JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

H. HOLMGREN

Sur la convergence des séries trigonométriques procédant suivant les multiples d'un même arc

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 16 (1851), p. 186-190.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1851_1_16__186_0>

Sur la convergence des séries trigonométriques procédant suivant les multiples d'un même arc;

Par M. H. HOLMGREN.

Dans un Mémoire inséré au Journal de M. Grunert (*Archiv der Mathematik und Physik*), M. Malmsten a démontré que les séries réelles infinies

$$u_0 + u_1 \cos x + u_2 \cos 2x + u_3 \cos 3x + \ldots,$$
$$u_1 \sin x + u_2 \sin 2x + u_3 \sin 3x + \ldots,$$

sont convergentes quand la fonction u_n tendant vers zéro finit par être toujours de même signe et sans cesse numériquement décroissante pour des valeurs croissantes de n; pourvu toutefois que x ne soit pas de la forme $2k\pi$, k étant un nombre entier positif, nul ou négatif.

Voici une nouvelle démonstration de ce théorème remarquable.

Pour comprendre nos deux séries dans un même calcul, considérons la somme

$$(1) \quad \begin{cases} S_n = u_0 \cos \mu x + u_1 \cos(\mu + 1)x + u_2 \cos(\mu + 2)x + \ldots \\ \qquad + u_{n-1} \cos(\mu + n - 1)x + u_n \cos(\mu + n)x, \end{cases}$$

où μ est une quantité quelconque, et où nous supposons d'abord la fonction u_n quelconque aussi, sauf à lui imposer plus tard des conditions. Multiplions cette somme par $2 \sin \frac{1}{2} x$, puis décomposons chaque terme du second membre d'après la formule

$$2 \sin \frac{1}{2} x \cos(\mu + i)x = \sin\left(\mu + i + \frac{1}{2}\right)x - \sin\left(\mu + i - \frac{1}{2}\right)x:$$

nous aurons

$$\begin{aligned}
2\sin\frac{1}{2}x\,.\,S_n = {} & u_0\sin\left(\mu+\frac{1}{2}\right)x - u_0\sin\left(\mu-\frac{1}{2}\right)x\\
& u_1\sin\left(\mu+\frac{3}{2}\right)x - u_1\sin\left(\mu+\frac{1}{2}\right)x\\
& u_2\sin\left(\mu+\frac{5}{2}\right)x - u_2\sin\left(\mu+\frac{3}{2}\right)x\\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
& u_{n-1}\sin\left(\mu+\frac{2n-1}{2}\right)x - u_{n-1}\sin\left(\mu+\frac{2n-3}{2}\right)x\\
& u_n\sin\left(\mu+\frac{2n+1}{2}\right)x - u_n\sin\left(\mu+\frac{2n-1}{2}\right)x.
\end{aligned}$$

et, en joignant les termes deux à deux diagonalement,

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
& 2\sin\frac{1}{2}x\,.\,S_n\\
& = -u_0\sin\left(\mu-\frac{1}{2}\right)x + (u_0-u_1)\sin\left(\mu+\frac{1}{2}\right)x + (u_1-u_2)\sin\left(\mu+\frac{3}{2}\right)x \cdots\\
& \quad + (u_{n-1}-u_n)\sin\left(\mu+\frac{2n-1}{2}\right)x + u_n\sin\left(\mu+\frac{2n+1}{2}\right)x.
\end{aligned}\right.$$

Faisant, pour abréger,

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}
& -u_0\sin\left(\mu-\frac{1}{2}\right)x + (u_0-u_1)\sin\left(\mu+\frac{1}{2}\right)x + (u_1-u_2)\sin\left(\mu+\frac{3}{2}\right)x \cdots\\
& \qquad + (u_{n-1}-u_n)\sin\left(\mu+\frac{2n-1}{2}\right)x = U_n,
\end{aligned}\right.$$

on a

$$2\sin\frac{1}{2}x\,.\,S_n = U_n + u_n\sin\left(\mu+\frac{2n+1}{2}\right)x,$$

d'où

$$(4)\qquad S_n = \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}x}\left[U_n + u_n\sin\left(\mu+\frac{2n+1}{2}\right)x\right].$$

Cette formule, n'étant qu'une identité, subsiste quel que soit le nombre entier n. Supposant donc n infiniment grand, nous avons

$\lim S_n$ ou la somme de la série infinie

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} & u_0 \cos \mu x + u_1 \cos(\mu+1)x + u_2\cos(\mu+2)x + \ldots \\ & = \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}x}\left[\lim U_n + \lim u_n \sin\left(\mu + \frac{2n+1}{2}\right)x\right]. \end{aligned}\right.$$

Dans cette formule,

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \lim U_n = & - u_0 \sin\left(\mu - \frac{1}{2}\right)x + (u_0 - u_1)\sin\left(\mu + \frac{1}{2}\right)x \\ & + (u_1 - u_2)\sin\left(\mu + \frac{3}{2}\right)x + \ldots . \end{aligned}\right.$$

est aussi une série infinie; mais on démontre facilement que cette série a une somme *finie* et *déterminée* lorsque la fonction u_n est constamment de même signe et numériquement décroissante pour des valeurs très-grandes et croissantes de n: jusqu'ici, du reste, peu importe que $\lim u_n$ soit égale ou non à zéro.

En effet, supposons que depuis $n = m$ (m étant un nombre *fini* et entier) u_n décroisse constamment en restant, par exemple, positive, et désignons par A la quantité finie et déterminée

$$\begin{aligned} & - u_0 \sin\left(\mu - \frac{1}{2}\right)x + (u_0 - u_1)\sin\left(\mu + \frac{1}{2}\right)x + (u_1 - u_2)\sin\left(\mu + \frac{3}{2}\right)x + \ldots \\ & + (u_{m-1} - u_m)\sin\left(\mu + \frac{2m-1}{2}\right)x; \end{aligned}$$

nous aurons, en prenant $n > m$,

$$\begin{aligned} {}_n - A = & (u_m - u_{m+1})\sin\left(\mu + \frac{2m+1}{2}\right)x + (u_{m+1} - u_{m+2})\sin\left(\mu + \frac{2m+3}{2}\right)x + \ldots \\ & + (u_{n-1} - u_n)\sin\left(\mu + \frac{2n-1}{2}\right)x. \end{aligned}$$

Les différences $u_m - u_{m+1}$, $u_{m+1} - u_{m+2}, \ldots$ étant toutes positives, et les facteurs par lesquels elles sont multipliées étant tout au plus égaux à l'unité quant à leurs valeurs numériques, le second membre de cette égalité ne peut pas être numériquement plus grand que la somme

$$(u_m - u_{m+1}) + (u_{m+1} - u_{m+2}) + \ldots + (u_{n-1} - u_n) = u_m - u_n;$$

par conséquent,

$$U_n - A \leqq u_m - u_n,$$

en ayant égard seulement à la valeur numérique de $U_n - A$. Or A, u_m et u_n sont toujours des quantités finies; donc U_n et $\lim U_n$ sont aussi des quantités finies.

Pour démontrer que $\lim U_n$ est aussi une quantité déterminée, il suffit de prouver que la somme d'un nombre quelconque de termes qui, dans cette série, suivent le $r^{\text{ième}}$ terme, diminue à mesure que r devient plus grand et s'évanouit pour $r = \infty$, puisque alors la quantité finie $\lim U_n$ devient indépendante de n, et, par conséquent, déterminée. Prenons donc un nombre quelconque k de ces termes; nous trouvons, par un raisonnement tout à fait semblable à celui que nous venons d'employer, que la valeur numérique de leur somme

$$(u_r - u_{r+1}) \sin\left(\mu + \frac{2r+1}{2}\right) x + (u_{r+1} - u_{r+2}) \sin\left(\mu + \frac{2r+3}{2}\right) x + \ldots$$
$$+ (u_{r+k-1} - u_{r+k}) \sin\left[\mu + \frac{2(r+k)-1}{2}\right] x,$$

ne peut surpasser $u_r - u_{r+k}$; or, à mesure que r croît, cette différence diminue et s'évanouit lorsque $r = \infty$, puisque, d'après la condition relative à u_n, on a nécessairement

$$\lim u_r = \lim u_{r+k}.$$

Ainsi $\lim U_n$ est une quantité finie et déterminée.

Revenant maintenant à l'équation (5), nous en tirons immédiatement la conclusion suivante :

Pourvu que $\sin \frac{1}{2} x$ *ne soit pas nul ou que* x *ne soit pas de la forme* $2k\pi$ *(*k *étant un nombre entier positif, nul ou négatif), la somme de la série infinie*

$$u_0 \cos \mu x + u_1 \cos(\mu + 1) x + u_2 \cos(\mu + 2) x + u_3 \cos(\mu + 3) x + \ldots$$

est toujours finie lorsque u_n *finit par être constamment de même signe et numériquement décroissante pour des valeurs croissantes du nombre entier* n. *Cette somme est, du reste, déterminée lorsque* $\lim u_n = 0$, *mais indéterminée à cause du facteur* $\sin\left(\mu + \frac{2n+1}{2}\right)x$, *dans le cas où* $\lim u_n$ *n'est pas zéro.*

Remarquons d'ailleurs que lorsque $\lim u_n$ diffère de zéro, la formule (5) permet d'assigner complétement le mode d'indétermination de la somme.

Mettons, dans la formule (5), $\mu - \frac{\pi}{2x}$ au lieu de μ, nous aurons

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &u_0 \sin \mu x + u_1 \sin(\mu + 1)x + u_2 \sin(\mu + 2)x + \ldots \\ &= -\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}x}\left[\lim \mathrm{U}_n + \lim u_n \cos\left(\mu + \frac{2n+1}{2}\right)x\right], \end{aligned}\right.$$

où

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \lim \mathrm{U}_n = &-u_0\cos\left(\mu - \frac{1}{2}\right)x + (u_0 - u_1)\cos\left(\mu + \frac{1}{2}\right)x \\ &+ (u_1 - u_2)\cos\left(\mu + \frac{3}{2}\right)x + \ldots \end{aligned}\right.$$

et nous voyons immédiatement que la série infinie

$$u_0 \sin \mu x + u_1 \sin(\mu + 1)x + u_2 \sin(\mu + 2)x + u_3 \sin(\mu + 3)x + \ldots,$$

est assujettie aux mêmes conditions de convergence que nous venons de trouver pour la série dont elle dérive.

Pour $\mu = 0$, nous avons les séries traitées par M. Malmsten.