JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

MICHAEL ROBERTS

Mémoire sur la géométrie de courbes tracées sur la surface d'un ellipsoïde

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 15 (1850), p. 275-295.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1850_1_15__275_0>

MÉMOIRE

Sur la géométrie de courbes tracées sur la surface d'un ellipsoïde;

Par M. Michael ROBERTS.

1. Je me propose, dans ce Mémoire, de discuter avec quelques développements la théorie de lignes tracées sur la surface de l'ellipsoïde.

Je prendrai pour mon point de départ l'équation d'une ligne géodésique qui passe par un ombilic de la surface; mais, en premier lieu, il faut que j'aie soin d'avertir d'une erreur qui m'est échappée dans le Mémoire que j'ai inséré au cahier de janvier 1848 de ce Journal. Cette erreur (qui m'a été indiquée par les recherches de M. Hart sur les lignes géodésiques, publiées dans le n° XIX du *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*) consiste à négliger une quantité constante qui entre dans l'équation d'une ligne géodésique qui passe par un ombilic, quand on cherche à exprimer (comme je l'ai fait) la constante arbitraire, entrant dans l'équation de M. Jacobi, en fonction de l'angle que la ligne géodésique forme avec la section principale de la surface qui contient les ombilics. En effet, par suite d'idées inexactes par rapport à la symétrie de la surface, j'avais pensé que, si deux lignes géodésiques forment entre elles à un ombilic un certain angle, elles se rencontreront encore sous le même angle à l'ombilic opposé; tandis qu'une analyse plus précise prouve que ces angles sont essentiellement inégaux [*].

[*] Il faut observer que les résultats contenus dans ma Lettre adressée à M. Liouville et insérée à la page 491 du tome XII de ce Journal, sont tous inexacts. Nous verrons dans ce qui suit les vrais théorèmes qui doivent remplacer ceux qui se trouvent dans la Lettre à laquelle je fais allusion.

2. Je vais présenter maintenant l'équation corrigée de la ligne géodésique, et, pour cela, je me servirai d'une méthode qui m'a été communiquée par M. Liouville.

En conservant les notations de mon Mémoire (tome XIII, page 1), nous avons pour l'équation de toutes les lignes géodésiques qui passent par un ombilic

$$(1) \qquad \int_c^\mu \frac{d\mu}{\mu^2 - b^2}\sqrt{\frac{a^2-\mu^2}{c^2-\mu^2}} \pm \int_0^\nu \frac{d\nu}{b^2-\nu^2}\sqrt{\frac{a^2-\nu^2}{c^2-\nu^2}} = \alpha;$$

d'une ligne à l'autre il n'y a de différence que par la valeur qu'on assigne à la quantité constante α, et il s'agit de déterminer cette valeur en fonction de l'angle ω qu'une ligne géodésique particulière quelconque forme avec la section ombilicale de la surface.

On doit faire ici une observation utile par rapport à l'emploi du double signe qui se trouve dans l'équation (1). Voici en quoi elle consiste. Si ρ désigne la longueur de l'arc géodésique compté de l'ombilic jusqu'au point (μ, ν), on a

$$\rho = \int_0^\mu \sqrt{\frac{a^2-\mu^2}{c^2-\mu^2}}\,d\mu \mp \int_0^\nu \sqrt{\frac{a^2-\nu^2}{c^2-\nu^2}}\,d\nu.$$

Le signe positif, dans cette équation, doit être employé avec le signe négatif dans l'équation (1), et *vice versâ* [*].

Maintenant, pour fixer les idées, nous supposerons que les ombilics contigus O, O' sont les foyers intérieurs des lignes de courbure pour lesquelles on a

$$\mu = \text{constante}.$$

L'angle ω est la limite vers laquelle tend l'angle θ compris entre l'arc géodésique O'T et le prolongement de OT, lorsque le point T ou (μ, ν) se rapproche indéfiniment du point O, c'est-à-dire lorsque $\mu - b$ et $b - \nu$ convergent vers zéro. Or la tangente à la ligne de courbure (μ) partage l'angle θ en deux parties égales; l'angle θ est donc le double

[*] Il est bon d'observer que nous nous bornons à la considération du demi-ellipsoïde terminé par le plan de l'axe le plus grand et de l'axe moyen.

de l'angle i contenu dans l'équation de M. Liouville,

$$\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = b^2,$$

qui appartient à la ligne géodésique dont il s'agit. Ainsi

$$\operatorname{tang}^2 \frac{\theta}{2} = \operatorname{tang}^2 i = \frac{\mu^2 - b^2}{b^2 - \nu^2} = \frac{\mu - b}{b - \nu} \cdot \frac{\mu + b}{b + \nu},$$

et, par suite,

$$\operatorname{tang}^2 \frac{\omega}{2} = \lim \frac{\mu - b}{b - \nu}.$$

Maintenant, pour la détermination de la quantité α, qui se trouve dans l'équation (1), en fonction de l'angle ω, j'observe que le premier membre de cette équation est la somme des deux quantités suivantes :

$$(p) \qquad \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{c^2 - b^2}} \left(\int_c^\mu \frac{d\mu}{\mu^2 - b^2} \pm \int_0^\nu \frac{d\nu}{b^2 - \nu^2} \right)$$

et

$$(q) \quad \int_c^\mu \frac{d\mu}{\mu^2 - b^2} \left(\sqrt{\frac{a^2 - \mu^2}{c^2 - \mu^2}} - \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{c^2 - b^2}} \right) \pm \int_0^\nu \frac{d\nu}{b^2 - \nu^2} \left(\sqrt{\frac{a^2 - \nu^2}{c^2 - \nu^2}} - \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{c^2 - b^2}} \right),$$

dont la première (p), revient à

$$\frac{1}{2b} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{c^2 - b^2}} \left(\log \frac{\mu - b . b + \nu}{b - \nu . \mu + b} - \log \frac{c - b}{c + b} \right),$$

en adoptant le signe supérieur. En faisant converger μ et ν vers la valeur commune b qu'elles prennent au point O, nous trouverons à la limite cette valeur de la quantité (p),

$$\frac{1}{2b} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{c^2 - b^2}} \left(\log \operatorname{tang}^2 \frac{\omega}{2} - \log \frac{c - b}{c + b} \right).$$

Quant à la quantité (q), elle prendra alors une valeur finie et déterminée, et il est facile de voir que l'équation de la ligne géodésique s'écrit finalement de la manière suivante :

$$(2) \quad \int_c^\mu \frac{d\mu}{\mu^2 - b^2} \sqrt{\frac{a^2 - \mu^2}{c^2 - \mu^2}} \pm \int_0^\nu \frac{d\nu}{b^2 - \nu^2} \sqrt{\frac{a^2 - \nu^2}{c^2 - \nu^2}} = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{c^2 - b^2}} \log \operatorname{tang} \frac{\omega}{2} - \mathrm{B},$$

où B est une constante absolue, savoir,

$$B = \frac{1}{2b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{c^2-b^2}}\log\frac{c-b}{c+b} + \int_b^c \frac{d\mu}{\mu^2-b^2}\left(\sqrt{\frac{a^2-\mu^2}{c^2-\mu^2}} - \sqrt{\frac{a^2-b^2}{c^2-b^2}}\right)$$
$$\mp\int_0^b \frac{d\nu}{b^2-\nu^2}\left(\sqrt{\frac{a^2-\nu^2}{c^2-\nu^2}} - \sqrt{\frac{a^2-b^2}{c^2-b^2}}\right).$$

3. L'équation que nous venons de trouver peut se transformer assez élégamment en y introduisant les fonctions H, Θ signalées par M. Jacobi. Pour cela, nous poserons dans l'équation (2),

$$a = 1,\quad b = c\sin\lambda,\quad \mu = c\sin\varphi,\quad \nu = c\sin\psi,\quad \sqrt{1-c^2\sin^2\lambda} = \Delta(c,\lambda),$$

et ainsi pour les angles φ et ψ; et, en effectuant ces substitutions, cette équation deviendra

$$\int_\pi^\varphi \frac{\Delta(c,\varphi)}{\sin^2\varphi - \sin^2\lambda}\,d\varphi - \int_0^\psi \frac{\Delta(c,\psi)}{\sin^2\lambda - \sin^2\psi}\,d\psi = \frac{\Delta(c,\lambda)}{\sin\lambda\cos\lambda}\log\operatorname{tang}\frac{\omega}{2} - c^2 B,$$

en adoptant ici pour la seconde intégrale le signe négatif, d'où résultera le signe positif dans l'expression du rayon vecteur. La réduction des intégrales que renferme cette dernière équation aux formes fondamentales des fonctions elliptiques s'effectue par les formules données par Legendre (*voir* le *Traité des Fonctions elliptiques*, tome Ier, pages 70 et 71), et, conformément à la notation connue, notre équation devient

$$\operatorname{cotang}\lambda\,\Delta(c,\lambda)\,[\Pi(-c^2\sin^2\lambda,\,c,\,\varphi) + \Pi(-c^2\sin^2\lambda,\,c,\,\psi)]$$
$$-\frac{\operatorname{cotang}\lambda}{\Delta(c,\lambda)}[F(c,\varphi) + F(c,\psi)]$$
$$= \frac{1}{2}\log\operatorname{tang}^2\frac{\omega}{2}\,\frac{[\Delta(c,\lambda)\operatorname{tang}\varphi + \Delta(c,\varphi)\operatorname{tang}\lambda]\,[\Delta(c,\psi)\operatorname{tang}\lambda + \Delta(c,\lambda)\operatorname{tang}\psi]}{[\Delta(c,\lambda)\operatorname{tang}\varphi - \Delta(c,\varphi)\operatorname{tang}\lambda]\,[\Delta(c,\psi)\operatorname{tang}\lambda - \Delta(c,\lambda)\operatorname{tang}\psi]}.$$

Faisons maintenant

$$F(c) = K,\quad F(c,\varphi) = \frac{2Ku}{\pi},\quad F(c,\psi) = \frac{2Kv}{\pi},\quad F(c,\lambda) = \frac{2Kl}{\pi},$$

et les formules qui se trouvent à la page 139 du tome III du *Traité des Fonctions elliptiques*, donnent

$$\operatorname{cotang}\lambda\,\Delta(c,\lambda)\,\Pi(-c^2\sin^2\lambda,\,c,\,\varphi) - \frac{\operatorname{cotang}\lambda}{\Delta(c,\lambda)}F(c,\varphi)$$
$$= \frac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-l)}{\Theta(u+l)} - \frac{2Ku}{\pi}\left[\frac{c^2\sin\lambda\cos\lambda}{\Delta(c,\lambda)} + \frac{E(c)}{F(c)}F(c,\lambda) - E(c,\lambda)\right].$$

Mais on a aussi

$$\frac{2K}{\pi}\left[\frac{c^2 \sin\lambda \cos\lambda}{\Delta(c,\lambda)} + \frac{E(c)}{F(c)} F(c,\lambda) - E(c,\lambda)\right] = -\frac{\Theta'(l+\frac{1}{2}\pi)}{\Theta(l+\frac{1}{2}\pi)},$$

en désignant par Θ' la dérivée de Θ par rapport à l'argument l (*voir* le *Traité des Fonctions elliptiques,* tome III, page 128); en sorte que l'équation de la ligne géodésique peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\log\frac{\Theta(u-l)\Theta(l-v)}{\Theta(u+l)\Theta(l+v)} + 2\frac{\Theta'(l+\frac{1}{2}\pi)}{\Theta(l+\frac{1}{2}\pi)}(u+v)$$
$$= \log \operatorname{tang}^2\frac{\omega}{2}\cdot\frac{\sin \operatorname{am}\frac{2K}{\pi}(u+l)\sin\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}(l+v)}{\sin\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}(u-l)\sin\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}(l-v)},$$

d'où, en se rappelant la relation entre les fonctions H, Θ, savoir,

$$\sin\operatorname{am}\frac{2Ku}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{c}}\frac{H(u)}{\Theta(u)},$$

l'équation (2) se trouve transformée en la suivante :

$$\frac{H(u-l)H(l-v)}{H(u+l)H(l+v)} = \operatorname{tang}^2\frac{\omega}{2}\, e^{-2\frac{\Theta'(l+\frac{1}{2}\pi)}{\Theta(l+\frac{1}{2}\pi)}(u+v)}.$$

4. Si v_1 est la valeur de v qui répond à $u = \frac{1}{2}\pi$, la dernière équation donne

$$\operatorname{tang}^2\frac{\omega}{2} = \frac{H(l-v_1)}{H(l+v_1)}\, e^{2\frac{\Theta'(l+\frac{1}{2}\pi)}{\Theta(l+\frac{1}{2}\pi)}(\frac{1}{2}\pi+v_1)},$$

et si l'on désigne par ω_1 l'angle (mesuré vers la section qui contient l'axe moyen et l'axe le plus petit) que l'arc géodésique compris entre le point $(\frac{1}{2}\pi, v_1)$ et l'ombilic opposé forme avec la section ombilicale, on a évidemment

$$\operatorname{tang}^2\frac{\omega_1}{2} = \frac{H(l+v_1)}{H(l-v_1)}\, e^{2\frac{\Theta'(l+\frac{1}{2}\pi)}{\Theta(l+\frac{1}{2}\pi)}(\frac{1}{2}\pi-v_1)},$$

en sorte que

$$\operatorname{tang}\frac{\omega}{2}\operatorname{tang}\frac{\omega_1}{2} = e^{\pi\frac{\Theta'(l+\frac{1}{2}\pi)}{\Theta(l+\frac{1}{2}\pi)}}.$$

On conclut de là que, si une ligne géodésique issue d'un ombilic O est prolongée jusqu'à ce qu'elle rencontre le même point O une seconde fois, alors sa direction ω' ne coïncide pas avec sa direction initiale ω, et l'on a, entre ω et ω', la relation suivante :

$$\operatorname{tang}\frac{\omega'}{2} = e^{-2\pi\frac{\Theta'(l+\frac{1}{2}\pi)}{\Theta(l+\frac{1}{2}\pi)}}\operatorname{tang}\frac{\omega}{2}.$$

Ce théorème se trouve déjà démontré par M. Hart (*voir* le *Cambridge and Dublin Mathematical Journal,* n° XIX, pages 83 et 84).

Si l'on désigne par Ω l'angle que la ligne géodésique, qui passe par le sommet de l'axe moyen de la surface, forme avec la section des ombilics, on a

$$\operatorname{tang}\frac{\Omega}{2} = e^{\frac{1}{2}\pi\frac{\Theta'(l+\frac{1}{2}\pi)}{\Theta(l+\frac{1}{2}\pi)}}.$$

5. Quand un cône de révolution est circonscrit à un ellipsoïde, on sait que son sommet se trouve sur l'hyperbole focale de la surface. Or M. Chasles a démontré que l'arc géodésique mené d'un point T de la courbe de contact à l'ombilic O situé sur la branche de l'hyperbole focale à qui appartient le sommet du cône, et l'arête du cône comprise entre son sommet S et le point de contact, ont leur différence constante. Il suit de là que toutes les courbes de contact dont il s'agit ont pour équation différentielle

$$\frac{d\mu}{\sqrt{(a^2-\mu^2)(c^2-\mu^2)}} \pm \frac{d\nu}{\sqrt{(a^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}} = 0,$$

et, en posant (comme on l'a déjà fait)

$$\mu = c\sin\varphi,\quad \nu = c\sin\psi,$$

puis intégrant par des fonctions elliptiques, on trouve

$$F\left(\frac{c}{a},\varphi\right) \pm F\left(\frac{c}{a},\psi\right) = F\left(\frac{c}{a},\sigma\right),$$

σ étant une quantité constante pour chaque courbe de contact.

Je vais démontrer que si l'on représente par α l'angle du cône de révolution correspondant, on a

$$\operatorname{tang}\sigma \operatorname{tang}\alpha = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}.$$

Pour établir cette proposition, nous poserons $TS = t$, l'arc géodésique $OT = \rho$, et en désignant par y la distance du point T au plan qui contient les ombilics, nous trouverons d'abord

(3) $$t = y\frac{d\rho}{dy},$$

où $d\rho$ est l'élément de la ligne géodésique OT, et dy le changement correspondant infiniment petit dans la quantité y.

Maintenant, on a

$$y = \frac{1}{b}\frac{\sqrt{(a^2-b^2)(\mu^2-b^2)(b^2-\nu^2)}}{\sqrt{c^2-b^2}},$$

d'où, en différentiant,

$$dy = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{c^2-b^2}}\left[\frac{(b^2-\nu^2)\mu\, d\mu - (\mu^2-b^2)\nu\, d\nu}{\sqrt{(\mu^2-\nu^2)(b^2-\nu^2)}}\right].$$

Mais on a aussi

$$d\rho = \sqrt{\frac{a^2-\mu^2}{c^2-\mu^2}}\, d\mu \pm \sqrt{\frac{a^2-\nu^2}{c^2-\nu^2}}\, d\nu,$$

et simultanément

$$\frac{d\mu}{\mu^2-b^2}\sqrt{\frac{a^2-\mu^2}{c^2-\mu^2}} \mp \frac{d\nu}{b^2-\nu^2}\sqrt{\frac{a^2-\nu^2}{c^2-\nu^2}} = 0.$$

L'équation (3) fournit donc pour t la valeur suivante :

$$t = \frac{\sqrt{(a^2-\mu^2)(a^2-\nu^2)}\left[\mu\sqrt{(c^2-\mu^2)(a^2-\nu^2)} \pm \nu\sqrt{(c^2-\nu^2)(a^2-\mu^2)}\right]}{a^2c^2 - a^2(\mu^2+\nu^2) + \mu^2\nu^2}.$$

Or les formules pour l'addition ou la soustraction des fonctions elliptiques donnent

$$\frac{\operatorname{tang}\sigma}{a} = \frac{\mu\sqrt{(c^2-\mu^2)(a^2-\nu^2)} \pm \nu\sqrt{(c^2-\nu^2)(a^2-\mu^2)}}{a^2c^2 - a^2(\mu^2+\nu^2) + \mu^2\nu^2}.$$

Il s'ensuit que

(4) $$t = \frac{\sqrt{(a^2-\mu^2)(a^2-\nu^2)}\operatorname{tang}\sigma}{a}.$$

A présent, soit p la perpendiculaire abaissée du centre de la surface sur le plan tangent en T : on sait que

$$p = \frac{a\sqrt{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}}{\sqrt{(a^2-\mu^2)(a^2-\nu^2)}};$$

par conséquent

$$\operatorname{tang}\sigma = \frac{pt}{\sqrt{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}}.$$

Or la normale à la surface en T va rencontrer le plan des ombilics en un point F qui appartient à la tangente de l'hyperbole focale en un point S, d'où, en posant $\mathrm{TF} = n$, nous avons

$$t \operatorname{tang}\alpha = n.$$

Mais on a aussi

$$np = a^2 - b^2,$$

et de là résulte enfin, à cause de la valeur de $\operatorname{tang}\sigma$ que nous venons de trouver,

$$(5) \qquad \operatorname{tang}\sigma \operatorname{tang}\alpha = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}},$$

ce qu'il fallait démontrer.

6. Nous allons maintenant exprimer la différence entre les quantités t et ρ en fonction de l'angle α. Pour cela, l'équation (4) donne, en y introduisant les angles φ et ψ au lieu des quantités μ et ν, et en adoptant la notation des fonctions elliptiques,

$$t = a\Delta\left(\frac{c}{a}, \varphi\right)\Delta\left(\frac{c}{a}, \psi\right)\operatorname{tang}\sigma,$$

et l'on a aussi

$$\rho = a\left[\mathrm{E}\left(\frac{c}{a}, \sigma\right) \pm \frac{c^2}{a^2}\sin\varphi\sin\psi\sin\sigma\right].$$

Or la formule fondamentale pour l'addition des fonctions elliptiques peut s'écrire de la manière suivante :

$$(6) \qquad \Delta\left(\frac{c}{a}, \varphi\right)\Delta\left(\frac{c}{a}, \psi\right) = \Delta\left(\frac{c}{a}, \sigma\right) \pm \frac{c^2}{a^2}\sin\varphi\sin\psi\cos\sigma \text{ [*]},$$

[*] *Voir* le *Traité des Fonctions elliptiques*, tome III, page 196.

en sorte que nous avons

$$t - \rho = a\left[\operatorname{tang}\sigma\Delta\left(\frac{c}{a}, \sigma\right) - \mathrm{E}\left(\frac{c}{a}, \sigma\right)\right],$$

d'où, en vertu de l'équation (5), nous tirons

$$(7)\qquad t - \rho = (a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}\int_\alpha^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\operatorname{cos\acute{e}c}^2\alpha\, d\alpha}{\sqrt{(a^2\operatorname{tang}^2\alpha + a^2 - b^2)(a^2 - c^2\operatorname{tang}^2\alpha + a^2 - b^2)}}.$$

7. Remarquons maintenant, d'après M. Chasles, que si nous prolongeons une tangente à la ligne géodésique en un point quelconque T jusqu'à ce qu'elle aille percer le plan des ombilics au point S, ce point se trouve sur l'hyperbole focale de la surface; en sorte que l'angle α est l'angle entre la droite TS et la tangente à l'hyperbole focale au point S. Nous nous proposons de trouver la relation qui existe entre l'angle α et l'inclinaison θ du plan osculateur de la ligne géodésique au point T sur le plan qui contient les ombilics. Pour cela, soit T′ le point infiniment voisin de T sur la ligne géodésique OT, et supposons que sa tangente en ce point perce l'hyperbole focale au point S′ consécutif à S; on a donc

$$(\mathrm{T'S'} - \text{l'arc géodésique OT}') - (\mathrm{TS} - \text{l'arc géodésique OT}) = d(t-\rho),$$

d'où, si $\delta\varepsilon$ est l'angle infiniment petit entre T′S′ et TS,

$$d(t - \rho) = \frac{t\,\delta\varepsilon}{\operatorname{tang}\alpha};$$

et, si γ est le rayon de courbure de la ligne géodésique correspondant à l'élément $d\rho$, on a

$$d\rho = \gamma\,\delta\varepsilon,$$

en sorte que nous tirons

$$(8)\qquad d(t - \rho) = \frac{t\,d\rho}{\gamma\operatorname{tang}\alpha};$$

d'où, en vertu de l'équation (7), nous déduisons la relation suivante entre les changements correspondants infiniment petits dans les quantités α et ρ le long de la même ligne géodésique

$$(9)\qquad \frac{d\rho}{d\alpha} = -\frac{(a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}\gamma}{t\sin\alpha\cos\alpha\sqrt{\mathrm{R}}},$$

en posant

$$R = (a^2 \operatorname{tang}^2 \alpha + a^2 - b^2)(\overline{a^2 - c^2} \operatorname{tang}^2 \alpha + a^2 - b^2).$$

D'après notre définition de l'angle θ, nous avons

$$\sin \theta = \frac{y}{t \sin \alpha},$$

d'où, en différentiant, nous tirons facilement

$$\operatorname{cotang} \theta \frac{d\theta}{d\alpha} = \frac{\operatorname{tang} \alpha \left(1 - \frac{dt}{d\rho}\right) \frac{d\rho}{d\alpha} - t}{t \operatorname{tang} \alpha},$$

ou bien, en vertu des équations (8) et (9),

$$\operatorname{cotang} \theta \frac{d\theta}{d\alpha} = \frac{t \sin \alpha \cos \alpha \sqrt{R} - (a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}}{t \sin^2 \alpha \sqrt{R}}.$$

Mais on a fait voir, n° 5, que

$$pt \operatorname{tang} \alpha = a^2 - b^2; \tag{10}$$

cela donne

$$\operatorname{cotang} \theta \frac{d\theta}{d\alpha} = \frac{\cos^2 \alpha \sqrt{R} - p \sqrt{a^2 - b^2}}{\sin \alpha \cos \alpha \sqrt{R}}. \tag{11}$$

Maintenant, on peut démontrer, avec un peu de calcul, qu'on a l'équation suivante :

$$\cos^2 \alpha \sqrt{R} - p \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{b \sqrt{c^2 - b^2} \sin \alpha \sqrt{(a^2 - b^2) \cos^2 \alpha - p^2 y^2}}{a^2 - b^2} \text{ [*]},$$

et il n'est pas difficile de voir qu'on a aussi

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)^2 \cos^2 \alpha - p^2 y^2}}{(a^2 - b^2) \cos \alpha},$$

---

[*] En effet, si l'on substitue dans cette équation pour p et y leurs expressions en coordonnées elliptiques, et pour $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$ leurs valeurs tirées de l'équation (5), elle sera trouvera transformée en

$$2a \sqrt{a^2 - c^2 \sin^2 \sigma} \sqrt{(a^2 - \mu^2)(a^2 - \nu^2)}$$
$$- [a^2(a^2 - c^2) + (a^2 - \mu^2)(a^2 - \nu^2)] \sin^2 \sigma = a^2 (2a^2 - \mu^2 - \nu^2) \cos^2 \sigma,$$

qu'on peut facilement rendre identique avec l'équation (6).

en sorte que l'équation (11) se trouve transformée en

$$\frac{d\theta}{\sin\theta\, d\alpha} = -\frac{b\sqrt{c^2-b^2}}{\sqrt{R}}\ [^*],$$

équation qui s'intègre immédiatement, puisque les variables y sont séparées; et, attendu que ω est la valeur de θ qui répond à $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, on tire

$$(12)\qquad \frac{\tang\frac{\theta}{2}}{\tang\frac{\omega}{2}} = e^{b\sqrt{c^2-b^2}\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\alpha}\frac{d\alpha}{\sqrt{(a^2\tang^2\alpha + a^2 - b^2)(a^2 - c^2\tang^2\alpha + a^2 - b^2)}}}.$$

Voilà donc la belle forme sous laquelle l'équation de la ligne géodésique qui passe par un ombilic d'un ellipsoïde a été mise par M. Hart (*voir* le *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, page 83). Il l'a obtenue par des considérations différentes de celles que je viens d'employer.

8. La marche que nous venons de suivre sert à démontrer une propriété des lignes de courbure de l'ellipsoïde que j'ai déjà trouvée dans mon Mémoire inséré dans le cahier de janvier 1848 de ce Journal, savoir, que si le point T est situé sur une ligne de courbure dont les foyers intérieurs sont les ombilics O, O', on a

$$\tang\frac{TOO'}{2}\tang\frac{TO'O}{2} = \text{constante},$$

où l'on suppose que les angles sont formés sur la surface par les lignes géodésiques. La démonstration de ce théorème est fondée sur une propriété de la fonction que j'ai nommée P et qui figure dans la formule pour la rectification des courbes ellipsoïdales, savoir,

$$ds^2 = d\rho^2 + P^2 d\omega^2.$$

La propriété dont il s'agit a été signalée par M. Gauss, et se trouve citée par M. Liouville à la page 304 du tome XII de ce Journal. Elle s'exprime par l'équation suivante :

$$(13)\qquad \frac{d^2P}{d\rho^2} + \frac{P}{RR'} = 0,$$

[*] Il faut prendre le radical avec le signe négatif dans cette équation, parce que nous supposons que l'angle θ va croître à mesure que l'angle α diminue.

en se rappelant que M. Liouville désigne par $\sqrt{G}$ notre fonction P et par u et v les quantités que nous nommons ρ et ω; R, R′ sont les rayons de courbure principaux de la surface au point (ρ, ω).

Maintenant, l'équation (8) donne

$$\frac{dt}{d\rho} = 1 + \frac{t}{\gamma \operatorname{tang} \alpha},$$

et si D est le demi-diamètre de la surface parallèle à l'élément $d\rho$ de la ligne géodésique, on a

$$\gamma p = D^2,$$

et aussi, en vertu du théorème de M. Joachimsthal,

$$pD = a\sqrt{a^2 - c^2};$$

en sorte que nous tirons

$$\frac{dt}{d\rho} = 1 + \frac{p^3 t}{a^2(a^2 - c^2) \operatorname{tang} \alpha}.$$

Or cette dernière équation devient, par l'équation (10),

$$\frac{dt}{d\rho} = 1 + \frac{p^4 t^2}{a^2(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)},$$

ou bien, puisque

$$RR' = \frac{a^2(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}{p^4},$$

$$\frac{dt}{d\rho} = 1 + \frac{t^2}{RR'};$$

d'où, si l'on substitue dans cette dernière pour t sa valeur tirée de l'équation (3), nous avons

$$\frac{d^2 y}{d\rho^2} + \frac{y}{RR'} = 0.$$

Maintenant, si l'on compare cette équation avec l'équation (13), on déduit que

$$P = y\varphi(\omega),$$

et puisque, dans le voisinage d'un ombilic, la surface s'assimile à une sphère, on voit sans difficulté que

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{\sin \omega},$$

en sorte que

$$P = \frac{y}{\sin \omega};$$

ce qui s'accorde bien avec l'expression que nous avons déjà trouvée [*].

Mais si P', ω' sont les quantités correspondantes avec P et ω pour l'ombilic contigu, on a, le long de la même ligne de courbure,

$$P\,d\omega + P'\,d\omega' = 0,$$

ou

$$\frac{d\omega}{\sin \omega} + \frac{d\omega'}{\sin \omega'} = 0,$$

formule qui contient la démonstration cherchée [**].

9. Nous allons maintenant transformer l'équation (12) en y introduisant la fonction Θ et sa dérivée. Pour cela, nous poserons

$$\operatorname{tang} l_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{tang} \alpha,$$

et cette substitution transforme la quantité

$$b\sqrt{c^2 - b^2} \int_\alpha^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\alpha}{\sqrt{(a^2 \operatorname{tang}^2 \alpha + a^2 - b^2)(a^2 - c^2 \operatorname{tang}^2 \alpha + a^2 - b^2)}},$$

en la suivante :

$$\frac{a^2\sqrt{c^2 - b^2}}{b\sqrt{a^2 - b^2}} \left(\int_{l_1}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dl_1}{\sqrt{a^2 - c^2 \sin^2 l_1}} - \int_{l_1}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{a^2 - b^2}{a^2 - b^2 \sin^2 l_1} \frac{dl_1}{\sqrt{a^2 - c^2 \sin^2 l_1}} \right),$$

ce qui devient, en adoptant la notation que nous avons employée au n° **5**,

$$\frac{\operatorname{cotang} \lambda}{\Delta(c, \lambda)} [F(c) - F(c, l_1)]$$
$$- \operatorname{cotang} \lambda \Delta(c, \lambda) [\Pi(-c^2 \sin^2 \lambda, c) - \Pi(-c^2 \sin^2 \lambda, c, l_1)].$$

---

[*] *Voir* le tome XIII de ce Journal, page 8.

[**] J'ai déjà publié cette démonstration dans le n° XVI du *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, page 159.

Maintenant, en posant

$$F(c, l_1) = \frac{2Kw}{\pi},$$

et en introduisant la fonction Θ et sa dérivée, cette dernière expression s'écrit de la manière suivante :

$$\frac{1}{2}\log\frac{\Theta(w-l)}{\Theta(w+l)} - \frac{\Theta'(l+\frac{1}{2}\pi)}{\Theta(l+\frac{1}{2}\pi)}\left(\frac{\pi}{2} - w\right),$$

en sorte que l'équation (12) se trouve transformée en

$$(14) \qquad \frac{\tang^2\frac{\theta}{2}}{\tang^2\frac{\omega}{2}} = \frac{\Theta(w+l)}{\Theta(w-l)}\, e^{-2\frac{\Theta'(l+\frac{1}{2}\pi)}{\Theta(l+\frac{1}{2}\pi)}\left(\frac{\pi}{2}-w\right)}.$$

10. La formule (14), que nous venons de trouver, sert à déterminer la valeur de notre fonction P, quand l'arc géodésique auquel elle appartient coïncide avec la section principale qui contient les ombilics. En effet, il n'est pas difficile de voir qu'on a pour P l'expression suivante :

$$P = \frac{t\sin\alpha\sin\theta}{\sin\omega}.$$

Mais l'équation (14) donne

$$\sin\theta = \frac{\varkappa\sin\omega}{\cos^2\frac{\omega}{2} + \varkappa^2\sin^2\frac{\omega}{2}},$$

où $\varkappa$ est une fonction de l'angle α; en sorte qu'on en déduit pour P la valeur générale

$$P = \frac{\varkappa t\sin\alpha}{\cos^2\frac{\omega}{2} + \varkappa^2\sin^2\frac{\omega}{2}},$$

ce qui donne, pour $\omega = 0$,

$$P = \varkappa t\sin\alpha,$$

et pour $\omega = \pi$,

$$P = \frac{t\sin\alpha}{\varkappa}.$$

11. Considérons maintenant l'équation d'une ligne géodésique quelconque sur l'ellipsoïde, savoir,

$$\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = \beta,$$

qui peut s'écrire de la manière suivante :

$$\mu^2 + \nu^2 \operatorname{tang}^2 i = \beta(1 + \operatorname{tang}^2 i)$$

Il est évident qu'on peut satisfaire à cette équation en posant $\mu = \nu$, ce qui donne

$$\mu = b, \quad \nu = b,$$

et, en même temps,

$$\operatorname{tang} i = \pm\sqrt{-1};$$

et, attendu que ces valeurs ne dépendent pas de β, on peut dire que toutes les lignes de courbure sur l'ellipsoïde sont inscrites dans un même quadrilatère géodésique, dont les côtés sont imaginaires, mais qui a deux sommets opposés réels, savoir, deux ombilics contigus. Les directions de ces côtés sont indiquées par un facteur imaginaire qui se présente dans l'équation différentielle des lignes de courbure sur l'ellipsoïde [*].

Il est presque superflu d'observer qu'une propriété analogue a été connue depuis longtemps pour un système de coniques homofocales.

12. Je vais maintenant présenter un théorème qui sert à déterminer assez simplement la projection des courbes ellipsoïdales sur un plan. En voici l'énoncé :

« Une courbe quelconque, tracée sur un ellipsoïde (dont les demi-
» axes sont a, $\sqrt{a^2 - b^2}$, $\sqrt{a^2 - c^2}$) et ayant pour équation en coor-
» données elliptiques

$$\mathrm{F}(\mu, \nu) = 0,$$

» se projette sur les plans des sections circulaires par des droites pa-
» rallèles à l'axe le plus petit de la surface en une courbe dont

[*] *Voir l'Analyse appliquée à la géométrie des trois dimensions*, par M. C.-F.-A. Leroy, pages 302, 309.

» l'équation est

$$F\left(\mu_0\sqrt{\frac{c^2-b^2}{a^2-b^2}},\ \nu_0\sqrt{\frac{c^2-b^2}{a^2-b^2}}\right)=0,$$

» où μ_0, ν_0 sont les demi-axes focaux de l'ellipse et de l'hyperbole » qui passent par la projection du point (μ, ν) et qui ont pour foyers » les projections des ombilics. »

Pour démontrer ce théorème, soit l'équation de la surface en coordonnées rectangulaires,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-b^2}+\frac{z^2}{a^2-c^2}=1,$$

et l'équation de la projection sur le plan des x, y de ses lignes de courbure pour lesquelles $\mu =$ constante, est

$$\frac{c^2x^2}{a^2\mu^2}+\frac{(c^2-b^2)y^2}{(a^2-b^2)(\mu^2-b^2)}=1.$$

Maintenant, posons

$$x=\xi\cos\zeta,\quad y=\eta,$$

où ζ est l'inclinaison du plan qui coupe la surface suivant un cercle sur le plan des x, y; et, en effectuant ces substitutions dans la dernière équation, nous tirons, eu égard à la valeur connue de $\cos\zeta$,

$$(15)\qquad \frac{\xi^2}{\mu^2}+\frac{\eta^2}{\mu^2-b^2}=\frac{a^2-b^2}{c^2-b^2}.$$

Donc il est évident que les lignes de courbure pour lesquelles $\mu =$ constante se projettent de la manière dont il s'agit en ellipses ayant pour équation en coordonnées rectangulaires (ξ, η) l'équation (15); et les projections semblables des lignes de courbure, $\nu =$ constante, sont les hyperboles représentées par l'équation

$$(16)\qquad \frac{\xi^2}{\nu^2}-\frac{\eta^2}{b^2-\nu^2}=\frac{a^2-b^2}{c^2-b^2}.$$

Or les équations (15) et (16) représentent un système de coniques homofocales, ayant pour foyers les projections des ombilics; et l'on a, pour le système correspondant de coordonnées elliptiques (μ_0, ν_0)

[d'après lequel les points du plan des ξ, η sont déterminés par la rencontre de la série d'ellipses et d'hyperboles (15) et (16)],

$$\mu_0 = \mu\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{c^2 - b^2}}, \quad \nu_0 = \nu\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{c^2 - b^2}}.$$

Ces expressions contiennent la démonstration du théorème énoncé.

Les deux exemples les plus élégants que ce théorème fournisse ont été donnés pour la première fois par feu Mac Cullagh et se trouvent cités à la page 4 du tome XI de ce Journal.

13. Il est évident que, si deux lignes géodésiques sont menées sur l'ellipsoïde tangentiellement à une ligne de courbure donnée, et de manière que l'angle sous lequel elles s'entrecoupent soit constant, le lieu de leur intersection a pour équation en coordonnées elliptiques

$$\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = \beta,$$

où $2i$ est l'angle constant [*].

Par conséquent, cette courbe se projette sur les sections circulaires en une courbe, lieu d'un point tel, que si de là on mène deux tangentes à la conique qui est la projection de la ligne de courbure donnée, l'angle qu'elles font est constant et égal à l'angle donné $2i$.

14. Nous allons maintenant indiquer comment l'emploi des coordonnées elliptiques peut servir à résoudre le problème des trajectoires orthogonales sur l'ellipsoïde.

Pour cela, nous remarquerons d'abord qui si s, s' désignent les arcs des deux genres de lignes de courbure, il est évident que les équations différentielles suivantes,

$$\mathrm{U}\,ds + \mathrm{V}\,ds' = 0, \quad \mathrm{U}\,ds' - \mathrm{V}\,ds = 0,$$

représentent un système de courbes orthogonales.

Maintenant on a

$$ds = \sqrt{\frac{(\mu^2 - \nu^2)(a^2 - \nu^2)}{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}}\,d\nu, \quad ds' = \sqrt{\frac{(\mu^2 - \nu^2)(a^2 - \mu^2)}{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}}\,d\mu,$$

[*] Ce théorème se trouve déjà énoncé par M. Besge. *Voir* le tome XIV de ce Journal, page 247.

et, en substituant ces expressions dans les dernières équations, elles se transformeront dans les suivantes :

$$\frac{\mathrm{U}\sqrt{a^2-\nu^2}}{\sqrt{(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}}\,d\nu + \frac{\mathrm{V}\sqrt{a^2-\mu^2}}{\sqrt{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}}\,d\mu = 0,$$

$$\frac{\mathrm{U}\sqrt{a^2-\mu^2}}{\sqrt{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}}\,d\mu - \frac{\mathrm{V}\sqrt{a^2-\nu^2}}{\sqrt{(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}}\,d\nu = 0;$$

d'où, en posant

$$\mathrm{N} = \frac{\mathrm{U}\sqrt{a^2-\nu^2}}{\sqrt{(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}},\quad \mathrm{M} = \frac{\mathrm{V}\sqrt{a^2-\mu^2}}{\sqrt{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}},$$

nous déduisons que si un système de courbes tracées sur un ellipsoïde est donné par l'équation différentielle

$$\mathrm{M}\,d\mu + \mathrm{N}\,d\nu = 0,$$

l'équation différentielle du système orthogonal est

$$\frac{(a^2-\mu^2)}{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}\frac{d\mu}{\mathrm{M}} - \frac{(a^2-\nu^2)}{(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}\frac{d\nu}{\mathrm{N}} = 0.$$

15. Appliquons maintenant ces généralités.

Si les courbes données sont les sections circulaires de la surface, il est facile de voir qu'elles sont toutes représentées par l'équation différentielle

$$\frac{d\mu}{\sqrt{c^2-\mu^2}} \pm \frac{d\nu}{\sqrt{c^2-\nu^2}} = 0;$$

en sorte que l'équation du système orthogonal est

$$(17)\qquad \frac{a^2-\mu^2}{\mu^2-b^2}\frac{d\mu}{\sqrt{c^2-\mu^2}} \pm \frac{a^2-\nu^2}{b^2-\nu^2}\frac{d\nu}{\sqrt{c^2-\nu^2}} = 0,$$

équation qui s'intègre tout de suite par des fonctions logarithmiques et circulaires.

En combinant cette dernière équation avec le théorème que nous venons de donner, n° **12**, relativement à la projection des courbes ellipsoïdales, nous retombons sur les résultats contenus dans un Mémoire de M. Catalan, inséré dans ce Journal (*voir* le tome XIII, pages 483 à 490).

S'il s'agissait de trouver le système orthogonal des courbes de contact de tous les cônes de révolution qu'on peut circonscrire à l'ellipsoïde, nous aurions, pour l'équation donnée,

$$\frac{d\mu}{\sqrt{(a^2-\mu^2)(c^2-\mu^2)}} \pm \frac{d\nu}{\sqrt{(a^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}} = 0;$$

en sorte que l'équation cherchée serait

$$(18) \qquad \frac{(a^2-\mu^2)^{\frac{3}{2}}}{\mu^2-b^2}\frac{d\mu}{\sqrt{c^2-\mu^2}} \mp \frac{(a^2-\nu^2)^{\frac{3}{2}}}{b^2-\nu^2}\frac{d\nu}{\sqrt{c^2-\nu^2}} = 0,$$

dont l'intégration s'effectue par des fonctions elliptiques.

Supposons encore que le système donné représente les lignes géodésiques qui passent par un ombilic de la surface, ou bien qu'on a

$$\frac{d\mu}{\mu^2-b^2}\sqrt{\frac{a^2-\mu^2}{c^2-\mu^2}} \pm \frac{d\nu}{b^2-\nu^2}\sqrt{\frac{a^2-\nu^2}{c^2-\nu^2}} = 0;$$

l'équation du système orthogonal s'écrit sous la forme suivante :

$$d\mu\sqrt{\frac{a^2-\mu^2}{c^2-\mu^2}} \mp d\nu\sqrt{\frac{a^2-\nu^2}{c^2-\nu^2}} = 0;$$

ce qui fournit l'explication de la règle que nous avons donnée au nº **2**, relativement à l'emploi du double signe qui se trouve dans l'équation de la ligne géodésique.

16. Remarquons ici que les courbes représentées par les équations (17) et (18) passent toutes par les ombilics opposés, et, ainsi que les lignes géodésiques qui passent par un ombilic, jouissent d'une propriété remarquable par rapport aux lignes de courbure. En effet, si le point T se meut le long d'une ligne de courbure, on a

$$\operatorname{tang}\frac{\mathrm{TOO'}}{2}\operatorname{tang}\frac{\mathrm{TO'O}}{2} = \text{constante},$$

ou

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{\mathrm{TOO'}}{2}}{\operatorname{tang}\frac{\mathrm{TO'O}}{2}} = \text{constante},$$

où OT, OT′ sont deux lignes qui appartiennent simultanément à l'un ou à l'autre des systèmes de courbes (17) et (18).

17. Pour terminer ces applications, nous allons chercher l'expression pour l'angle sous lequel une ligne géodésique qui passe par un ombilic coupe un système de courbes données par une équation différentielle du premier ordre entre μ et ν. Pour cela, si l'on désigne par ε l'angle dont il s'agit, on a

$$\operatorname{tang} \varepsilon = \frac{y\, d\omega}{\sin \omega\, d\rho};$$

mais l'équation (2) donne, par différentiation,

$$\frac{d\mu}{\mu^2 - b^2}\sqrt{\frac{a^2-\mu^2}{c^2-\mu^2}} \pm \frac{d\nu}{b^2-\nu^2}\sqrt{\frac{a^2-\nu^2}{c^2-\nu^2}} = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{c^2-b^2}}\,\frac{d\omega}{\sin\omega},$$

d'où nous tirons, en ayant égard à la valeur de y en coordonnées elliptiques,

$$\sqrt{\frac{(a^2-\mu^2)(b^2-\nu^2)}{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}}\,d\mu \pm \sqrt{\frac{(a^2-\nu^2)(\mu^2-b^2)}{(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}}\,d\nu = \frac{y\,d\omega}{\sin\omega},$$

et, en même temps,

$$\sqrt{\frac{a^2-\mu^2}{c^2-\mu^2}}\,d\mu \mp \sqrt{\frac{a^2-\nu^2}{c^2-\nu^2}}\,d\nu = d\rho,$$

en sorte que nous avons pour tang ε la valeur suivante :

$$\operatorname{tang}\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{(\mu^2-b^2)(b^2-\nu^2)}}\;\frac{(b^2-\nu^2)\sqrt{(a^2-\mu^2)(c^2-\nu^2)}\,\frac{d\mu}{d\nu} \pm (\mu^2-b^2\sqrt{(a^2-\nu^2)(c^2-\mu^2)}}{\sqrt{(a^2-\mu^2)(c^2-\nu^2)}\,\frac{d\mu}{d\nu} \mp \sqrt{(a^2-\nu^2)(c^2-\mu^2)}},$$

où la valeur de $\frac{d\mu}{d\nu}$ est déterminée par l'équation donnée.

18. Si l'équation donnée appartient aux courbes de contact des cônes droits circonscrits à la surface, on a

$$\frac{d\mu}{d\nu} = \pm\sqrt{\frac{(a^2-\mu^2)(c^2-\mu^2)}{(a^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}},$$

et la valeur correspondante de tang ε devient

$$\text{tang}\, \varepsilon = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2)}},$$

ce qui donne

$$y \,\text{tang}\, \varepsilon = \frac{(a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}}{b\sqrt{c^2 - b^2}}.$$

Cette équation exprime une propriété qui a son analogue dans les sections coniques, savoir : le rayon vecteur tiré d'un foyer d'une conique coupe la courbe sous un angle tel, que le produit de sa tangente trigonométrique et de la distance du point d'intersection à l'axe le plus grand de la courbe est constant.