K)}, \\ \frac{\alpha - \beta}{R + \alpha} &= k^2 \sin^2 \operatorname{am} (ia + K),\end{aligned}$$

$$\frac{(\alpha - \beta)\sqrt{(\gamma - R)(R + \beta)}}{(R + \alpha)\sqrt{(\gamma + \alpha)(R + \alpha)}} = ik^2 \sin \operatorname{am} (ia + K) \cos \operatorname{am} (ia + K) \Delta \operatorname{am} (ia + K);$$

et si l'on pose, avec M. Jacobi,

$$\Pi(u, a) = \int_0^u \frac{k^2 \sin \operatorname{am} a \cos \operatorname{am} a \Delta \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} u \, du}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} u},$$

l'intégrale ci-dessus deviendra

$$\frac{i \cos \operatorname{am} (ia + K) \Delta \operatorname{am} (ia + K)}{\sin \operatorname{am} (ia + K)} + i \Pi(u, ia + K).$$

La formule qui exprime les fonctions  $\Pi$ , au moyen de la transcendente  $\Theta$ , est [\*]

$$\Pi(u, a) = \frac{d \log \Theta(a)}{da} u + \frac{1}{2} \log \frac{\Theta(u - a)}{\Theta(u + a)};$$

---

[\*] *Fundamenta nova, etc.*, page 146.

on a d'ailleurs

$$\begin{aligned} \frac{i \cos \operatorname{am}(ia + K) \Delta \operatorname{am}(ia + K)}{\sin \operatorname{am}(ia + K)} &= \frac{d \log \sin \operatorname{am}(ia + K)}{da} \\ &= \frac{d \log H_1(ia)}{da} - \frac{d \log \Theta_1(ia)}{da}. \end{aligned}$$

En effectuant les substitutions, on trouvera donc, pour la première intégrale,

$$\frac{d \log H_1(ia)}{da} u - \frac{1}{2i} \log \frac{\Theta_1(u - ia)}{\Theta_1(u + ia)}.$$

La seconde intégrale se calcule d'une manière analogue; seulement il faut prendre, pour la constante  $c$ , l'expression

$$c = \sqrt{(R - \alpha)(R - \beta)(\gamma + R)},$$

obtenue en faisant  $z = R$  dans l'équation (3), et donner au paramètre la forme  $-k^2 \sin^2 \operatorname{am}(ia_1)$ ; à cet effet, on pose

$$\operatorname{tang} \mu_1 = \sqrt{\frac{\alpha + \gamma}{R - \alpha}}, \quad a_1 = \int_0^{\mu_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}},$$

$\mu_1$  étant un angle compris entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ , et l'on obtient pour dernier résultat

$$\frac{d \log H_1(ia_1)}{da_1} u + \frac{1}{2i} \log \frac{\Theta(u + ia_1)}{\Theta(u - ia_1)}.$$

L'angle  $\psi$  étant la somme des deux intégrales, si l'on pose

$$\begin{aligned} \frac{\Psi}{K} &= \frac{d \log H_1(ia_1)}{da_1} + \frac{d \log H_1(ia)}{da}, \\ \Psi' &= \frac{1}{2i} \log \frac{\Theta(u + ia_1)}{\Theta(u - ia_1)} - \frac{1}{2i} \log \frac{\Theta_1(u - ia)}{\Theta_1(u + ia)}, \end{aligned}$$

on aura

$$\psi = \frac{\Psi}{K} u + \Psi'.$$

**10.** Puisque  $\Theta(u)$  et  $\Theta_1(u)$  conservent leurs valeurs lorsque  $u$  augmente de  $2K$ ,  $\Psi'$  est une fonction périodique du temps. L'angle  $\psi$  se compose donc d'une partie proportionnelle au temps et d'une par-

tie périodique; et si l'on imagine que, dans le plan horizontal, sur lequel est projetée la courbe décrite par le mobile, l'axe polaire tourne autour du centre de la sphère avec une vitesse angulaire constante  $\frac{\Psi}{T}$ , le rayon vecteur de la projection oscillera de part et d'autre de cette droite. Pour  $t = 0, T, 2T, 3T$ , etc., on a  $\psi' = 0$ ; de plus, pour deux valeurs de  $t$  égales à un multiple quelconque de  $T$ , augmenté ou diminué de la même quantité,  $\psi'$  prend deux valeurs égales et de signes contraires. Ainsi, à la fin de chaque demi-période, le rayon vecteur est revenu coïncider avec l'axe mobile, dont il s'était d'abord écarté, et pendant la demi-période suivante, il exécute le même mouvement, mais de l'autre côté de cette droite, les écarts se reproduisant symétriquement et dans un ordre inverse.

De la fin d'une demi-période au commencement de la demi-période suivante, l'angle décrit réellement par le rayon vecteur est  $\Psi$ .

II. Pour obtenir le développement en série de  $\frac{\Psi}{K}$ , faisons

$$\frac{2Kx}{\pi} = ia,$$

dans la formule [\*]

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} H\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) \\ = \frac{2\sqrt[4]{q}\Theta(0)}{[(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\dots]^2} \sin x(1-2q^2\cos 2x+q^4)(1-2q^4\cos 2x+q^8)(1-2q^6\cos 2x+q^{12})\dots, \end{array} \right.$$

et posons

$$a_i = b_i K',$$

$b_i$  étant un nombre compris entre zéro et l'unité. Nous aurons, en remplaçant les cosinus d'arcs imaginaires par des exponentielles,

$$H(ia_i) = \frac{i\sqrt[4]{q}\Theta(0)}{[(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\dots]^2} q^{-\frac{b_i}{2}} (1-q^{b_i})(1-q^{2-b_i})(1-q^{2+b_i})(1-q^{4-b_i})(1-q^{4+b_i})\dots$$

Si l'on prend les logarithmes, et qu'on dérive par rapport à  $a_i$ , il

[\*] *Fundamenta nova, etc.*, page 172.

viendra

$$\frac{d \log \mathbf{H}_1(ia_1)}{da_1} = \frac{\pi}{\mathbf{K}} \left( \frac{1}{2} + \frac{q^{b_1}}{1-q^{b_1}} - \frac{q^{2-b_1}}{1-q^{2-b_1}} + \frac{q^{2+b_1}}{1-q^{2+b_1}} - \frac{q^{4-b_1}}{1-q^{4-b_1}} + \frac{q^{4+b_1}}{1-q^{4+b_1}} - \dots \right).$$

De cette expression, on déduit celle de  $\frac{d \log \mathbf{H}_1(ia)}{da}$ , en remplaçant  $ia_1$  par  $\mathbf{K} - ia$ , ou  $b_1$  par  $\frac{i\pi}{\log q} - b$ ; et comme on a

$$\pm i\pi = \log(-1),$$

cela revient à remplacer  $q^{b_1}$  par  $-q^b$ , et  $q^{-b_1}$  par  $-q^{-b}$ . On trouvera donc

$$\frac{d \log \mathbf{H}_1(ia)}{da} = \frac{\pi}{\mathbf{K}} \left( \frac{1}{2} - \frac{q^b}{1+q^b} + \frac{q^{2-b}}{1+q^{2-b}} - \frac{q^{2+b}}{1+q^{2+b}} + \frac{q^{4-b}}{1+q^{4-b}} - \frac{q^{4+b}}{1+q^{4+b}} + \dots \right).$$

La somme de ces deux séries surpasse  $\frac{\pi}{2\mathbf{K}}$ ; ainsi, l'angle que nous avons représenté par  $\Psi$  est toujours plus grand que  $\frac{\pi}{2}$ . C'est ce qui a été démontré d'une autre manière par M. Puiseux [\*].

**12.** Outre les développements qui précèdent, il convient d'en avoir d'autres, suivant les puissances de  $q'$ , pour le cas où le module  $k$  serait voisin de l'unité. Les formules [\*\*]

$$(5) \quad \begin{cases} \mathbf{H}(iu, h) = i \sqrt{\frac{\mathbf{K}}{\mathbf{K}'}} e^{\frac{\pi u^2}{4\mathbf{K}\mathbf{K}'}} \mathbf{H}(u, k'), \\ \mathbf{H}_1(iu, k) = \sqrt{\frac{\mathbf{K}}{\mathbf{K}'}} e^{\frac{\pi u^2}{4\mathbf{K}\mathbf{K}'}} \Theta(u, k'), \end{cases}$$

[\*] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, tome VII.

[\*\*] *Fundamenta nova*, etc., page 175.

jointes à l'équation (4), et à la suivante [\*],

$$6) \left\{ \begin{aligned} & \Theta \left( \frac{2Kx}{\pi} \right) \\ & = \frac{\Theta(0)}{[(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\dots]^2} (1-2q \cos 2x + q^2)(1-2q^3 \cos 2x + q^6)(1-2q^5 \cos 2x + q^{10})\dots \end{aligned} \right.$$

permettent d'obtenir ces nouveaux développements, et donnent

$$\begin{aligned} \frac{d \log H_1(ia_1)}{da_1} &= \frac{\pi b_1}{2K} + \frac{\pi}{2K'} \cot \frac{\pi b_1}{2} \\ &+ \frac{2\pi}{K'} \sin \pi b_1 \left( \frac{q'^2}{1-2q'^2 \cos \pi b_1 + q'^4} + \frac{q'^6}{1-2q'^6 \cos \pi b_1 + q'^{12}} + \dots \right), \\ \frac{d \log H_1(ia)}{da} &= \frac{\pi b}{2K} \\ &+ \frac{2\pi}{K'} \sin \pi b \cdot \left( \frac{q'}{1-2q' \cos \pi b + q'^2} + \frac{q'^3}{1-2q'^3 \cos \pi b + q'^6} + \dots \right). \end{aligned}$$

13. Chacun des facteurs du second membre de l'équation (6) peut s'écrire

$$1 - 2q^n \cos 2x + q^{2n} = (1 - q^n e^{2ix})(1 - q^n e^{-2ix}),$$

$n$  étant un nombre entier quelconque. En remplaçant  $x$  par  $x + \frac{b_1}{2i} \log q$ , pour obtenir  $\Theta(u + ia_1)$ , et par  $x - \frac{b_1}{2i} \log q$ , pour obtenir  $\Theta(u - ia_1)$ , puis, en divisant le premier résultat par le second, on trouve

$$\frac{1 - q^{n-b_1} e^{-2ix}}{1 - q^{n-b_1} e^{2ix}} \cdot \frac{1 - q^{n+b_1} e^{2ix}}{1 - q^{n+b_1} e^{-2ix}};$$

or, si on représente la première de ces deux fractions par  $e^{2iy}$ , et la seconde par  $e^{-2iy_1}$ , il viendra

$$\begin{aligned} y &= \text{arc tang} \frac{q^{n-b_1} \sin 2x}{1 - q^{n-b_1} \cos 2x}, \\ y_1 &= \text{arc tang} \frac{q^{n+b_1} \sin 2x}{1 - q^{n+b_1} \cos 2x}. \end{aligned}$$

[\*] *Fundamenta nova, etc.*, page 172.

on a donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i} \log \frac{\Theta(u+ia_1)}{\Theta(u-ia_1)} &= \text{arc tang} \frac{q^{1-b_1} \sin 2x}{1-q^{1-b_1} \cos 2x} \\ &+ \text{arc tang} \frac{q^{3-b_1} \sin 2x}{1-q^{3-b_1} \cos 2x} + \text{arc tang} \frac{q^{5-b_1} \sin 2x}{1-q^{5-b_1} \cos 2x} + \dots \\ &- \text{arc tang} \frac{q^{1+b_1} \sin 2x}{1-q^{1+b_1} \cos 2x} - \text{arc tang} \frac{q^{3+b_1} \sin 2x}{1-q^{3+b_1} \cos 2x} \\ &- \text{arc tang} \frac{q^{5+b_1} \sin 2x}{1-q^{5+b_1} \cos 2x} - \dots \end{aligned}$$

L'autre développement peut se déduire de celui-ci, en y remplaçant  $u$  par  $K - u$ , ou  $x$  par  $\frac{\pi}{2} - x$ , ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i} \log \frac{\Theta_1(u-ia)}{\Theta_1(u+ia)} &= \text{arc tang} \frac{q^{1-b} \sin 2x}{1+q^{1-b} \cos 2x} \\ &+ \text{arc tang} \frac{q^{3-b} \sin 2x}{1+q^{3-b} \cos 2x} + \text{arc tang} \frac{q^{5-b} \sin 2x}{1+q^{5-b} \cos 2x} + \dots \\ &- \text{arc tang} \frac{q^{1+b} \sin 2x}{1+q^{1+b} \cos 2x} - \text{arc tang} \frac{q^{3+b} \sin 2x}{1+q^{3+b} \cos 2x} \\ &- \text{arc tang} \frac{q^{5+b} \sin 2x}{1+q^{5+b} \cos 2x} - \dots \end{aligned}$$

Comme on a, à l'origine du temps,  $x = 0$  et  $\psi' = 0$ , on peut prendre pour chacun des arcs qui entrent dans ces formules, celui qui s'annule en même temps que  $x$ .

14. Si l'on calcule  $\text{tang}^2 \mu_1 - \text{tang}^2 \mu$ , en ayant égard à la valeur  $\frac{R^2 + \alpha \beta}{\alpha + \beta}$  de  $\gamma$ , on obtient un résultat qui est évidemment positif; on a donc toujours  $\mu_1 > \mu$ , et, par conséquent,  $b_1 > b$ . De là on conclut que la première des deux séries du numéro précédent l'emporte sur la seconde, lorsque  $t$ , abstraction faite des périodes, est compris entre zéro et  $\frac{T}{2}$ ; l'angle  $\psi'$ , qui est la différence entre les deux séries, est alors positif. Ainsi, pendant la première moitié du temps que le corps emploie à monter, le grand cercle vertical qui le contient est en avance sur le plan qui tournerait autour de l'axe des  $z$  avec la vitesse angulaire constante  $\frac{\Psi}{T}$ ; le contraire a lieu pendant la seconde moitié du temps que le corps emploie à descendre. Dans l'intervalle, si le sommet le plus élevé de la courbe décrite par le mobile appartient à l'hémisphère inférieur, l'écart ne changera de sens qu'au moment où ce

sommet sera atteint; c'est ce qu'on peut établir par des considérations géométriques.

Le premier terme de la première série atteint son maximum lorsqu'on a  $\cos 2x = q^{1-b_1}$ , et devient alors  $\arcsin q^{1-b_1}$ ; l'écart est donc toujours moindre que  $\arcsin q^{1-b_1}$ , et, à plus forte raison, que  $\frac{\pi}{2}$ .

En prenant la dérivée de  $\psi'$  par rapport à  $t$ , on obtiendrait la vitesse angulaire du mouvement d'oscillation; cette dérivée est négative pour  $x = \frac{\pi}{4}$ ; par conséquent, au milieu de la première demi-période, l'écart va déjà en décroissant. Elle est aussi négative pour  $x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ ; mais, comme alors  $\psi'$  est lui-même négatif, ce signe indique qu'au milieu de la seconde demi-période, l'écart n'a pas encore atteint son *maximum*.

15. On peut trouver, au moyen de la seconde des équations (5), les séries dont il faudrait se servir pour calculer  $\psi'$ , si  $k$  était voisin de l'unité. On tire de cette équation

$$\frac{1}{2i} \log \frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)} = -\frac{\pi a_1 u}{2KK'} + \frac{1}{2i} \log \frac{H_1(a_1-iu, k')}{H_1(a_1+iu, k')}.$$

et il vient, en développant,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i} \log \frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)} &= \arctan \left( \frac{q'^{\frac{x}{\pi}} - q'^{\frac{x}{\pi}} \operatorname{tang} \frac{\pi b_1}{2}}{q'^{\frac{x}{\pi}} + q'^{\frac{x}{\pi}}} \right) \\ &- b_1 x + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \arctan \frac{\sin \pi b_1 q'^{\frac{2n-2x}{\pi}}}{1 + \cos \pi b_1 q'^{\frac{2n-2x}{\pi}}} - \arctan \frac{\sin \pi b_1 q'^{\frac{2n+2x}{\pi}}}{1 + \cos \pi b_1 q'^{\frac{2n+2x}{\pi}}} \right). \end{aligned}$$

En remplaçant, dans cette formule,  $x$  par  $\frac{\pi}{2} - x$ , et  $a$ , par  $a$ , on aura aussi

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2i} \log \frac{\Theta_1(u-ia)}{\Theta_1(u+ia)} \\ &= bx - \sum_{n=0}^{\infty} \left( \arctan \frac{\sin \pi b q'^{\frac{2n+1-2x}{\pi}}}{1 + \cos \pi b q'^{\frac{2n+1-2x}{\pi}}} - \arctan \frac{\sin \pi b q'^{\frac{2n+1+2x}{\pi}}}{1 + \cos \pi b q'^{\frac{2n+1+2x}{\pi}}} \right). \end{aligned}$$

16. De la valeur trouvée pour l'angle  $\psi'$ , on déduit

$$e^{2i\psi'} = \frac{\Theta(u+ia_1)\Theta_1(u+ia)}{\Theta(u-ia_1)\Theta_1(u-ia)}$$

si l'on pose

$$R^2 = \Theta(u+ia_1)\Theta(u-ia_1)\Theta_1(u+ia)\Theta_1(u-ia),$$

il viendra donc, pour les lignes trigonométriques de cet angle,

$$\sin \psi' = \frac{\Theta(u+ia_1)\Theta_1(u+ia) - \Theta(u-ia_1)\Theta_1(u-ia)}{2iR},$$

$$\cos \psi' = \frac{\Theta_1(u+ia_1)\Theta_1(u+ia) + \Theta(u-ia_1)\Theta_1(u-ia)}{2R},$$

$$\text{tang } \psi' = \frac{1}{i} \frac{\Theta(u+ia_1)\Theta_1(u+ia) - \Theta(u-ia_1)\Theta_1(u-ia)}{\Theta(u+ia_1)\Theta_1(u+ia) + \Theta(u-ia_1)\Theta_1(u-ia)}.$$

En appliquant la formule (1) aux fonctions  $(\Theta)$ , qui entrent dans ces expressions, et en posant

$$P_1 = 1 - q^{1-b_1}(1+q^{2b_1})\cos 2x + q^{4-2b_1}(1+q^{4b_1})\cos 4x - q^{9-3b_1}(1+q^{6b_1})\cos 6x + \dots,$$

$$Q_1 = q^{1-b_1}(1-q^{2b_1})\sin 2x - q^{4-2b_1}(1-q^{4b_1})\sin 4x + q^{9-3b_1}(1-q^{6b_1})\sin 6x - \dots,$$

$$P = 1 + q^{1-b}(1+q^{2b})\cos 2x + q^{4-2b}(1+q^{4b})\cos 4x + q^{9-3b}(1+q^{6b})\sin 6x + \dots,$$

$$Q = q^{1-b}(1-q^{2b})\sin 2x + q^{4-2b}(1+q^{4b})\sin 4x + q^{9-3b}(1-q^{6b})\sin 6x + \dots,$$

on trouvera

$$R^2 = (P^2 + Q^2)(P_1^2 + Q_1^2), \quad \sin \psi' = \frac{PQ_1 - QP_1}{R},$$

$$\cos \psi' = \frac{PP_1 + QQ_1}{R}, \quad \text{tang } \psi' = \frac{PQ_1 - QP_1}{PP_1 + QQ_1}.$$

On obtiendrait des développements suivant les puissances de  $q'$ , pour le cas où  $q$  serait voisin de l'unité, en partant de la double for-

mule

$$\Theta(u \pm ia, k) = \sqrt{\frac{K}{K'}} e^{-\frac{\pi(u \pm ia)^2}{4KK'}} H_1(a \mp iu, k'),$$

qui est donnée par l'équation (5).

17. Le mobile étant rapporté à l'axe des  $z$  et à deux axes horizontaux des  $x'$  et des  $y'$  perpendiculaires entre eux, et passant par le centre de la sphère, on aurait

$$x' = r \cos \psi', \quad y' = r \sin \psi',$$

et les trois coordonnées seraient des fonctions périodiques du temps, si les deux derniers axes tournaient autour de l'origine avec la vitesse angulaire  $\frac{\Psi}{T}$ . L'abscisse et l'ordonnée seraient

$$x = x' \cos \frac{\Psi}{T} t - y' \sin \frac{\Psi}{T} t, \quad y = y' \cos \frac{\Psi}{T} t + x' \sin \frac{\Psi}{T} t,$$

si l'on prenait deux axes fixes, dont le premier fût situé dans le plan du grand cercle vertical qui passe par le point de départ.

#### Calcul de l'arc $s$ .

18. La vitesse du mobile, à un instant quelconque, est, en fonction de  $u$ ,

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2g} \sqrt{\gamma - \beta - (\alpha - \beta) \sin^2 \text{am } u};$$

de cette équation on tire, en remplaçant  $dt$  par sa valeur proportionnelle à  $du$ , et en intégrant,

$$\frac{s}{2R} = \sqrt{\frac{\gamma - \beta}{\alpha + \gamma}} \int_0^u \sqrt{1 - \frac{\alpha - \beta}{\gamma - \beta} \sin^2 \text{am } u} du.$$

Pour ramener cette expression aux fonctions elliptiques, posons

$$l^2 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\gamma^2 - \beta^2}$$

et

$$(7) \quad \text{am}(v, l) = \frac{\pi}{2} - \text{coam}(u, k);$$

nous aurons, en différentiant,

$$\Delta \operatorname{coam}(u, k) du = \Delta \operatorname{am}(v, l) dv.$$

D'ailleurs, les formules d'addition appliquées aux deux fonctions  $k$  et  $u - k$  donnent

$$\sin \operatorname{am} u = \frac{\cos \operatorname{coam} u}{\Delta \operatorname{coam} u};$$

on peut donc obtenir  $\sin \operatorname{am} u$  et  $du$ , en fonction de  $v$ , au moyen de l'équation (7). Si l'on effectue les substitutions dans la valeur de  $\frac{s}{2R}$ , on trouvera

$$\frac{s}{2R} = \frac{kk'}{\sqrt{k^2 + k'^2 l^2}} \int_0^v \frac{\Delta^2 \operatorname{am}(v, l)}{k'^2 + k^2 \sin^2 \operatorname{am}(v, l)} dv;$$

puis, en posant

$$l'^2 = 1 - l^2, \quad \operatorname{tang} v = \frac{k}{k'l} \quad \varepsilon = \int_0^v \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - l'^2 \sin^2 \varphi}},$$

et en appliquant la formule relative aux fonctions II,

$$\frac{s}{2R} = \frac{d \log H_1(i\varepsilon)}{d\varepsilon} v + \frac{1}{2i} \log \frac{\Theta(v + i\varepsilon)}{\Theta(v - i\varepsilon)}.$$

19. La quantité auxiliaire  $v$  n'est pas, comme  $u$ , proportionnelle au temps; mais c'est une intégrale elliptique de première espèce, dont on connaît le module  $l$ , et dont l'amplitude est donnée par l'équation (7). En vertu de cette équation, le développement de  $\operatorname{am}(v, l)$  s'obtiendra, en remplaçant dans la formule[\*]

$$\operatorname{am} \frac{(2Kx)}{\pi} = x + \frac{2q \sin 2x}{1+q^2} + \frac{2q^2 \sin 4x}{2(1+q^4)} + \frac{2q^3 \sin 6x}{3(1+q^6)} + \dots,$$

$x$  par  $x - \frac{\pi}{2}$ , et en ajoutant  $\frac{\pi}{2}$  au second membre, ce qui donnera

$$\operatorname{am}(v, l) = x - \frac{2q \sin 2x}{1+q^2} - \frac{2q^2 \sin 4x}{2(1+q^4)} - \frac{2q^3 \sin 6x}{3(1+q^6)} - \dots$$

[\*] *Fundamenta nova, etc.*, page 102.

20. On a en même temps  $u = 0$  et  $v = 0$ ,  $u = K$  et  $v = L$ ,  $L$  représentant la fonction complète dont le module est  $l$ ; de plus, si  $u$  augmente de  $2K$ ,  $v$  augmentera de  $2L$ , de sorte que l'expression  $\frac{v}{L} - \frac{u}{K}$  ne change pas, lorsque le temps augmente de  $2T$ . On a donc

$$v = \frac{L}{K} u + v',$$

$v'$  étant une fonction périodique du temps. Pour la même raison, la valeur de  $\frac{1}{2i} \log \frac{\Theta(v+i\varepsilon)}{\Theta(v-i\varepsilon)}$  ne change pas, lorsque  $t$  augmente de  $2T$ ; par conséquent, si on pose

$$S = 2Ri \frac{d \log \Theta_1(i\varepsilon)}{d\varepsilon}, \quad s' = \frac{S}{L} v' + \frac{R}{i} \log \frac{\Theta(v+i\varepsilon)}{\Theta(v-i\varepsilon)},$$

d'où il résulte

$$s = \frac{S}{K} u + s',$$

on aura décomposé  $s$  en deux parties, l'une proportionnelle au temps, et l'autre périodique. Ainsi, le mouvement du point matériel, sur la courbe qu'il décrit, est un mouvement d'oscillation périodique, effectué de part et d'autre, d'un point fictif qui glisserait sur cette courbe avec la vitesse constante  $\frac{S}{T}$ .  $S$  représente la longueur de l'arc compris entre deux sommets.

Cette longueur est toujours inférieure à  $\pi R$ , et plus grande que

$$\pi R \frac{e^{\frac{\pi \varepsilon}{L}} - 1}{e^{\frac{\pi \varepsilon}{L}} + 1}.$$

#### *Cas particuliers du mouvement.*

21. Les formules précédemment obtenues s'appliquent aux cas limites.

Supposons d'abord, comme dans le cas traité par Huyghens, que

la vitesse initiale soit dirigée horizontalement, et ait pour valeur

$$v_0 = \sqrt{\frac{g(R^2 - z_0^2)}{z_0}},$$

ce qui suppose que le point de départ appartienne à l'hémisphère inférieure ; il viendra

$$\alpha = z_0 = \beta, \quad k = 0, \quad K = \frac{\pi}{2}, \quad K' = \infty, \quad q = 0;$$

le développement de  $z$ , dans lequel on a

$$A + B = \frac{1}{2} \left( \frac{kK}{\pi} \right)^2,$$

donnera donc

$$z = \alpha,$$

comme on devait s'y attendre.

Il vient aussi

$$b = 0, \quad b_1 = 0;$$

d'où il résulte

$$\psi' = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\Psi}{K} = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{1 - q^b}{1 + q^b} + \lim_{b_1 \rightarrow 0} \frac{1 + q^{b_1}}{1 - q^{b_1}};$$

or, pour  $k = 0$ , on a

$$\frac{1 - q^b}{1 + q^b} = \frac{e^a - e^{-a}}{e^a + e^{-a}} = \frac{1}{i} \operatorname{tang}(ia) = \frac{1}{i} \operatorname{tang} \operatorname{am}(ia).$$

Cette dernière expression peut être remplacée par  $\sin \operatorname{am}(a, k')$ , ou par  $\sin \mu$ ; on aura donc

$$\lim_{b \rightarrow 0} \frac{1 - q^b}{1 + q^b} = \sqrt{\frac{\gamma - R}{\gamma + \alpha}}.$$

On trouvera de même

$$\lim_{b_1 \rightarrow 0} \frac{1 + q^{b_1}}{1 - q^{b_1}} = \frac{1}{\sin \mu_1} = \sqrt{\frac{\gamma + R}{\gamma + \alpha}};$$

d'où il résulte

$$\frac{\Psi}{K} = \frac{2R}{\sqrt{2\alpha(\gamma + \alpha)}} \quad \text{et} \quad \psi = \sqrt{\frac{g}{\alpha}} t;$$

ce qui s'accorde avec les résultats connus [\*].

---

[\*] *Mécanique analytique*, tome II, page 205.

Pour  $\alpha = \beta$ , on a aussi

$$l = 0,$$

et, par conséquent,

$$v = u;$$

il vient, de plus,

$$\frac{d \log H_1(i\varepsilon)}{d\varepsilon} = \sin \nu = \frac{\sqrt{R^2 - \alpha^2}}{\sqrt{2\alpha(\gamma + \alpha)}}, \quad \text{et} \quad s = \sqrt{\frac{g}{\alpha}(R^2 - \alpha^2)} t.$$

**22.** Si la vitesse initiale est nulle, ou si elle est tangente à un grand cercle vertical, le mouvement s'effectuera sur la circonférence de ce cercle, et l'on aura

$$\alpha = \gamma = R, \quad \beta = h;$$

d'où

$$T = K \sqrt{\frac{R}{g}}, \quad u = \sqrt{\frac{g}{R}} t, \quad z = R - (R - h) \sin^2 \text{am } u;$$

c'est le cas du pendule circulaire. Il n'y a pas lieu alors à chercher l'angle  $\psi$ .

L'arc  $s$  se calculera en faisant  $l' = 0$  dans les développements qui ont été donnés pour le cas où le module serait voisin de l'unité; ces développements deviendront

$$\frac{d \log H_1(i\varepsilon)}{d\varepsilon} = 0, \quad \frac{1}{2i} \log \frac{\Theta(v + i\varepsilon)}{\Theta(v - i\varepsilon)} = \lim \text{arc tang} \left( \frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}} \text{tang} \frac{\pi \varepsilon}{2L'} \right).$$

Or, on a ici

$$\text{tang} \frac{\pi \varepsilon}{2L'} = \frac{k}{k'}, \quad v = \log \text{tang} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\text{am } v}{2} \right) = \log \cot \frac{\text{coam } u}{2}.$$

d'où l'on tire

$$\frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}} = \cos \text{coam } u = \frac{k' \sin \text{am } u}{\Delta \text{am } u};$$

il viendra donc, par la substitution,

$$s = 2R \text{arc sin} (k \sin \text{am } u) = 2R \text{am} \left( ku, \frac{1}{k} \right).$$

**23.** Soit, de plus,  $h = -R$ ; on aura  $k = 1$ ,  $T = \infty$ , de sorte que le mobile s'approchera indéfiniment du point le plus haut de la sphère, où sa vitesse serait nulle, sans jamais l'atteindre; c'est le seul cas où

la périodicité disparaît : alors la quantité auxiliaire  $v$  est nulle, mais le rapport de  $\frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}}$  à  $k'$  reste déterminé en fonction de  $u$ , et il vient

$$z = R \left[ 1 - 2 \left( \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} \right)^2 \right], \quad s = 2 R \operatorname{arc} \sin \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}.$$

*Mouvement d'une ligne matérielle pesante autour d'un de ces points.*

**24.** Le mouvement d'un point matériel pesant sur une sphère serait réalisé en supposant ce point fixé au centre par une ligne inflexible et sans masse. Si l'on ne fait plus abstraction de la masse de cette ligne, les formules données plus haut ne seront pas immédiatement applicables, mais on pourra toujours déterminer sur la tige un point dont le mouvement sera le même que celui d'un pendule simple [\*].

Soient  $m$  la masse d'un point quelconque de la tige,  $w$  sa vitesse,  $\rho$  sa distance au point de suspension,  $\zeta$  la projection sur une verticale de cette distance, comptée dans le sens de la pesanteur ; si l'on appelle  $w_0$  et  $\zeta_0$  les valeurs initiales de  $w$  et de  $\zeta$ , le principe des forces vives donnera

$$(8) \quad \Sigma m (w^2 - w_0^2) = 2g \Sigma m (\zeta - \zeta_0).$$

Considérons un point particulier de la tige, pour lequel les quantités  $\rho$ ,  $\zeta$ ,  $w$ ,  $\zeta_0$  et  $w_0$  soient respectivement égales à  $R$ ,  $z$ ,  $v$ ,  $z_0$  et  $v_0$  ; nous aurons

$$\frac{w}{v} = \frac{w_0}{v_0} = \frac{\zeta}{z} = \frac{\zeta_0}{z_0} = \frac{\rho}{R};$$

de sorte que l'équation (8) deviendra

$$(v^2 - v_0^2) \Sigma m \rho^2 = 2g R (z - z_0) \Sigma m \rho.$$

Or, si l'on désigne par  $f$  la distance du centre de gravité de la tige au point de suspension, par  $M$  la masse de cette tige, et par  $M\lambda^2$  son

---

[\*] Je dois cette remarque à M. Sturm.

moment d'inertie par rapport au centre de gravité, on a

$$\Sigma m\rho^2 = M(f^2 + \lambda^2), \quad \Sigma m\rho = Mf;$$

il vient donc, par la substitution,

$$v^2 = v_0^2 + \frac{2gRf}{f^2 + \lambda^2}(z - z_0).$$

Pour le pendule simple, dont le point considéré formerait l'extrémité, on aurait

$$v^2 = v_0^2 + 2g(z - z_0),$$

et, comme le principe des aires appliqué au point horizontal fournit la même équation dans l'un et l'autre cas, il suffit de prendre, pour satisfaire à la condition énoncée,

$$R = f + \frac{\lambda^2}{f}.$$

On pourra donc appliquer les formules ci-dessus au mouvement du point ainsi déterminé, en y remplaçant  $R$  par  $f + \frac{\lambda^2}{f}$ . Ainsi, dans le plan vertical qui se meut avec lui, le pendule oscille continuellement entre les deux droites qui passent par le point de suspension, et qui font avec la verticale, des angles ayant pour cosinus  $\frac{\alpha}{R}$  et  $\frac{\beta}{R}$ : à des intervalles de temps égaux, avant et après le moment où il coïncide avec l'une de ces droites, il se trouve occuper la même position. Enfin, la projection de la tige, sur le plan horizontal qui passe par le point fixe, et la tige elle-même, dans un des plans tangents au cône décrit par elle, et sur lequel on aurait fait le développement de la surface, sont animées chacune d'un mouvement d'oscillation périodique, de part et d'autre d'une droite tournant, avec une vitesse angulaire constante, autour du point de suspension.

*Mouvement d'un point matériel pesant sur une surface de révolution dont l'axe est vertical.*

**25.** Le mouvement d'un point matériel soumis à la seule action de

la pesanteur, et assujetti à rester sur une surface de révolution qui a son axe vertical, présente des caractères de périodicité, dont l'existence est subordonnée toutefois à la forme de la surface et à la nature des circonstances initiales. Lorsque le mouvement a lieu sur une sphère, la question dépend, comme on l'a vu, des fonctions elliptiques, et les formules auxquelles on est conduit mettent d'elles-mêmes en évidence la périodicité. Mais on peut déterminer les cas dans lesquels elle se produit, et l'établir pour tous ces cas, sans particulariser la surface.

L'axe des  $z$  étant pris sur l'axe de révolution, dans le sens de la pesanteur, et l'axe des  $x$  sur l'une des droites horizontales du méridien qui passe par le point de départ, soient, au bout du temps  $t$ ,  $v$  la vitesse du mobile,  $r$  la projection du rayon vecteur sur le plan des  $xy$ ,  $\psi$  l'angle décrit par cette projection ou par le plan vertical qui tourne avec elle autour de l'axe des  $z$ ,  $\theta$  l'angle que fait dans ce plan, avec une ligne horizontale, la tangente au méridien menée par la position du mobile. Appelons  $v_0$ ,  $z_0$ ,  $r_0$  les valeurs initiales de  $v$ , de  $z$  et de  $r$ , et représentons par  $\omega$  l'angle de la direction de la vitesse initiale avec la tangente au parallèle mené par le point de départ. Si, dans l'équation

$$dz^2 + dr^2 + r^2 d\psi^2 = v^2 dt^2,$$

nous remplaçons  $dr$  et  $d\psi$  par les expressions

$$dr = \cot \theta dz, \quad d\psi = \frac{r_0 v_0 \cos \omega}{r^2} dt,$$

dont la dernière résulte du principe des aires appliqué au plan des  $xy$ , nous aurons

$$(9) \quad \frac{dz}{dt} = \pm \frac{\sin \theta}{r} \sqrt{r^2 v^2 - r_0^2 v_0^2 \cos^2 \omega}.$$

Or, soit

$$x = \varphi(z)$$

l'équation du méridien qui est dans le plan des  $zx$ ; celle de la surface de révolution sera

$$r = \varphi(z);$$

de plus, si l'on pose

$$h = z_0 - \frac{v_0^2}{2g},$$

le principe des forces vives donnera

$$v^2 = 2g(z - h).$$

Le second membre de l'équation (9) peut donc s'exprimer au moyen de  $z$  seulement, et, par une quadrature, on obtiendra  $t$  en fonction de cette variable; l'équation des aires fournira l'angle  $\psi$  par une nouvelle intégration.

26. L'expression ci-dessus de  $\frac{dz}{dt}$ , ne renfermant pas l'angle  $\psi$ , permet de considérer le mouvement du point matériel, sur le méridien qui tourne avec lui autour de l'axe des  $z$ , indépendamment de ce mouvement de rotation. Si l'on pose

$$c^2 = r_0^2(z_0 - h) \cos^2 \omega,$$

cette expression devient

$$\frac{dz}{dt} = \pm \sqrt{2g} \frac{\sin \theta}{r} \sqrt{r^2(z - h) - c^2}.$$

Imaginons que, dans le plan des  $zx$ , on construise la courbe qui a pour équation

$$x^2(z - h) = c^2;$$

cette courbe se composera de deux branches E et E' symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe des  $z$ , tournant leur convexité vers l'origine, et ayant pour asymptotes l'axe des  $z$  et une parallèle H à l'axe des  $x$ , menée à la distance  $h$ , au-dessous de laquelle elles seront situées. Puisque l'on a

$$r_0^2(z_0 - h) - c^2 > 0,$$

le point de départ du mobile se trouve dans la concavité de l'une des deux branches, de E par exemple; cela posé, il faut considérer trois cas :

1°. La portion du méridien, à laquelle appartient le point de

départ, sera une courbe fermée, tracée tout entière dans l'intérieur de E.

2°. Cette courbe, fermée ou non, coupera E en deux points M et N.

3°. On bien enfin, elle s'étendra jusqu'à l'infini, sans rencontrer E, soit d'un seul côté, soit des deux côtés du point de départ.

27. 1°. Dans le premier cas, la vitesse du mobile sur le méridien, savoir :

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\sqrt{2g}}{r} \sqrt{r^2(z-h) - c^2},$$

ne devient jamais nulle, de sorte que ce méridien est décrit tout entier, et toujours dans le même sens, un nombre de fois indéfini. Le temps que le point matériel emploie pour parcourir un arc déterminé  $\sigma$  est, en appelant  $z_1$  et  $z_2$  les valeurs de  $z$  pour les deux extrémités de cet arc,

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\pm r dz}{\sin \theta \sqrt{r^2(z-h) - c^2}},$$

ou une somme d'intégrales analogues, si l'arc  $\sigma$  présente des sommets pour lesquels la tangente soit horizontale. Ces intégrales ont la même valeur à chaque révolution, et, en particulier, le temps employé par le point matériel, pour décrire le méridien tout entier, est une quantité constante  $2T$ . Ce point reprenant donc sur le méridien la même position, après chaque intervalle de temps égal à  $2T$ , on voit que  $z$  et  $r$  sont des fonctions périodiques de  $t$ .

28. L'angle  $\psi$  est donné par l'intégrale

$$\psi = c \sqrt{2g} \int_0^t \frac{dt}{r^2},$$

ou par l'aire de la courbe, dont les points ont pour abscisses les diverses valeurs de  $t$ , et pour ordonnées les valeurs correspondantes de  $\frac{c\sqrt{2g}}{r^2}$ ; par conséquent, si l'on mène une parallèle à l'axe des abscisses, à une distance  $\frac{\Psi}{T}$  telle, que les deux aires situées, l'une au-dessus, l'autre au-dessous de cette parallèle, et comprises entre elle et la

courbe, soient équivalentes, on aura

$$\psi = \frac{\Psi}{T} t + \psi',$$

$\psi'$  prenant la même valeur toutes les fois que  $t$  augmente de  $2T$ . L'angle  $\psi$  se compose donc d'une partie proportionnelle au temps et d'une partie périodique. Cette dernière devient nulle pour  $t = 0, 2T, 4T, \text{etc.}$ , et au moins une fois pendant chaque intervalle; de sorte que le rayon vecteur de la projection du mobile, sur le plan des  $x, y$ , exécute des oscillations périodiques de part et d'autre de la ligne, qui tournerait dans ce plan, et autour de l'origine, avec la vitesse angulaire constante  $\frac{\Psi}{T}$ . L'angle décrit réellement par ce rayon vecteur, pendant la durée d'une période, est

$$2\Psi = c \sqrt{2g} \int_0^{2T} \frac{dt}{r^2}$$

De même, si l'on pose

$$2S = \sqrt{2g} \int_0^{2T} \sqrt{z - h} dt,$$

la longueur de l'arc de courbe parcouru par le mobile, au bout du temps  $t$ , sera

$$s = \frac{S}{T} t + s',$$

$s'$  représentant une fonction périodique du temps.

On peut supposer que l'axe des  $x$  et l'axe des  $y$  participent au mouvement de rotation uniforme qui a pour vitesse angulaire  $\frac{\Psi}{T}$ ; le mouvement du point matériel rapporté à ces axes et à l'axe des  $z$  sera alors complètement périodique.

Pour obtenir la courbe tracée sur la surface, il suffirait de faire tourner autour de l'axe de révolution, un nombre de fois indéfini, et chaque fois de l'angle  $2\Psi$ , la portion qui en a été décrite pendant un intervalle de temps égal à  $2T$ .

**29.** 2°. Dans le second cas, le point matériel oscille continuellement

entre le point M et le point N, sur le méridien qui tourne avec lui autour de l'axe des  $z$ , et le mouvement est encore périodique. De plus, les temps employés à parcourir un arc déterminé de haut en bas, et de bas en haut, sont les mêmes; car, pour passer de l'un à l'autre cas, il faut changer à la fois le signe de  $dz$  et l'ordre des limites de chaque intégrale définie. Le mobile se trouve donc au même point du méridien, à des intervalles de temps égaux, avant et après le moment où il a atteint l'une de ses deux positions extrêmes.

Cette symétrie se reproduit sur la courbe dont l'aire a servi à évaluer l'angle  $\psi$ ; par conséquent, pour deux valeurs de  $t$  égales à un multiple quelconque de  $T$  augmenté ou diminué de la même quantité,  $\psi'$  prend deux valeurs égales et de signes contraires. Ainsi le rayon vecteur de la projection du mobile sur le plan des  $xy$  coïncide, à la fin de chaque intervalle de temps égal à  $T$ , avec la droite qui tourne autour de l'origine d'un mouvement uniforme, et les écarts qui se sont produits pendant une demi-période, se reproduisent symétriquement pendant la demi-période suivante. L'angle décrit réellement par le rayon vecteur, pendant chacune de ces demi-périodes, est

$$\Psi = c \sqrt{2g} \int_0^T \frac{dt}{r^2}.$$

La courbe tracée sur la surface par le point matériel présentera une suite de sommets correspondants aux positions M et N du mobile sur le méridien, et sera divisée par chacun de ces sommets en deux parties symétriques.

30. Il peut se faire que le méridien et la branche E soient tangents en l'un des points M et N, en M par exemple; alors, en représentant par  $\alpha$  la valeur correspondante de  $z$ , et en posant

$$F(z) = \varphi(z)^2 (z - h) - c^2,$$

on aura

$$F(\alpha) = 0, \quad F'(\alpha) = 0,$$

et, suivant que le contact sera du second ordre au moins, ou seulement du premier,

$$F''(\alpha) = 0,$$

ou

$$F'''(\alpha) = 2c\sqrt{\alpha-h}\varphi''(\alpha) - \frac{3}{2}\frac{c^2}{(\alpha-h)^2}.$$

Cette expression ne pourrait devenir infinie qu'autant que l'on aurait

$$\varphi''(\alpha) = \infty;$$

si donc on fait abstraction du cas où le méridien présenterait en M un point singulier, pour lequel on aurait  $\varphi''(z) = \infty$ , en même temps que  $\varphi(z)$  et  $\varphi'(z)$  seraient finis et différents de zéro, le rapport  $\frac{F(z)}{(z-\alpha)}$  restera fini, pour  $z = \alpha$ , quel que soit l'ordre du contact. On en conclut que T est infiniment grand, par conséquent la périodicité disparaît, et le mobile s'approche continuellement du point M, sur le méridien, sans jamais l'atteindre. Comme d'ailleurs l'angle  $\varphi$  croît au delà de toute limite, la courbe tracée sur la surface forme une infinité de spires, qui tendent à se confondre avec le parallèle mené par ce point.

Lorsque le méridien est extérieur à la branche E, et la touche seulement au point de départ, le mobile décrit un parallèle d'un mouvement uniforme.

**51.** 3°. Dans le troisième cas, le mouvement n'offre plus aucun caractère de périodicité, et le point matériel s'éloigne jusqu'à l'infini.