JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J.-A. SERRET

Mémoire sur les fonctions de quatre, cinq et six lettres

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 15 (1850), p. 45-70.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1850_1_15__45_0>

MÉMOIRE

SUR LES FONCTIONS DE QUATRE, CINQ ET SIX LETTRES;

PAR M. J.-A. SERRET.

Je me propose ici d'examiner les différents cas que peuvent présenter les fonctions de quatre et de cinq lettres, et un cas particulier remarquable des fonctions de six lettres.

Rappelons d'abord la définition des fonctions semblables. Deux fonctions d'un nombre quelconque n de lettres sont dites *semblables,* lorsque les permutations qui changent la valeur de l'une changent aussi la valeur de l'autre. On sait, en outre, que, si V et y sont des fonctions semblables de n lettres ayant μ valeurs distinctes, la fonction V peut être exprimée par un polynôme entier et rationnel de degré $\mu - 1$ en y, et dont les coefficients sont des fonctions symétriques.

LEMME I. *Le nombre des valeurs d'une fonction d'un nombre quelconque n de lettres, peut être représenté par $\mu + \mu' + \mu'' + \ldots$, $\mu, \mu', \mu'', \ldots$ étant les nombres de valeurs distinctes que l'on obtient en permutant différents groupes composés chacun d'un même nombre m de lettres.*

Soit
$$V = \varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l)$$
une fonction de n lettres. Supposons que, par les permutations de m lettres
$$g, \quad h, \ldots, \quad k, \quad l,$$
la fonction V prenne μ valeurs distinctes
$$V_1, \quad V_2, \ldots, \quad V_\mu,$$

et que, par les permutations de toutes les lettres, elle prenne les $\mu + \nu$ valeurs

$$V_1, \quad V_2, \ldots, \quad V_{\mu+\nu}.$$

Le produit

$$(x - V_1)(x - V_2)\ldots(x - V_{\mu+\nu})$$

est une fonction symétrique des n lettres $a, b, c, d, \ldots, k, l$; pareillement

$$(x - V_1)(x - V_2)\ldots(x - V_{\mu})$$

est une fonction symétrique des m lettres $g, h, \ldots, k, l$; donc le produit

$$(x - V_{\mu+1})(x - V_{\mu+2})\ldots(x - V_{\mu+\nu}),$$

qu'on obtient en divisant les deux produits précédents l'un par l'autre, est aussi une fonction symétrique des m lettres $g, h, \ldots, k, l$.

Si la fonction $V_{\mu+1}$ peut prendre les ν valeurs

$$V_{\mu+1}, \quad V_{\mu+2}, \ldots, \quad V_{\mu+\nu}$$

par les permutations des lettres $g, h, \ldots, k, l$; comme elle ne peut en prendre d'autres [*], il y aura nécessairement m lettres dont les permutations feront acquérir à V un nombre de valeurs égal à ν, et, dans ce cas, notre proposition est démontrée.

Supposons donc que $V_{\mu+1}$ ne puisse prendre que les μ' valeurs

$$V_{\mu+1}, \quad V_{\mu+2}, \ldots, \quad V_{\mu+\mu'}$$

par les permutations de $g, h, \ldots, k, l$; que $V_{\mu+\mu'+1}$ prenne les μ'' valeurs

$$V_{\mu+\mu'+1}, \quad V_{\mu+\mu'+2}, \ldots, \quad V_{\mu+\mu'+\mu''}$$

par les permutations de ces mêmes lettres; que pareillement, si ν surpasse $\mu' + \mu''$, $V_{\mu+\mu'+\mu''+1}$ prenne les μ''' valeurs

$$V_{\mu+\mu'+\mu''+1}, \ldots, \quad V_{\mu+\mu'+\mu''+\mu'''},$$

et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait épuisé toutes les valeurs de V; alors le nombre des valeurs de V sera $\mu + \mu' + \mu'' + \ldots$, et les fonc-

[*] D'après la proposition I du Mémoire précédent.

tions V_1, $V_{\mu+1}$, $V_{\mu+\mu'+1}$, $V_{\mu+\mu'+\mu''+1}$,... auront respectivement

$$\mu,\quad \mu',\quad \mu'',\ldots$$

valeurs par les permutations des m lettres $g, h,\ldots, k, l$; d'où il suit que l'on pourra former différents groupes de m lettres, tels que par les permutations des lettres de chaque groupe, la fonction V prenne des nombres de valeurs respectivement égaux à μ, μ', μ'',.... Ce qu'il fallait démontrer.

Lemme II. *Si une fonction de n lettres a μ valeurs par les permutations de n — 1 lettres, le nombre total de ses valeurs est un diviseur du produit nμ.*

Soit

$$V = \varphi(a, b, c, d,\ldots, k, l)$$

une fonction de n lettres, et représentons par

$$(1)\qquad \varphi_1(a),\quad \varphi_2(a),\ldots,\quad \varphi_\mu(a),$$

les valeurs en nombre μ que peut prendre cette fonction par les permutations des $n-1$ lettres

$$b,\quad c,\quad d,\ldots,\quad k,\quad l.$$

Si dans les fonctions (1) on transpose la lettre a avec chacune des $n-1$ autres, on aura $(n-1)\mu$ nouvelles valeurs de V, ce qui fera $n\mu$ en tout. Écrivons ces $n\mu$ valeurs

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{llll} \varphi_1(a), & \varphi_2(a), & \ldots, & \varphi_\mu(a), \\ \varphi_1(b), & \varphi_2(b), & \ldots, & \varphi_\mu(b), \\ \varphi_1(c), & \varphi_2(c), & \ldots, & \varphi_\mu(c), \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1(l), & \varphi_2(l), & \ldots, & \varphi_\mu(l), \end{array}\right.$$

qui seront évidemment les seules que la fonction V puisse acquérir. Je dis maintenant que si ces $n\mu$ valeurs ne sont pas distinctes, chacune des valeurs distinctes se trouve répétée le même nombre de fois. Supposons, en effet, que l'une des fonctions (2), que je représenterai simplement par V, se trouve reproduite λ fois, et soit V' une quelconque des fonctions (2) distinctes de V. Faisons la permutation par laquelle on passe de V' à V, les fonctions (2) ne feront que se changer les unes dans les autres. Par conséquent, la fonction V', qui est devenue V, étant reproduite λ fois, l'était aussi λ fois avant la permutation. Ce qu'il fallait démontrer.

§ I.

Des fonctions de quatre lettres.

Soit

$$V = \varphi(a, b, c, d)$$

une fonction de quatre lettres a, b, c, d.

Le nombre des valeurs que peut prendre cette fonction par les permutations de trois lettres devant être un diviseur du produit 1.2.3 sera nécessairement l'un des quatre nombres

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 6;$$

il y a donc quatre cas à distinguer, suivant que la fonction prend une, deux ou trois valeurs par les permutations de trois lettres, et enfin, le cas où la fonction prend toujours six valeurs distinctes par les permutations de trois lettres quelconques.

1°. Supposons que la fonction V soit symétrique par rapport aux trois lettres b, c, d.

Dans ce cas, elle a quatre valeurs par les permutations des quatre lettres, ou elle n'en a qu'une seule. La fonction est semblable à l'un des deux types suivants

$$a, \quad a+b+c+d.$$

2°. Supposons que la fonction V ait deux valeurs par les permutations des trois lettres b, c, d.

Alors, elle a la forme

$$A + B(b-c)(b-d)(c-d),$$

en désignant par A et B des fonctions de a, b, c, d symétriques par rapport à b, c, d; ou mieux la forme

$$A + B\nu,$$

en posant

$$\nu = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d).$$

Si A et B sont symétriques par rapport aux quatre lettres a, b, c, d, la fonction V a deux valeurs seulement et elle est semblable à la fonction type ν. Si, au contraire, l'une des fonctions A et B n'est symétrique que par rapport aux trois lettres b, c, d, la fonction V a huit valeurs, et elle est semblable au type

$$(b-c)(b-d)(c-d).$$

3°. Supposons que la fonction V ait trois valeurs par les permutations des trois lettres b, c, d.

Dans ce cas, elle est symétrique par rapport à deux de ces trois lettres. Admettons que ce soit par rapport à c et d. Alors, si la fonction V est symétrique par rapport aux trois lettres a, c, d, elle a quatre valeurs, et son type est indiqué plus haut.

Si V n'est pas symétrique par rapport aux lettres a, c, d, il peut arriver qu'elle soit symétrique par rapport aux lettres a et b, ou qu'elle ne le soit pas. Dans le dernier cas, le nombre des valeurs de V est évidemment égal au nombre des arrangements de quatre lettres deux à deux, c'est-à-dire à douze, et la fonction V est semblable au type

$$a + 2b - c - d.$$

Si la fonction V est, au contraire, symétrique par rapport aux lettres a et b en même temps qu'elle l'est par rapport aux lettres c et d, et que, de plus, elle change par le changement réciproque de a et b en c et d, le nombre de ses valeurs est évidemment égal au nombre des combinaisons de quatre lettres deux à deux, c'est-à-dire à 6, et la fonction est semblable au type

$$a + b - c - d.$$

Mais, si la fonction V, symétrique par rapport à a et b et par rapport à c et d, ne change pas par le changement réciproque de a et b en c et d, le nombre de ses valeurs est la moitié du nombre des combinaisons de quatre lettres deux à deux, c'est-à-dire 3, et la fonction est semblable aux deux types équivalents

$$(a+b-c-d)^2, \qquad ab+cd.$$

4°. Supposons maintenant que la fonction V ait toujours six valeurs distinctes par les permutations de trois quelconques des quatre lettres a, b, c, d. Le nombre total des valeurs de V doit diviser le produit $1.2.3.4 = 24$, et, d'après le lemme I, il doit être un multiple de 6; il sera donc égal à 6, 12 ou 24. Nous examinerons d'abord le premier cas.

Puisque la fonction V n'a que six valeurs distinctes, parmi les 24 permutations des 4 lettres a, b, c, d, il y en a quatre qui font acquérir à la fonction la même valeur; d'ailleurs deux permutations, où l'une des quatre lettres a, b, c, d occupe la même place, ne peuvent correspondre à des valeurs égales de V, puisque cette fonction prend ses six valeurs par les permutations de trois lettres quelconques; donc les quatre permutations qui font acquérir à V la même valeur sont comprises dans les dix suivantes :

$$\begin{array}{llll}
(1)\ a,\ b,\ c,\ d; & (2)\ b,\ a,\ d,\ c; & (5)\ c,\ d,\ a,\ b; & (8)\ d,\ c,\ b,\ a; \\
 & (3)\ b,\ c,\ d,\ a; & (6)\ c,\ d,\ b,\ a; & (9)\ d,\ c,\ a,\ b; \\
 & (4)\ b,\ d,\ a,\ c; & (7)\ c,\ a,\ d,\ b; & (10)\ d,\ a,\ b,\ c.
\end{array}$$

Or les six permutations (3), (4), (6), (7), (9), (10) se déduisent de la première par une *substitution circulaire* [*]; il arrivera donc de deux choses l'une: ou bien la fonction V ne sera pas changée par une substitution circulaire effectuée sur les quatre lettres qu'elle renferme,

---

[*] Une substitution est dite circulaire lorsque, ayant écrit un certain nombre de lettres dans un ordre quelconque aux sommets d'un polygone régulier, la substitution consiste à remplacer chaque lettre par celle qui la suit.

ou bien les permutations (1), (2), (5), (8), c'est-à-dire

$$\begin{array}{llll} a, & b, & c, & d; \\ b, & a, & d, & c; \\ c, & d, & a, & b; \\ d, & c, & b, & a; \end{array}$$

lui feront acquérir la même valeur. Dans ce dernier cas, la fonction V ne change pas quand on transpose deux lettres quelconques, pourvu qu'on transpose en même temps les deux autres. Elle est semblable au type

$$(a-b)(c-d).$$

Si, au contraire, la fonction V reste invariable par une permutation circulaire, par exemple par celle qui équivaut au changement de a, b, c, d en c, d, b, a, et qu'on représente par la notation

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & b & a \end{pmatrix},$$

elle ne changera pas non plus en répétant deux ou trois fois cette même permutation, car l'égalité

$$\varphi(a, b, c, d) = \varphi(c, d, b, a)$$

entraîne les deux suivantes :

$$\varphi(c, d, b, a) = \varphi(b, a, d, c),$$
$$\varphi(b, a, d, c) = \varphi(d, c, a, b).$$

La fonction V est alors semblable au type

$$(a-b)(c-d)[(a-b)^2-(c-d)^2].$$

Considérons maintenant le cas où la fonction V a douze valeurs. Alors elle doit nécessairement changer de valeur par une permutation circulaire des quatre lettres a, b, c, d, car autrement elle n'aurait que six valeurs, par conséquent, parmi les quatre permutations

$$\begin{array}{cccc} a, & b, & c, & d; \\ b, & a, & d, & c; \\ c, & d, & a, & b; \\ d, & c, & b, & a. \end{array}$$

Il y en a deux qui font acquérir la même valeur à la fonction V. En d'autres termes, la fonction V doit rester la même quand on fait les transpositions (a, b) et (c, d), ou (a, c) et (b, d), ou (a, d) et (b, c). La fonction est semblable au type

$$(a + 2b)(c + 2d),$$

qui ne change pas par l'effet des deux transpositions (a, c) et (b, d).

Enfin, si la fonction V a vingt-quatre valeurs, elle sera semblable au type

$$a + 2b + 3c + 4d.$$

Résumé.

Il résulte de cette discussion que les fonctions de quatre lettres peuvent être partagées en onze classes de la manière suivante :

1°. Les fonctions symétriques ;

2°. Les fonctions qui ont deux valeurs distinctes ;

3°. Les fonctions qui ont trois valeurs distinctes ;

4°. Les fonctions qui ont quatre valeurs distinctes. Elles sont symétriques par rapport à trois lettres ;

5°. Les fonctions qui ont six valeurs et qui sont symétriques par rapport à deux lettres, et symétriques aussi par rapport aux deux autres ;

6°. Les fonctions qui ont six valeurs et qui ne sont pas changées par une permutation circulaire des quatre lettres ;

7°. Les fonctions qui ont six valeurs, et qui ne sont pas changées quand on transpose deux lettres, pourvu qu'on transpose aussi les deux autres ;

8°. Les fonctions qui ont huit valeurs. Elles n'ont que deux valeurs distinctes par les permutations de trois lettres;

9°. Les fonctions qui ont douze valeurs et qui sont symétriques par rapport à deux lettres;

10°. Les fonctions qui ont douze valeurs et qui ne sont pas symétriques par rapport à deux lettres. On peut disposer les quatre lettres en deux groupes tels, que les fonctions dont il s'agit ne soient pas changées par les transpositions simultanées des lettres de chaque groupe;

11°. Les fonctions qui ont vingt-quatre valeurs.

Remarque. Le nombre des valeurs d'une fonction de quatre lettres peut être un diviseur quelconque du produit $1.2.3.4$.

§ II.

Des fonctions de cinq lettres.

Nous distinguerons deux cas principaux que nous subdiviserons eux-mêmes en plusieurs. Le premier cas est celui des fonctions qui ont moins de six valeurs distinctes par les permutations de trois lettres. Le second cas, au contraire, est celui des fonctions qui prennent six valeurs distinctes par les permutations de trois lettres quelconques.

Premier cas.

Soit

$$V = \varphi(a, b, c, d, e)$$

une fonction de cinq lettres a, b, c, d, e, et supposons que cette fonction ait moins de six valeurs par les permutations des trois lettres c, d, e; ce nombre de valeurs étant un diviseur de $1.2.3 = 6$ ne peut être que l'un des trois nombres

$$1, \quad 2, \quad 3.$$

Nous allons analyser ces trois cas.

1°. *La fonction* V *est symétrique par rapport aux lettres* c, d, e.

Alors, si elle est symétrique par rapport à quatre lettres, b, c,

d, e par exemple, sans l'être par rapport aux cinq lettres, elle a cinq valeurs.

Si elle n'est pas symétrique par rapport à quatre lettres, mais qu'elle le soit par rapport à a et b, elle a dix valeurs. Enfin elle en a vingt si elle n'est pas symétrique par rapport à a et b.

La fonction est semblable à l'un des quatre types suivants :

$$a + b + c + d + e,$$
$$2a + b + c + d + e,$$
$$2a + 2b + c + d + e,$$
$$3a + 2b + c + d + e.$$

2°. *La fonction* V *a deux valeurs par les permutations des trois lettres* c, d, e.

Dans ce cas, on peut poser

$$\varphi(a, b, c, d, e) = \mathrm{A} + \mathrm{B}(c - d)(c - e)(d - e),$$

ou même

$$\varphi(a, b, c, d, e) = \mathrm{A} + \mathrm{B}v,$$

en faisant, pour abréger,

$$v = (a - b)(a - c)(a - d)(a - e)(b - c)(b - d)(b - e)(c - d)(c - e)(d - e),$$

et en désignant par A et B des fonctions de a, b, c, d, e, symétriques par rapport à c, d, e, et dont le type a été indiqué plus haut.

Si A et B sont symétriques par rapport aux cinq lettres a, b, c, d, e, la fonction V n'a que deux valeurs, et elle est semblable au type v. Autrement, je dis qu'elle a dix, vingt ou quarante valeurs.

Rappelons d'abord que la fonction V change par une transposition quelconque des trois lettres c, d, e, et qu'elle ne change pas par une permutation circulaire de ces trois lettres, dont l'effet équivaut à celui de deux transpositions. La fonction V changera aussi de valeur si l'on remplace les deux lettres a et b par deux autres d, e, quel que soit l'ordre qu'on adopte pour les trois dernières; si, en effet, on avait

$$\varphi(a, b, c, d, e) = \varphi(d, e, \ldots),$$

la fonction V n'aurait que deux valeurs par les permutations des lettres a, b, c, et, par conséquent, elle ne changerait pas de valeur par une permutation circulaire de ces trois lettres. Mais si la fonction V n'est changée par aucune permutation circulaire de a, b, c et de c, d, e, elle ne changera par aucune permutation circulaire de trois lettres quelconques. D'où il résulte que deux transpositions quelconques sont équivalentes, et, par suite, que la fonction V n'a que deux valeurs, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Soient maintenant V' et V'' les deux valeurs que prend V par les permutations des lettres c, d, e, et posons

$$X = (x - V')(x - V'');$$

la fonction X étant symétrique par rapport à c, d, e, le nombre μ de ses valeurs est égal à 5, 10 ou 20. Soient

$$\begin{aligned} X_1 &= (x - V'_1)(x - V''_1), \\ X_2 &= (x - V'_2)(x - V''_2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_\mu &= (x - V'_\mu)(x - V''_\mu), \end{aligned}$$

les μ valeurs de X qui sont, par hypothèse, différentes. Je dis que deux de ces valeurs ne sauraient avoir un facteur commun. Supposons, en effet, que l'on ait

$$V'_1 = V'_2 \quad \text{ou} \quad = V''_2.$$

D'après ce que nous venons de montrer tout à l'heure, deux des trois dernières lettres de V'_1 doivent faire partie des trois dernières lettres de V'_2 ou de V''_2; mais, en faisant la transposition de ces deux lettres, la précédente équation devient

$$V''_1 = V''_2 \quad \text{ou} \quad = V'_2,$$

et, par conséquent, X_1 et X_2 sont identiques, ce qui est contre l'hypothèse. En égalant à zéro le produit de toutes les fonctions X, on aura une équation de degré 2μ dont les coefficients seront des fonctions symétriques, et dont les 2μ racines toutes inégales seront les valeurs de la fonction V.

La fonction V a donc dix, vingt ou quarante valeurs, suivant que μ est égal à 5, 10 ou 20.

Si l'on a $\mu = 5$, la fonction X est symétrique par rapport à quatre lettres, b, c, d, e par exemple, et alors la fonction V n'a que deux valeurs par les permutations de ces quatre lettres; elle a la forme

$$A + B v,$$

où A et B désignent des fonctions symétriques de b, c, d, e, dont l'une au moins n'est pas symétrique par rapport aux cinq lettres, et elle est semblable au type

$$a v.$$

Si l'on a $\mu = 10$, la fonction X est symétrique par rapport aux lettres a et b; mais il peut arriver deux cas: ou bien les deux facteurs de X sont chacun symétriques par rapport à a et b, ou bien ils se changent l'un dans l'autre par la transposition (a, b). Dans le premier cas, la fonction V est symétrique par rapport à a et b et a deux valeurs par les permutations de c, d, e; elle a donc la forme

$$A + B(c-d)(c-e)(d-e),$$

où A et B désignent des fonctions symétriques par rapport à a et b en même temps que par rapport à c, d, e. Elle est semblable au type

$$(a+b)(c-d)(c-e)(d-e).$$

Mais il n'en est plus de même si les facteurs de X se changent l'un dans l'autre par la transposition (a, b), comme par la transposition de deux quelconques des trois lettres c, d, e. Alors, en posant

$$V'_1 = A + B(c-d)(c-e)(d-e),$$
$$V''_1 = A - B(c-d)(c-e)(d-e),$$

comme V'_1 et V''_1 se changent l'une dans l'autre par la transposition (a, b), leur somme et leur produit ne changeront pas, et, par conséquent, A et B^2 sont des fonctions symétriques de a et b; d'ailleurs B ne peut être elle-même symétrique par rapport à a et b, elle a donc la forme $B'(a-b)$, et l'on peut poser

$$V = A + B(a-b)(c-d)(c-e)(d-e),$$

en désignant ici par A et B des fonctions symétriques par rapport à a et b en même temps que par rapport à c, d, e. Le type de la fonction V est alors

$$(a-b)(c-d)(c-e)(d-e).$$

Enfin, si $\mu = 20$, la fonction V a 40 valeurs; il n'y a donc que les permutations circulaires des trois lettres c, d, e qui la laissent invariable, et, par conséquent, la fonction V est semblable au type

$$(a+2b)(c-d)(c-e)(d-e).$$

Remarque. Les fonctions de cinq lettres qui ont deux valeurs par les permutations de trois lettres offrent cinq types différents; mais elles sont toutes comprises dans la formule générale

$$\mathrm{A} + \mathrm{B}(c-d)(c-e)(d-e),$$

où A et B désignent des fonctions des cinq lettres a, b, c, d, e, symétriques par rapport aux trois dernières.

3°. *La fonction* V *a trois valeurs par les permutations des trois lettres* c, d, e.

Alors elle est symétrique par rapport à deux lettres d et e par exemple. Si elle a une ou deux valeurs seulement par les permutations des trois lettres a, b, c, elle se trouve comprise dans l'une des deux catégories que nous venons d'étudier. Nous supposerons donc que V a trois ou six valeurs par les permutations des lettres a, b, c.

Si la fonction V a trois valeurs par les permutations des lettres a, b, c, elle est symétrique par rapport à deux de ces lettres. Supposons que ce soient b et c. Comme nous nous sommes déjà occupés du cas des fonctions symétriques par rapport à trois lettres, il n'y a ici que deux cas à distinguer : ou bien la fonction V, symétrique par rapport à b et c en même temps que par rapport à d et e, change par le changement réciproque de b et c en d et e, ou bien elle ne change pas. Dans le premier cas, il est évident que le nombre des valeurs de la fonction est égal à cinq fois le nombre des combinaisons de quatre lettres deux à deux, c'est-à-dire à 30; dans le second cas, ce nombre de valeurs est moitié moindre. Dans le premier cas, la fonction est semblable au type

$$a^2 + bc - de;$$

dans le second cas, elle a pour type

$$a^2 + bc + de,$$

fonction qui a quinze valeurs.

Si la fonction V a six valeurs par les permutations des trois lettres a, b, c, comme elle est symétrique par rapport à d et e, elle aura évidemment un nombre de valeurs égal au nombre des arrangements de cinq lettres trois à trois, c'est-à-dire à 60. La fonction est alors semblable au type

$$a + 2b + 3c + 4d + 4e.$$

Second cas.

Soit maintenant

$$V = \varphi(a, b, c, d, e)$$

une fonction de cinq lettres a, b, c, d, e, qui prend toujours six valeurs distinctes par les permutations de trois lettres quelconques.

Je dis d'abord que la fonction V, considérée comme fonction de quatre lettres seulement, b, c, d, e par exemple, ne peut avoir un nombre de valeurs égal à 8. En effet, le nombre des valeurs de V par les permutations de trois quelconques des quatre lettres b, c, d, e étant toujours égal à 6, le nombre des valeurs que prend cette fonction par les permutations des quatre lettres b, c, d, e doit être un multiple de 6 en vertu du lemme I; ce nombre de valeurs est donc égal à 6, 12 ou 24.

Si la fonction V a six valeurs seulement par les permutations de quatre lettres, le nombre de ses valeurs sera un diviseur de 30, d'après le lemme II, et il sera un multiple de 6 d'après le lemme I, puisque le nombre des valeurs que prend V par les permutations de quatre lettres est toujours l'un des nombres 6, 12 ou 24. Donc le nombre des valeurs de V est nécessairement 6 ou 30.

Si la fonction V a plus de six valeurs par les permutations de quatre lettres quelconques, mais qu'il y ait quatre lettres dont les permutations lui fassent acquérir un nombre de valeurs égal à 12, le nombre total des valeurs de V sera un diviseur de 60 d'après le lemme II, et il sera un multiple de 12 d'après le lemme I, puisque, dans ce cas, la fonction a toujours douze ou vingt-quatre valeurs par les permutations de quatre lettres. Donc le nombre total des valeurs de V est 12 ou 60.

Enfin, si la fonction V a toujours vingt-quatre valeurs par les permutations de quatre lettres, le nombre total de ses valeurs, devant être à la fois un diviseur de 120 et un multiple de 24, sera nécessairement 24 ou 120.

Notre second cas se subdivise donc en six autres que nous allons discuter.

1°. *La fonction* V *a six valeurs.*

Puisque la fonction V, considérée comme fonction de quatre lettres, a, b, c, d par exemple, prend ses six valeurs par les permutations de trois lettres quelconques, elle ne change pas par une certaine permutation circulaire de ces quatre lettres, ou bien la transposition de deux quelconques de ces quatre lettres équivaut à la transposition des deux autres, ainsi qu'on l'a vu dans le § I de ce Mémoire. Dans l'un et l'autre cas, il y a deux lettres parmi les quatre a, b, c, d dont la transposition équivaut à la transposition des deux autres; car si la fonction V n'est pas changée par une permutation circulaire de quatre lettres, elle ne changera pas non plus en répétant une seconde fois cette même permutation, mais alors on n'aura produit d'autre changement que la transposition de deux des quatre lettres a, b, c, d, en même temps que la transposition des deux autres. Supposons, par exemple, que l'on ait

$$(a, d) = (b, c). \tag{1}$$

Pareillement, parmi les quatre lettres a, b, c, e, il y en a deux dont la transposition équivaut à la transposition des deux autres. Or (a, e) ne peut être égale à (b, c); car, à cause de l'égalité (1), les transpositions (a, d) et (a, e) qui ont une lettre commune seraient équivalentes, et, par conséquent, la fonction V n'aurait pas six valeurs distinctes par les permutations des lettres a, d, e, comme nous l'avons supposé.

Les transpositions (a, b) et (c, e) ou (a, c) et (b, c) sont donc égales;

supposons

$$(a, b) = (c, e)\,[*]. \tag{2}$$

Maintenant, en ayant égard aux égalités (1) et (2) et se rappelant que deux transpositions qui ont une lettre commune ne peuvent être égales, les trois combinaisons des cinq lettres a, b, c, d, e, quatre à quatre, que nous n'avons pas encore considérées, donneront nécessairement

$$(a, e) = (b, d), \tag{3}$$

$$(a, c) = (d, e), \tag{4}$$

$$(b, e) = (c, d). \tag{5}$$

Ainsi les dix transpositions que l'on peut faire avec les cinq lettres a, b, c, d, e sont équivalentes deux à deux. Il en résulte qu'il y a une permutation circulaire des cinq lettres a, b, c, d, e, qui ne change pas la fonction V. En effet, la fonction V ne change pas si l'on transpose la première lettre avec la quatrième, et la deuxième avec la troisième; on a donc

$$\varphi(a, b, c, d, e) = \varphi(d, c, b, a, e).$$

Pareillement, le second membre ne changera pas si l'on transpose la première lettre avec la troisième, et la quatrième avec la cinquième; on a donc

$$\varphi(a, b, c, d, e) = \varphi(b, c, d, e, a),$$

et, par conséquent, on voit que la fonction V n'est pas changée par la permutation circulaire de cinq lettres

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & c & d & e & a \end{pmatrix}.$$

Je dis, en outre, qu'il y a une permutation circulaire des quatre lettres b, c, d, e qui ne change pas la fonction V; en effet, s'il en était autrement, comme la fonction V prend ses six valeurs par les

[*] On peut toujours faire cette hypothèse, sauf à changer le nom des lettres de V.

permutations de trois quelconques des lettres b, c, d, e, la transposition de deux quelconques de ces quatre lettres serait équivalente à la transposition des deux autres; on aurait, par exemple,

$$(b, c) = (d, e),$$

et les égalités (1) et (3) donneraient

$$(a, c) = (a, d),$$

ce qui est impossible puisque ces deux transpositions ont une lettre commune. Il est aisé de découvrir quelle est la permutation circulaire des quatre lettres b, c, d, e qui laisse la fonction V invariable; car, en répétant deux fois cette permutation circulaire, on ne produit d'autre effet que la transposition de deux lettres en même temps que la transposition des deux autres. Ces deux transpositions devant être égales ne peuvent être que (b, e) et (c, d); d'où l'on conclut aisément que la permutation circulaire des lettres b, c, d, e, qui n'altère pas V, est

$$\begin{pmatrix} b & c & e & d \\ c & e & d & b \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} b & d & e & c \\ d & e & c & b \end{pmatrix}.$$

Mais il est évident que chacune de ces permutations laissera V invariable, car chacune d'elles produit le même effet que l'autre répétée trois fois.

Ainsi la fonction que nous considérons demeure invariable par les deux permutations circulaires

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & c & d & e & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b & c & e & d \\ c & e & d & b \end{pmatrix}.$$

Concluons donc que les fonctions de cinq lettres qui ont six valeurs sont invariables par deux permutations circulaires, l'une de cinq, l'autre de quatre lettres, et que les fonctions de ce genre sont toutes semblables à un même type. On peut prendre pour type de ces fonctions, l'une de celles que Lagrange a considérées dans son étude sur la résolution générale des équations. Ce sont les fonctions symétriques des cinq expressions suivantes :

$$(a + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3 + e\alpha^4)^5,$$
$$(a + b\beta + c\beta^2 + d\beta^3 + e\beta^4)^5,$$
$$(a + b\gamma + c\gamma^2 + d\gamma^3 + e\gamma^4)^5,$$
$$(a + b\delta + d\delta^2 + d\delta^3 + e\delta^4)^5,$$

où α, β, γ, δ désignent les quatre racines de l'équation

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$$

On peut aussi déduire de notre analyse un type assez simple des fonctions de cinq lettres qui ont six valeurs. Si l'on forme les produits deux à deux des cinq lettres a, b, c, d, e, que l'on ajoute ensemble les deux produits qui correspondent à deux transpositions équivalentes, et qu'on multiplie la somme par le carré de la cinquième lettre qui n'y entre pas, on obtiendra les cinq fonctions suivantes :

$$(ad + bc)\, e^2,$$
$$(ab + ce)\, d^2,$$
$$(ae + bd)\, c^2,$$
$$(ac + de)\, b^2,$$
$$(be + cd)\, a^2.$$

Or, si l'on applique à ces fonctions l'une quelconque des deux substitutions circulaires

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & c & d & e & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b & c & e & d \\ c & e & d & b \end{pmatrix},$$

elles ne font que s'échanger les unes dans les autres; donc leur somme ne changera par aucune de ces permutations, et comme d'ailleurs elle n'est pas symétrique, elle aura six valeurs distinctes. On peut donc prendre pour type des fonctions de cinq lettres qui ont six valeurs, la fonction suivante,

$$a^2(be + cd) + b^2(ac + de) + c^2(ae + bd) + d^2(ab + ce) + e^2(ad + bc),$$

qui est homogène et du quatrième degré.

2°. *La fonction* V *a trente valeurs.*

Comme elle a six valeurs par les permutations de trois quelconques des quatre lettres b, c, d, e, considérée comme fonction de ces quatre lettres, elle est semblable à l'un des deux types

$$(b-c)(d-e),$$
$$(b-c)(d-e)[(b-c)^2-(d-e)^2].$$

Les fonctions que nous considérons forment donc deux classes. Les permutations qui laissent invariables les fonctions de la première classe sont les transpositions simultanées que l'on forme en partageant quatre lettres en deux groupes. Les fonctions de la seconde espèce ne sont pas changées par une permutation circulaire de quatre lettres. On peut prendre les deux fonctions qu'on vient d'écrire pour types des fonctions de cinq lettres qui ont trente valeurs, et qui en ont toujours six par les permutations de trois lettres quelconques.

3°. *La fonction* V *a douze valeurs.*

Dans ce cas, la fonction V prend ses douze valeurs par les permutations de quatre lettres quelconques, comme nous en avons déjà fait la remarque au commencement de ce paragraphe. En outre, comme de ces douze valeurs elle en prend toujours six par les permutations de trois lettres quelconques, il résulte de ce qui a été dit dans le § I, qu'on peut partager quatre quelconques des cinq lettres a, b, c, d, e en deux groupes tels, que la transposition des lettres du premier groupe soit équivalente à la transposition des lettres du second groupe. D'où il résulte, comme nous l'avons vu précédemment, que les dix transpositions sont équivalentes deux à deux, et que la fonction V n'est pas changée par une permutation circulaire de cinq lettres.

On voit donc que les fonctions de cinq lettres qui ont douze valeurs restent invariables par une permutation circulaire de cinq lettres, $\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & c & d & e & a \end{pmatrix}$ par exemple, et par les transpositions simultanées (a, d) et (b, c).

On peut prendre pour type le produit

$$vy,$$

en posant

$$v = (a-b)(a-c)(a-d)(a-e)(b-c)(b-d)(b-e)(c-d)(c-e)(d-e),$$

et en désignant par y une fonction de cinq lettres qui a six valeurs.

4°. *La fonction* V *a soixante valeurs.*

Considérée comme fonction des quatre lettres b, c, d, e, elle a douze valeurs et elle est semblable au type

$$(b + 2c)(d + 2e),$$

d'après le § I. La seule permutation qui ne change pas sa valeur équivaut aux deux transpositions simultanées (b, d), (c, e); donc les fonctions de cinq lettres, qui ont soixante valeurs et qui en ont six par les permutations de trois lettres quelconques, sont semblables au type qu'on vient d'écrire.

5°. *La fonction* V *a vingt-quatre valeurs.*

Dans ce cas, il y a cinq permutations qui donnent à la fonction V la même valeur. Désignons par A et A′ deux permutations quelconques donnant à V la même valeur. Je dis que A′ doit nécessairement se déduire de A par une permutation circulaire de cinq lettres. En effet, A′ se déduit nécessairement de A

ou par une permutation circulaire de cinq lettres,
ou par une permutation circulaire de quatre lettres,
ou par une permutation circulaire de trois lettres
jointe à une transposition,
ou par une seule permutation circulaire de trois lettres,
ou par deux transpositions,
ou par une transposition.

Le deuxième, le quatrième, le cinquième et le sixième cas sont impossibles, car la fonction V n'aurait pas vingt-quatre valeurs par les permutations de quatre lettres.

Le troisième cas est également impossible, car en répétant trois fois l'opération par laquelle on passe de la permutation A à la permutation A′, en obtiendrait une permutation A″ qui donnerait à V la même valeur que la permutation A. Or A et A″ se déduisent l'une de l'autre par une simple transposition, et la fonction V n'est pas symétrique par rapport à deux lettres; donc, etc.

Donc la fonction V n'est pas changée par une permutation circulaire de cinq lettres.

Il suit de là que les fonctions de cinq lettres qui ont vingt-quatre valeurs sont semblables. On peut prendre pour type la fonction résolvante de Lagrange pour l'équation du cinquième degré, savoir

$$(a + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3 + e\alpha^4)^5,$$

où α désigne une racine de l'équation

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$$

6°. *La fonction V a cent vingt valeurs.*

On peut prendre pour type

$$a + 2b + 3c + 4d + 5e.$$

Résumé.

Il résulte de cette discussion que les fonctions de cinq lettres peuvent être partagées en dix-neuf classes de la manière suivante :

1°. Les fonctions symétriques.

2°. Les fonctions qui ont deux valeurs distinctes.

3°. Les fonctions qui ont cinq valeurs distinctes; elles sont symétriques par rapport à quatre lettres.

4°. Les fonctions qui ont six valeurs distinctes. Il y a une permutation circulaire de cinq lettres et une de quatre qui ne changent pas leur valeur.

5°. Les fonctions qui ont dix valeurs et qui sont symétriques par rapport à trois lettres.

6°. Les fonctions qui ont dix valeurs et qui ont deux valeurs par les permutations de quatre lettres.

7°. Les fonctions qui ont douze valeurs. Il y a une permutation circulaire de cinq lettres qui ne change pas leur valeur. On peut aussi grouper quatre lettres quelconques deux à deux, de manière que les transpositions simultanées des lettres de chaque groupe ne changent pas les fonctions de cette espèce.

8°. Les fonctions qui ont quinze valeurs. Elles sont symétriques par rapport à deux lettres, symétriques aussi par rapport à deux autres, et, de plus, elles ne changent pas en transposant les deux premières respectivement avec les deux dernières.

9°. Les fonctions qui ont vingt valeurs et qui sont symétriques par rapport à trois lettres.

10°. Les fonctions qui ont vingt valeurs, qui sont symétriques par rapport à deux lettres, et ont deux valeurs par les permutations des trois autres lettres.

11°. Les fonctions qui ont vingt valeurs, et qui ont deux valeurs par les permutations de trois lettres, sans être symétriques par rapport aux deux autres.

12°. Les fonctions qui ont vingt-quatre valeurs. Il y a une permutation circulaire de cinq lettres qui ne change pas leur valeur.

13°. Les fonctions qui ont trente valeurs et qui sont symétriques par rapport à deux lettres, symétriques aussi par rapport à deux autres, mais qui changent quand on transpose les deux premières respectivement avec les deux autres.

14°. Les fonctions qui ont trente valeurs et qui ne changent pas par une permutation circulaire de quatre lettres.

15°. Les fonctions qui ont trente valeurs et qui contiennent quatre lettres, de telle manière qu'elles ne changent pas quand on transpose deux quelconques de ces quatre lettres, pourvu qu'on transpose en même temps les deux autres.

16°. Les fonctions qui ont quarante valeurs. Elles n'ont que deux valeurs par les permutations de trois des cinq lettres.

17°. Les fonctions qui ont soixante valeurs et qui sont symétriques par rapport à deux lettres.

18°. Les fonctions qui ont soixante valeurs et qui ne sont pas symétriques par rapport à deux lettres.

19°. Les fonctions qui ont cent vingt valeurs.

Remarque. Tout diviseur du produit 1.2.3.4.5, à l'exception de 3, 4 et 8, peut représenter le nombre des valeurs d'une fonction de cinq lettres.

§ III.

Des fonctions de six lettres qui ont six valeurs distinctes.

Dans le Mémoire précédent, j'ai démontré qu'une fonction de n lettres qui a précisément n valeurs distinctes, est symétrique par rapport à $n-1$ lettres, à moins que n ne soit égal à 6. Les fonctions de six lettres constituent ainsi une exception digne de remarque; j'indiquerai, en terminant ce Mémoire, la composition des fonctions de six lettres non symétriques par rapport à cinq lettres et qui offrent cependant six valeurs distinctes.

Soit

$$V = \varphi(a, b, c, d, e, f)$$

une fonction de six lettres qu'on suppose avoir six valeurs distinctes.

Le nombre des valeurs qu'on peut obtenir par les permutations des cinq lettres

$$a, \quad b, \quad c, \quad d, \quad e,$$

ne pouvant être égal ni à 3 ni à 4, sera l'un des quatre suivants :

$$1, \quad 2, \quad 5, \quad 6.$$

Dans le premier cas, la fonction V est symétrique par rapport à cinq lettres, et elle a effectivement six valeurs distinctes.

Le deuxième cas est impossible, car le nombre total des valeurs de V serait égal à 2 ou à 12, ce qui est contre l'hypothèse.

Dans le troisième cas, la fonction V a cinq valeurs par les permutations de cinq lettres, et elle en a six par les permutations des six lettres; il en résulte que la fonction V est symétrique par rapport à cinq lettres.

Il suit de là que si la fonction V n'est pas symétrique par rapport à cinq lettres, elle doit prendre ses six valeurs par les permutations de cinq lettres quelconques. D'ailleurs on a vu, dans le paragraphe précédent, qu'une fonction de cinq lettres qui a six valeurs, prend ses six valeurs par les permutations de trois lettres quelconques: donc, *une fonction de six lettres, qui a six valeurs distinctes et qui n'est pas symétrique par rapport à cinq lettres, prend ses six valeurs par les permutations de trois lettres quelconques.*

En considérant V comme fonction des cinq lettres a, b, c, d, e, on a vu que cette fonction n'est pas changée par une permutation circulaire de cinq lettres et par une de quatre; soient, comme dans le paragraphe précédent,

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & c & d & e & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b & c & e & d \\ c & e & d & b \end{pmatrix},$$

ces deux permutations. Pour établir que la fonction V n'est pas changée par la première des deux permutations circulaires précédentes, nous avons démontré que les dix transpositions que l'on obtient en combinant deux à deux les cinq lettres a, b, c, d, e, sont équivalentes deux à deux: on a

$$\begin{aligned} (a, d) &= (b, c), \\ (a, b) &= (c, e), \\ (a, e) &= (b, d), \\ (a, c) &= (d, e), \\ (b, e) &= (c, d); \end{aligned}$$

ce qui, au surplus, peut être déduit, à postériori, de ce que la fonction V n'est pas changée par les deux permutations circulaires écrites plus haut.

Si maintenant on considère les quinze transpositions qu'on obtient en combinant les six lettres deux à deux, il est évident que les cinq qui contiennent la lettre f devront être respectivement équivalentes à cinq des dix autres; et comme deux transpositions qui ont une lettre commune ne peuvent être équivalentes, ainsi que j'en ai fait la remarque dans le paragraphe précédent, on aura nécessairement

$$\begin{gathered}(a, d) = (b, c) = (e, f),\\ (a, b) = (c, e) = (d, f),\\ (a, e) = (b, d) = (c, f),\\ (a, c) = (d, e) = (b, f),\\ (b, e) = (c, d) = (a, f).\end{gathered}$$

Ainsi, en particulier, on ne changera pas V en y faisant simultanément les deux transpositions (c, e) et (d, f); on aura donc

$$\mathrm{V} = \varphi(a, b, e, f, c, d).$$

Maintenant nous savons que la fonction V n'est pas changée par la permutation circulaire

$$\begin{pmatrix}1.2.3.4.5\\ 2.3.4.5.1\end{pmatrix} [*];$$

on aura donc

$$\mathrm{V} = \varphi(b, e, f, c, a, d).$$

Enfin, comme cette fonction n'est pas changée non plus par la permutation circulaire

$$\begin{pmatrix}2.3.5.4\\ 3.5.4.2\end{pmatrix},$$

on aura

$$\mathrm{V} \quad \text{ou} \quad \varphi(a, b, c, d, e, f) = \varphi(b, f, a, e, c, d);$$

on voit donc que la fonction V n'est pas changée par la permutation circulaire de six lettres

$$\begin{pmatrix}a & b & c & d & e & f\\ b & f & a & e & c & d\end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix}a & b & f & d & e & c\\ b & f & d & e & c & a\end{pmatrix}.$$

Concluons donc que les fonctions de six lettres qui ont six valeurs, et qui ne sont pas symétriques par rapport à cinq lettres, ne sont pas changées :

---

[*] Nous indiquons par cette notation qu'il faut remplacer les lettres qui occupent les rangs 1, 2, 3, 4, 5, par celles qui occupent les rangs 2, 3, 4, 5, 1.

1°. Par une permutation circulaire de six lettres;

2°. Par une de cinq lettres;

3°. Par une de quatre lettres.

Il résulte aussi de notre analyse que toutes les fonctions de cette espèce sont semblables et peuvent s'exprimer rationnellement en fonction de l'une quelconque d'entre elles et de fonctions symétriques. Nous nous bornerons donc à indiquer la formation d'un type.

Formons les produits deux à deux des six lettres a, b, c, d, e, f, et faisons les sommes des trois produits correspondants aux transpositions équivalentes que nous avons écrites plus haut. On aura les cinq fonctions suivantes :

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} ad + bc + ef, \\ ab + ce + df, \\ ae + bd + cf, \\ ac + de + bf, \\ be + cd + af; \end{array}\right.$$

or, si l'on applique l'une quelconque des substitutions circulaires

$$(2)\qquad \begin{pmatrix} a & b & f & d & e & c \\ b & f & d & e & c & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & c & d & e & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b & c & e & d \\ c & e & d & b \end{pmatrix},$$

aux fonctions (1), on voit qu'elles ne font que s'échanger les unes dans les autres : donc leur produit

$$(ad + bc + ef)(ab + ce + df)(ae + bd + cf)(ac + de + bf)(be + cd + af)$$

ne changera par aucune des substitutions circulaires (2), et, comme il n'est pas symétrique, il a précisément six valeurs.

La somme des expressions (1) est une fonction symétrique; il en est de même de la somme de leurs carrés : mais la somme de leurs cubes ne l'est pas, et peut être prise, aussi bien que le produit précédent, pour type des fonctions que nous considérons.