JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. BRASSINNE

Théorème relatif à une classe d'équations différentielles simultanées, analogue à un théorème employé par Lagrange dans la théorie des perturbations

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 16 (1851), p. 283-288.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1851_1_16__283_0>

Théorème relatif à une classe d'équations différentielles simultanées, analogue à un théorème employé par Lagrange dans la théorie des perturbations;

Par M. E. BRASSINNE,
Professeur aux Écoles d'Artillerie.

1. On sait que la méthode générale des perturbations repose sur la théorie de la variation des constantes arbitraires fournies par les intégrations des équations du mouvement elliptique. La variation de chaque constante a pour expression une somme de termes contenant chacun la dérivée de la fonction perturbatrice par rapport à chacune des constantes, cette dérivée étant multipliée par un coefficient d'une forme assez compliquée, et que Lagrange a prouvé être indépendant du temps. Le coefficient du terme qui multiplie la dérivée de la fonction perturbatrice par rapport à la constante dont on cherche la variation est égal à zéro.

L'indépendance de temps, pour chaque coefficient, peut se déduire d'un théorème général de Mécanique que Lagrange démontre dans la *Mécanique analytique*, tome Ier, page 328; reprenons, en la modifiant un peu, la démonstration de Lagrange que nous étendrons ensuite à des équations différentielles d'un ordre supérieur au second.

2. Considérons les trois équations différentielles

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &d\cdot\frac{dz}{d\xi'}-\frac{dz}{d\xi}\,dt=0,\\ &d\cdot\frac{dz}{d\psi'}-\frac{dz}{d\psi}\,dt=0,\\ &d\cdot\frac{dz}{d\varphi'}-\frac{dz}{d\varphi}\,dt=0.\end{aligned}\right.$$

Différentions ces trois équations par rapport à une caractéristique δ

relative à quelques-unes des constantes qui renferment les valeurs des variables ξ, ψ, φ exprimées en fonction du temps, et multiplions la première relation par $\Delta\xi$, la deuxième par $\Delta\psi$, la troisième par $\Delta\varphi$ (Δ est une caractéristique de différentiation relative à d'autres constantes que δ). En ajoutant, on aura pour résultat

$$(2)\qquad \left(\begin{array}{l} \Delta\xi\, d\cdot\frac{\delta.dz}{d\xi'}+\Delta\varphi\,\frac{d.\delta z}{d\psi'}+\Delta\varphi\, d\cdot\frac{\delta.dz}{d\varphi'} \\ -\Delta\xi\,\delta\cdot\frac{dz}{d\xi}-\Delta\psi\,\delta\cdot\frac{dz}{d\psi}-\Delta\varphi\,\delta\cdot\frac{dz}{d\varphi}\end{array}\right)dt=0.$$

Mais, en faisant passer dans les trois premiers termes $\Delta\xi$, $\Delta\psi$, $\Delta\varphi$ sous le signe de différentiation, il suffira de soustraire du premier membre

$$\Delta\xi'\cdot\frac{d.\delta z}{d\xi'}dt+\Delta\psi'\cdot\frac{d.\delta z}{d\psi'}dt+\Delta\varphi'\frac{d.\delta z}{d\varphi'}dt;$$

cette partie soustractive, avec les trois derniers termes négatifs, donnera pour résultat

$$\Delta\,\delta z-\Delta\delta\xi\cdot\frac{d.\delta z}{d.\delta\xi}-\Delta\,\delta\xi'\cdot\frac{d.\delta z}{d.\delta\xi'}-\ldots,$$

en remarquant que δz est une fonction de ξ, ξ', $d\xi$, $d\xi'$, etc.

En exécutant sur les trois équations du groupe (1) des transformations analogues et intervertissant l'ordre des caractéristiques δ et Δ, on trouvera une partie soustractive

$$\delta\Delta z-\delta\Delta\xi\cdot\frac{d.\Delta z}{d.\Delta\xi}-\delta\Delta\xi'\cdot\frac{d.\Delta z}{d.\Delta\xi'}-\ldots,$$

identique à la précédente, puisque dans les coefficients différentiels de la fonction z il est indifférent d'écrire δ ou Δ. Nous arriverons par ces calculs aux deux formules

$$d\cdot\left(\frac{\delta.dz}{d\xi'}\Delta\xi\right)+\ldots-\Delta\delta z-\Delta\delta\xi\cdot\frac{d.\delta z}{d\xi}-\ldots=0,$$

$$d\cdot\left(\frac{\Delta.dz}{\delta\xi'}\delta\xi\right)+\ldots-\delta\Delta z-\delta\Delta\xi\cdot\frac{d.\Delta z}{d.\Delta\xi}-\ldots=0.$$

Leur différence donne la relation de Lagrange

$$(3)\qquad d\cdot\left(\frac{\delta.dz}{d\xi'}\,\Delta\xi-\frac{\Delta.dz}{d\xi'}\,\delta\xi+\ldots\right)=0.$$

3. Pour étendre cette relation à des équations différentielles d'un ordre plus élevé, nous partirons d'une formule de calcul différentiel qu'il est aisé de démontrer. On sait que a et b désignant deux fonctions d'une même variable, la différentielle de l'ordre m du produit ab peut s'écrire ainsi

$$d^m(a.b)=d^m a.b+m\,d^{m-1}a.db+\ldots+a.d^m b.$$

Or cette formule bien connue peut encore prendre cette forme,

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned}&d^m(a.b)=d^m a.b+m\,d^{m-1}(a.db)\\&-\frac{m(m-1)}{1.2}\,d^{m-2}(a.d^2b)+\ldots\pm a.d^m b.\end{aligned}\right.$$

Les coefficients sont ceux du binôme, et les termes, après le premier, sont alternativement positifs et négatifs. A l'exception des deux termes extrêmes, tous les autres sont des différentielles exactes.

Partant de la formule (4), considérons une fonction z de ξ, ψ, φ, ξ', ψ', φ', ξ'', ψ'', φ'' qui satisfasse pour les variables ξ, ψ et φ à des relations, telles que

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned}&\mu\frac{1}{dt^2}d^2\cdot\frac{dz}{d\xi''}+\mu'\frac{1}{dt}d\cdot\frac{dz}{d\xi'}-\frac{dz}{d\xi}=0,\\&\mu\frac{1}{dt^2}d^2\cdot\frac{dz}{d\psi''}+\mu'\frac{1}{dt}d\cdot\frac{dz}{d\psi'}-\frac{dz}{d\psi}=0,\\&\mu\frac{1}{dt^2}d^2\cdot\frac{dz}{d\varphi''}+\mu'\frac{1}{dt}d\cdot\frac{dz}{d\varphi'}-\frac{dz}{d\varphi}=0:\end{aligned}\right.$$

conformément à la notation du calcul des fonctions

$$\xi'=\frac{d\xi}{dt},\quad \xi''=\frac{d\xi'}{dt},\quad \text{etc.};$$

μ et μ' sont égaux à $+1$ ou -1. Il est aisé de prouver que le système des trois équations (5) conduit à une relation analogue à celle de Lagrange. Pour le démontrer, on différentie les trois équations (5) par rapport à la caractéristique δ relative à quelques constantes, et l'on multiplie la première équation de ce groupe par $\Delta\xi$, la deuxième par $\Delta\psi$, la troisième par $\Delta\varphi$. On ajoute ensuite les trois équations, après avoir fait passer $\Delta\xi$, $\Delta\psi$, $\Delta\varphi$ sous les signes de différentiation. On remarque ensuite que, d'après la formule (4),

$$(6)\quad \begin{cases} \frac{1}{dt^2} d^2 \cdot \left(\delta \cdot \frac{dz}{d\xi''} \cdot \Delta\xi\right) = \frac{1}{dt^2} d^2 \cdot \frac{\delta . dz}{d\xi''} \cdot \Delta\xi \\ \qquad\qquad + \frac{2}{dt} d \cdot \left(\delta \cdot \frac{dz}{d\xi''} \cdot \Delta\xi'\right) - \delta \cdot \frac{dz}{d\xi''} \cdot \Delta\xi'', \\ \frac{1}{dt} d \cdot \left(\delta \cdot \frac{dz}{d\xi'} \cdot \Delta\xi\right) = \frac{1}{dt} d \cdot \frac{\delta . dz}{d\xi'} \cdot \Delta\xi + \delta \cdot \frac{dz}{d\xi'} \cdot \Delta\xi'. \end{cases}$$

De là résulte qu'on peut ramener la somme des trois équations à une différentielle exacte, moins une quantité qui a pour expression

$$\delta \cdot \frac{dz}{d\xi''} \Delta\xi' + \delta \cdot \frac{dz}{d\xi'} \Delta\xi' + \delta \cdot \frac{dz}{d\xi} \Delta\xi,$$

en supposant $\mu = -1$ et $\mu' = +1$, ce qu'on voit en prenant la valeur des deux premiers termes des équations (5), multipliés par $\Delta\xi$, $\Delta\psi$, $\Delta\varphi$ au moyen des relations (6). Comme on aurait pour les autres variables des termes soustractifs pareils, on voit que, en considérant δz comme une fonction de ξ, ξ', ξ'', $\delta\xi$, $\delta\xi'$, $\delta\xi''$, etc., le terme soustractif prendra la forme

$$(7)\qquad -\Delta\delta z + \frac{d.\delta z}{d.\delta\xi} \Delta\delta\xi + \frac{d.\delta z}{d.\delta\xi'} \Delta\delta\xi' + \frac{d.\delta z}{d.\delta\xi''} \Delta\delta\xi'' + \ldots$$

Faisant la même suite d'opérations et changeant seulement l'ordre des caractéristiques, on arrivera, après avoir différentié les trois équations par rapport à la caractéristique Δ et avoir multiplié la première par $\delta\xi$, la deuxième par $\delta\psi$, la troisième par $\delta\varphi$, à une somme exprimable par une différentielle exacte, plus un terme de la forme

$$(8)\qquad -\delta\Delta z + \frac{d\,\Delta z}{d.\Delta\xi} \delta\Delta\xi + \frac{d.\Delta z}{d.\Delta\xi'} \delta\Delta\xi' + \ldots,$$

expression équivalente à la somme (7); par suite, la soustraction conduira à une relation indépendante du temps, analogue à celle trouvée par Lagrange.

Considérons enfin l'équation

$$(9)\qquad \mu \frac{1}{dt^m} d^m \cdot \frac{dz}{d\xi^{(m)}} + \mu' \frac{1}{dt^{m-1}} d^{m-1} \cdot \frac{dz}{d\xi^{(m-1)}} + \ldots - \frac{dz}{d\xi} = 0,$$

et deux autres pareilles, relatives aux coordonnées ψ et φ. Nous différentierons les trois équations par rapport à δ, et nous multiplierons la première par $\Delta\xi$, la deuxième par $\Delta\psi$, la troisième par $\Delta\varphi$ dans cette somme, et, au moyen de la formule (4), nous éliminerons le terme $\frac{1}{dt^m} d^m \cdot \frac{\delta z}{d\xi^{(m)}} \cdot \Delta\xi$ en développant $\frac{1}{dt^m} d^m \cdot \left(\frac{\delta z}{d\xi^{(m)}} \cdot \Delta\xi\right)$, et posant

$$a = \frac{\delta z}{d\xi^{(m)}} \quad \text{et} \quad b = \Delta\xi.$$

Par ce procédé, et en donnant à μ, μ', μ'', etc., les valeurs ± 1, ∓ 1, etc., on parviendra à des conclusions analogues et à un théorème général pour les trois équations simultanées de la forme (9).

4. Nous terminerons ce travail par quelques observations relatives au théorème de Lagrange. Supposons que, pour le temps t, on ait

$$\xi = \alpha, \quad \psi = \beta, \quad \varphi = \gamma,$$
$$\frac{dz}{d\xi'} = \lambda, \quad \frac{dz}{d\psi'} = \mu, \quad \frac{dz}{d\varphi'} = \nu;$$

l'intégration des équations du second ordre

$$d \cdot \frac{dz}{d\xi'} - \frac{dz}{d\xi} dt = 0, \quad d \cdot \frac{dz}{d\psi'} - \frac{dz}{d\psi} dt = 0, \quad d \cdot \frac{dz}{d\varphi'} - \frac{dz}{d\varphi} dt = 0,$$

donnera des valeurs pour le temps t' de la forme suivante :

$$\xi = \alpha + \alpha'(t - t') + \alpha''(t - t')^2 + \ldots,$$
$$\psi = \beta + \beta'(t - t') + \beta''(t - t')^2 + \ldots,$$
$$\varphi = \gamma + \gamma'(t - t') + \ldots,$$
$$\frac{dz}{d\xi'} = \lambda + \lambda'(t - t') + \ldots = s,$$
$$\frac{dz}{d\psi'} = \mu + \mu'(t - t') + \ldots = u,$$
$$\frac{dz}{d\varphi'} = \nu + \nu'(t - t') + \ldots = v.$$

Cela posé, la relation de Lagrange, appliquée à ces expressions, donne, en supposant δ relatif à la constante λ et Δ à la constante α,

$$d\cdot\left(\frac{ds}{d\lambda}\cdot\frac{d\xi}{d\alpha}-\frac{ds}{d\alpha}\cdot\frac{d\xi}{d\lambda}+\ldots\right)\delta\alpha\,\delta\lambda=0,$$

ce qui prouve que l'expression entre les parenthèses est indépendante de t, et, par suite, de t', à cause de la forme de ξ, ψ, φ, $\frac{dz}{d\xi'}$, etc. Mais il est clair que α, β, γ, λ, μ, ν peuvent être considérées comme coordonnées ou fonctions de ces coordonnées au temps t', et ξ, ψ, φ, s, u, v comme constantes pour le temps t; on aurait donc aussi

$$d\cdot\left(\frac{d\lambda}{ds}\cdot\frac{d\alpha}{d\xi}-\frac{d\alpha}{ds}\cdot\frac{d\lambda}{d\xi}+\ldots\right)\delta\xi\,\delta s=0,$$

et comme la quantité entre parenthèses est, dans ce cas, indépendante de t', elle est aussi indépendante de t. Si enfin on avait la relation

$$\alpha=\varphi(a),\quad \lambda=f(b),$$

a et b étant deux nouvelles constantes, et α, λ fonctions de ces constantes; comme on aurait

$$\frac{d\lambda}{ds}=\frac{d\lambda}{db}\cdot\frac{db}{ds},\quad \frac{d\alpha}{d\xi}=\frac{d\alpha}{da}\cdot\frac{da}{b\xi},\quad \text{etc.},$$

il résulterait que la relation

$$\left(\frac{db}{ds}\cdot\frac{da}{d\xi}-\frac{da}{ds}\cdot\frac{db}{d\xi}+\ldots\right)$$

serait indépendante du temps.