

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

E. BRASSINNE

Sur des équations différentielles qui se rattachent à l'équation de Riccati

*Journal de mathématiques pures et appliquées 1<sup>re</sup> série*, tome 16 (1851), p. 255-256.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1851\\_1\\_16\\_255\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1851_1_16_255_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Sur des équations différentielles qui se rattachent à l'équation de Riccati;*

**PAR M. E. BRASSINNE,**  
Professeur aux Écoles d'Artillerie.

1. On sait que l'équation

$$dy + ay^2 dx = \frac{b}{x^2} dx + cx^m dx$$

est intégrable dans une infinité de cas. Pour le démontrer, on n'a qu'à poser

$$y = -\frac{l}{x} + z.u$$

( $z$  et  $u$  étant deux fonctions inconnues de  $x$ , et  $l$  une constante indéterminée). Substituons dans l'équation proposée, nous trouverons

$$l \frac{dx}{x^2} + z du + u . dz + a \left( \frac{l^2}{x^2} - \frac{2lzu}{x} + z^2 u^2 \right) dx = \frac{b}{x^2} dx + cx^m dx;$$

on détermine ensuite  $l$  de telle sorte que

$$l + al^2 - b = 0.$$

Soit  $p = al$ ,  $l$  étant une racine de cette équation, et posons

$$z \left( du - \frac{2pu}{x} dx \right) = 0,$$

d'où

$$u = x^{2p};$$

il nous restera l'équation

$$x^{2p} dz + ax^{4p} z^2 dx = cx^m dx.$$

Divisant par  $x^{2p}$  et posant

$$x^{2p} dx = dt,$$

on retrouve la forme de l'équation de Riccati.

Nous avons rappelé cette transformation parce qu'elle démontre qu'une équation de la forme

$$dy + ay^2 dx = \frac{b}{x^2} dx + cx^m dx + c' x^{m'} dx + \dots$$

peut se ramener à une équation de même forme, mais dans laquelle on pourra réduire à zéro un quelconque des exposants  $m, m', \dots$ . Il suffira pour cela de faire usage de la transformation précédente et de poser

$$\frac{b}{x^2} = \frac{b'}{x^2} + \frac{b''}{x^2};$$

on déterminera ensuite l'arbitraire  $b'$  de telle sorte que la racine de l'équation du second degré  $l + al^2 - b' = 0$  puisse, dans les réductions suivantes, annuler un des exposants de  $x$  au second membre.

2. Appliquons à l'équation

$$dy + y^2 dx = ax^m dx$$

la transformation suivante :

$$y = uv - l.$$

Nous trouverons, par la substitution,

$$v du + u dv + (u^2 v^2 - 2l uv + l^2) dx = ax^m dx:$$

posons ensuite

$$u (dv - 2lv dx) = 0,$$

d'où

$$v = e^{2lx};$$

nous aurons l'équation simplifiée

$$du e^{2lx} + u^2 e^{4lx} dx = ax^m dx - l^2 dx;$$

posant enfin

$$e^{2lx} dx = dt,$$

on obtient, toutes simplifications faites, l'équation

$$du + u^2 dt = \frac{a}{(2l)^{m+2}} \log(2lt)^m \cdot \frac{dt}{t^2} - \frac{1}{4} \frac{dt}{t^2},$$

intégrable dans tous les cas de l'équation de Riccati.