JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ED. PHILLIPS

# Thèse de mécanique. Sur les changements instantanés de vitesse qui ont lieu dans un système de points matériels

*Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série*, tome 14 (1849), p. 300-336.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1849_1_14__300_0>

# THÈSE DE MÉCANIQUE.

*Sur les changements instantanés de vitesse qui ont lieu dans un système de points matériels;*

PAR M. ED. PHILLIPS,
Ingénieur des Mines.

## I.

Le problème du choc des corps solides, en tenant compte du frottement, n'a pas encore été traité dans le cas le plus général, où le glissement peut avoir, pendant le choc, une direction quelconque et variable. Poisson, dans sa *Mécanique*, a résolu le cas du choc d'une sphère contre un plan fixe, lorsque la direction du glissement reste constante pendant toute sa durée. M. Coriolis a examiné le cas de deux sphères qui viennent se choquer et a reconnu qu'alors la direction ne variait pas non plus pendant le choc. Nous allons exposer, dans cette Thèse, une méthode qui nous a conduit à la solution de cette question, dans le cas le plus général de deux corps solides de forme quelconque, la direction du glissement pouvant, d'ailleurs, varier pendant le choc, de quelque manière que ce soit.

Nous nous sommes occupé, en outre, dans cette Thèse, du sujet suivant :

Lorsqu'on veut déterminer le mouvement d'une machine et calculer son effet utile, le plus souvent l'application du principe des forces vives est suffisante, en raison de ce qu'il arrive, en général, que le système est à liaisons complètes et que le mouvement d'un seul point détermine celui de tous les autres, et, par conséquent, qu'une seule équation fait connaître à la fois les vitesses et les positions simultanées de tous ses points. On sait, d'ailleurs, que dans un système quelconque, dans lequel il se produit un changement brusque dans les vitesses, par l'effet de chocs ou de la suppression instantanée de tout ou partie de ses liaisons, l'équation des forces vives subit un certain changement dû aux forces vives ainsi perdues et qui forment une somme égale aux forces vives dues aux vitesses perdues ou gagnées instantanément par les différents points. Cette perte, dans le cas des chocs, n'a la valeur précédente que dans le cas tout à fait abstrait de corps complétement dénués d'élasticité. Le théorème qui en résulte, et qui est dû à Carnot, indique qu'en pareil cas les forces mutuelles développées au contact produisent toujours un travail résistant et donnent la valeur de celui-ci sans qu'il soit besoin de connaître les intensités, d'ailleurs variables, de ces actions mutuelles, non plus que les déplacements insensibles de leurs points d'application. Il sert, en outre, quelquefois à déduire pour deux corps qui se choquent, leurs vitesses immédiatement après le choc, de celles qui avaient lieu au commencement de celui-ci.

Il faut d'ailleurs, pour que les principes qui viennent d'être mentionnés soient applicables, que les liaisons du système soient indépendantes du temps, c'est-à-dire qu'elles consistent en ce que certains points seraient ou fixes ou assujettis à rester sur des courbes ou sur des surfaces fixes. S'il n'en était pas ainsi, par exemple si certains points étaient astreints à demeurer sur des surfaces mobiles, l'équation des forces vives, ainsi que le théorème de Carnot, ne pourraient plus être appliqués, parce que l'un et l'autre supposent, qu'à un instant donné, la vitesse absolue de chaque point soit compatible avec les liaisons du système.

Dans ce cas, on peut encore employer le principe des forces vives; mais, alors, il faut l'appliquer au mouvement relatif des différents points par rapport aux surfaces mobiles, et pour cela, faire usage du théorème de Coriolis ou de celui plus général de M. Sturm. Ce dernier théorème est fort utile, principalement dans l'étude des machines hydrauliques, dans lesquelles l'eau se meut sur des aubes ou dans des tuyaux mobiles, comme, par exemple, dans les turbines. Mais, quand on applique le principe des forces vives au mouvement relatif, on n'a pas directement l'équivalent du théorème de Carnot ou de

M. Sturm, c'est-à-dire le changement instantané qui a lieu dans les forces vives relatives, soit par l'effet de chocs, soit par un changement brusque dans les liaisons du système. Il nous a donc semblé qu'il y avait un certain intérêt à combler cette lacune, et nous sommes ainsi parvenu à des formules qui comprennent, comme cas particulier, le théorème de Carnot, et qui, le plus souvent, permettront de conclure les vitesses après le choc de celles qui ont lieu immédiatement avant. Ces formules s'appliquent également aux changements brusques produits dans les vitesses par la suppression ou par l'introduction instantanée de certaines liaisons. On en déduit toutes les équations propres à résoudre le problème général du choc des corps solides, soit mous, soit, au contraire, complétement élastiques.

## II.

### *Problème du choc des corps solides, en tenant compte du frottement.*

Poisson, dans sa *Mécanique*, montre comment l'on peut résoudre le problème du choc des corps solides, soit mous, soit parfaitement élastiques, dans le cas le plus général, mais en négligeant le frottement. En tenant compte de celui-ci, il est un cas qui se traite de la même manière; c'est celui où la direction du glissement ne varie pas pendant le choc.

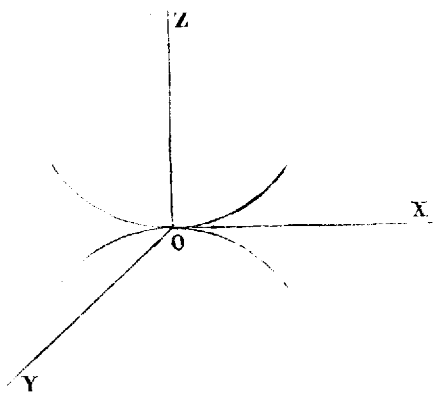
Alors le frottement F se combine avec l'action répulsive mutuelle N, qui agit suivant la normale, et leur résultante est inclinée d'une certaine quantité sur le plan tangent commun. Cet angle peut être regardé comme connu, car l'expérience semble démontrer qu'à chaque instant la quantité de mouvement qui servirait de mesure au frottement est proportionnelle à celle qui mesurerait, pendant le même temps, l'action de la pression normale. La résultante de ces deux forces est donc, d'après cela, inclinée d'un angle connu sur le plan tangent. Dans le cas du frottement de roulement qui est très-faible, on peut le négliger, de sorte que nous supposerons qu'il ne s'agisse que du frottement de glissement. Le glissement ayant lieu suivant la même direction pendant toute la durée du choc, les quantités de mouvement qui mesurent le frottement s'ajoutent, et celui-ci peut être regardé comme ayant eu pour direction constante la droite, dans le plan tangent, suivant laquelle les éléments de contact se séparent dans le mouvement effectif.

Quand le glissement ne conserve pas la même direction pendant toute la durée du choc, toutes les quantités de mouvement élémentaires qui mesurent le frottement à chaque instant sont bien proportionnelles aussi à chaque instant à la quantité de mouvement qui mesure la pression normale pendant le même élément de temps; mais, comme la direction du glissement varie pendant le choc, la quantité de mouvement qui mesure le frottement pendant tout le choc n'est plus égale à la somme des quantités de mouvement élémentaires dont elle est la résultante, de sorte qu'on ne connaît plus rien quant à sa direction ni quant à sa grandeur.

On peut, toutefois, résoudre encore le problème, même dans ce cas le plus général. Voici la méthode que nous avons employée.

Nous supposerons d'abord qu'il s'agisse de deux corps solides entièrement libres dans l'espace et complétement dépourvus d'élasticité.

Soit O le point de contact des deux corps à l'instant du choc, et




soient XOY le plan tangent commun et OZ la normale. Prenons trois axes coordonnés rectangulaires, qui sont la normale OZ et deux droites OX, OY, situées dans le plan tangent. Le mouvement de chacun des deux corps peut être défini par celui du point O appartenant à ce corps et par un mouvement de rotation autour d'un certain axe instantané passant par ce même point, axe qui sera, en général, différent pour les deux corps. Pour chacun de ceux-ci à un instant quelconque, la vitesse du point O peut être décomposée en trois autres suivant les trois axes, et leur vitesse de rotation peut, de même pour chacun d'eux, être décomposée en trois autres, autour des trois axes coordonnés. Le choc ayant une durée finie, quoique inappréciable à nos sens, nous allons chercher, en tenant compte du frottement, comment ces vitesses varient, pour chaque corps, pendant le choc.

Soient donc, à une époque quelconque de celui-ci, $u$, $v$, $w$ les composantes de la vitesse du point O pour l'un des corps, suivant OX, OY et OZ; soient au même instant $p$, $q$, $r$ les composantes de sa vitesse angulaire respectivement autour de OX, OY et OZ. Soient en même temps $u'$, $v'$, $w'$; $p'$, $q'$, $r'$ les mêmes quantités pour l'autre corps. Soit Z, à ce moment, la pression mutuelle qui a lieu au point O, dans le sens de la normale : si $f$ est le coefficient ordinaire du frottement de glissement relatif à la substance des deux corps choquants. nous admettrons que $f\mathrm{Z}$ soit la grandeur du frottement.

Or on peut appliquer le principe de d'Alembert pour les quantités de mouvement à une partie quelconque du choc, tout aussi bien qu'à toute sa durée; par conséquent, pendant l'instant infiniment petit $dt$, il doit y avoir équilibre, pour chaque corps, d'une part, entre les forces Z et $f\mathrm{Z}$ qui agissent sur lui, ou plutôt entre les quantités de mouvement qui mesurent, pendant le temps $dt$, l'action de ces forces, et, d'autre part, entre les quantités de mouvement perdues pendant ce même temps $dt$, par les différents points matériels qui le composent.

Or, pour le corps qui, sur la figure, est au-dessus du plan tangent, $Zdt$ est la quantité de mouvement qui, pendant le temps $dt$, mesure la pression normale qu'il éprouve de la part du corps inférieur; $fZdt$ est donc aussi la quantité de mouvement qui mesure le frottement pendant le même intervalle. Cette quantité de mouvement a, dans le plan tangent, une direction qui, en général, n'est pas connue, mais que nous pouvons exprimer au moyen des autres inconnues de la question; car elle est contenue dans le plan normal mené par la direction du glissement à l'instant que l'on considère, et n'est autre, par conséquent, que la projection de la direction du glissement sur le plan tangent : or le glissement, faisant avec les axes des angles dont les cosinus sont proportionnels à $u - u'$, $v - v'$, $w - w'$, sa projection sur le plan tangent fait, avec les axes OX et OY, des angles dont les cosinus sont respectivement égaux à

$$\frac{u - u'}{\sqrt{(u - u')^2 + (v - v')^2}} \quad \text{et à} \quad \frac{v - v'}{\sqrt{(u - u')^2 + (v - v')^2}};$$

et, comme le frottement agit sur chaque corps en sens inverse de son glissement, par rapport à l'autre considéré comme fixe, il s'ensuit que les composantes suivant OX et OY des quantités de mouvement qui mesurent le frottement pendant le temps $dt$, sont respectivement

$$-f\mathrm{Z}dt\frac{u - u'}{\sqrt{(u - u')^2 + (v - v')^2}} \quad \text{et} \quad -f\mathrm{Z}dt\frac{v - v'}{\sqrt{(u - u')^2 + (v - v')^2}}.$$

D'un autre côté, pour un point quelconque $(x, y, z)$ du corps considéré, les composantes parallèles aux axes provenant de la rotation du mobile sont respectivement $qz - ry$, $rx - pz$, $py - qx$, par rapport à OX, OY et OZ. On a donc celles de sa vitesse absolue en y ajoutant les composantes $u$, $v$, $w$, de la vitesse du point O, ce qui donne

$$u + qz - ry, \quad v + rx - pz, \quad w + py - qx.$$

Dans le temps $dt$, ces composantes s'accroissent respectivement de leurs différentielles, soit de

$$du + zdq - ydr, \quad dv + xdr - zdp, \quad dw + ydp - xdq.$$

Ces quantités prises en signes contraires, sont les composantes des vitesses perdues. Par conséquent, si $m$ est la masse du point matériel $(x, y, z)$, les composantes de la quantité de mouvement perdue par ce point pendant le temps $dt$ sont respectivement

$$m(-du - zdq + ydr), \quad m(-dv - xdr + zdp),$$
$$m(-dw - ydp + xdq).$$

Établissons maintenant les six équations qui expriment les conditions d'équilibre d'un corps solide libre.

On a ainsi :

$$\int m(-du - zdq + ydr) - fZdt\,\frac{u-u'}{\sqrt{(u-u')^2+(v-v')^2}} = 0,$$
$$\int m(-dv - xdr + zdp) - fZdt\,\frac{v-v'}{\sqrt{(u-u')^2+(v-v')^2}} = 0,$$
$$\int m(-dw - ydp + xdq) + Zdt = 0,$$
$$\int mx(-dv - xdr + zdp) - \int my(-du - zdq + ydr) = 0,$$
$$\int mz(-du - zdq + ydr) - \int mx(-dw - ydp + xdq) = 0,$$
$$\int my(-dw - ydp + xdq) - \int mz(-dv - xdr + zdp) = 0.$$

Si l'on appelle $x_1, y_1, z_1$ les coordonnées du centre de gravité du corps auquel se rapportent ces équations, M la masse totale de ce corps, et A, B, C ses moments d'inertie par rapport aux axes OX, OY et OZ, on a

$$\int mx = Mx_1,\quad \int my = My_1,\quad \int mz = Mz_1;$$

puis

$$\int m(y^2+z^2) = A,\quad \int m(x^2+z^2) = B,\quad \int m(x^2+y^2) = C.$$

Les six équations d'équilibre deviennent alors

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
&-Mdu - Mz_1\,dq + My_1\,dr - fZdt\,\frac{u-u'}{\sqrt{(u-u')^2+(v-v')^2}} = 0,\\
&-Mdv - Mx_1\,dr + Mz_1\,dp - fZdt\,\frac{v-v'}{\sqrt{(u-u')^2+(v-v')^2}} = 0,\\
&-Mdw - My_1\,dp + Mx_1\,dq + Zdt = 0,\\
&-Mx_1\,dv + My_1\,du - Cdr + dp\int mxz + dq\int myz = 0,\\
&-Mz_1\,du + Mx_1\,dw - Bdq + dr\int mzy + dp\int mxy = 0,\\
&-My_1\,dw + Mz_1\,dv - Adp + dq\int myx + dr\int mzx = 0.
\end{aligned}\right.$$

On aura six équations semblables pour le second corps. Seulement, il faut observer que, pour celui-ci, la force Z et le frottement agissent en sens contraires des mêmes forces pour le premier. Il faut donc changer leur signe, et on aura pour celui-ci,

$$-\mathrm{Z}dt, \quad -f\mathrm{Z}dt\,\frac{u-u'}{\sqrt{(u-u')^2+(v-v')^2}}$$

et

$$+f\mathrm{Z}dt\,\frac{v-v'}{\sqrt{(u-u')^2+(v-v')^2}},$$

au lieu de

$$+\mathrm{Z}dt, \quad -f\mathrm{Z}dt\,\frac{u-u'}{\sqrt{(u-u')^2+(v-v')^2}}$$

et

$$-f\mathrm{Z}dt\,\frac{v-v'}{\sqrt{(u-u')^2+(v-v')^2}}.$$

Du reste, les quantités de mouvement perdues gardent la même forme. Si donc, nous convenons de représenter par les mêmes lettres, avec des accents, ce qui se rapporte au second corps, nous aurons un autre système de six équations :

$$(2)\left\{\begin{array}{l}
-\mathrm{M}'du' - \mathrm{M}'z'_1\,dq' - \mathrm{M}'y'_1\,dr' + f\mathrm{Z}dt\,\dfrac{u-u'}{\sqrt{(u-u')^2+(v-v')^2}} = 0,\\
-\mathrm{M}'dv' - \mathrm{M}'x'_1\,dr' + \mathrm{M}'z'_1\,dp' + f\mathrm{Z}dt\,\dfrac{v-v'}{\sqrt{(u-u')^2+(v-v')^2}} = 0,\\
-\mathrm{M}'dw' - \mathrm{M}'y'_1\,dp' + \mathrm{M}'x'_1\,dq' - \mathrm{Z}dt = 0,\\
-\mathrm{M}'x'_1\,dv' + \mathrm{M}'y'_1\,du' - \mathrm{C}'dr' + dp'\displaystyle\int m'x'z' + dq'\int m'y'z' = 0,\\
-\mathrm{M}'z'_1\,du' + \mathrm{M}'x'_1\,dw' - \mathrm{B}'dq' + dr'\displaystyle\int m'z'y' + dp'\int m'x'y' = 0,\\
-\mathrm{M}'y'_1\,du' + \mathrm{M}'z'_1\,dv' - \mathrm{A}'dp' + dq'\displaystyle\int m'y'x' + dr'\int m'z'x' = 0.
\end{array}\right.$$

On a ainsi en tout douze équations entre treize variables, qui sont $u$, $v$, $w$, $p$, $q$, $r$, $u'$, $v'$, $w'$, $p'$, $q'$, $r'$ et $\mathrm{Z}dt$. De cette manière douze quelconques d'entre elles sont susceptibles d'être déterminées en fonctions de la treizième, en supposant que ces douze soient connues au commencement du choc. On pourrait donc ainsi chercher à exprimer les composantes des vitesses en fonctions de $\mathrm{Z}dt$; mais il vaut mieux introduire une nouvelle variable. A cet effet, posons

$$w - w' = \varepsilon,$$

d'où

(3) $$dw - dw' = d\varepsilon.$$

$\varepsilon$ sera, comme on voit, la différence dans le sens de la normale entre les vitesses des points de contact des deux corps. L'équation (3) et les systèmes (1) et (2) constituent treize équations entre quatorze variables, de sorte que toutes les autres sont susceptibles de pouvoir être exprimées en fonction de $\varepsilon$. D'ailleurs les limites de $\varepsilon$ sont parfaitement connues, car elles sont $w_0 - w'_0$ au commencement du choc et o à la fin, ou à l'instant de la plus grande compression.

Voyons maintenant comment on pourra faire l'élimination. D'abord, la troisième équation du système (1) donne $Zdt$, dont on peut substituer la valeur dans les autres équations où cette quantité entre. Ensuite, les trois dernières équations du système (1), les quatre dernières du système (2) et l'équation (3), forment huit équations qui peuvent servir à exprimer $dw$, $dp$, $dq$, $dr$ et $dw'$, $dp'$, $dq'$, $dr'$ en fonctions de $du$, $dv$, $du'$, $dv'$ et $d\varepsilon$. Substituant ensuite dans les deux premières équations du système (1) et dans les deux premières du système (2), on aura quatre équations de la forme

(4) $$P - P'' \frac{u - u'}{\sqrt{(u-u')^2 + (v-v')^2}} = 0,$$

(5) $$P' - P'' \frac{v - v'}{\sqrt{(u-u')^2 + (v-v')^2}} = 0,$$

(6) $$P_1 + P'' \frac{u - u'}{\sqrt{(u-u')^2 + (v-v')^2}} = 0,$$

(7) $$P'_1 + P'' \frac{v - v'}{\sqrt{(u-u')^2 + (v-v')^2}} = 0,$$

où $P$, $P'$, $P_1$, $P'_1$ et $P''$ sont cinq expressions, chacune de la forme

$$E\,du + F\,dv + G\,du' + H\,dv' + K\,d\varepsilon$$

On peut remplacer ces quatre équations par plusieurs de leurs combinaisons. Ainsi, si l'on ajoute les équations (4) et (6), puis les équations (5) et (7), on a d'abord

(8) $$P + P_1 = 0$$

et

(9) $$P' + P'_1 = 0.$$

Ensuite, il est facile de voir que les équations (4) et (5) donnent

(10) $$P(v - v') = P'(u - u').$$

Les équations (8) et (9) donneront $du'$ et $dv'$ en fonctions de $du$, $dv$ et $d\varepsilon$, et sous la forme

$$du' = \alpha du + 6 dv + \gamma d\varepsilon$$

et

$$dv' = \lambda du + \mu dv + \nu d\varepsilon,$$

les coefficients $\alpha$, $6$, $\gamma$, $\lambda$, $\mu$ et $\nu$ étant des constantes.

En intégrant, on aura

$$u' = \text{constante} + \alpha u + 6 v + \gamma \varepsilon$$

et

$$v' = \text{constante} + \lambda u + \mu v + \nu \varepsilon.$$

Substituant dans l'équation (10) et dans l'équation (4), on aura, en appelant $\Phi$, $\Phi'$ et $\Phi''$ ce que deviennent par cette substitution P, P' et P'' les deux équations différentielles simultanées du premier ordre entre $u$, $v$ et $\varepsilon$,

(11) $$\Phi \times (a + bu + cv + e\varepsilon) = \Phi'(a' + b'u + c'v + e'\varepsilon),$$

(12) $$\Phi = \Phi'' \frac{a' + b'u + c'v + e'\varepsilon}{\sqrt{(a' + b'u + c'v + e'\varepsilon)^2 + (a + bu + cv + e\varepsilon)^2}}.$$

et $\Phi$, $\Phi'$, $\Phi''$ sont de la forme

$$L du + N dv + R d\varepsilon, \quad L' du + N' dv + R' d\varepsilon, \quad L'' du + N'' dv + R'' d\varepsilon,$$

L, N, R, L', N', R', L'', N'', R'' étant des coefficients constants et connus.

Il s'agit maintenant de voir comment on pourra intégrer ces équations.

Pour cela, remplaçons-y $\Phi$, $\Phi'$ et $\Phi''$ par leurs valeurs; elles deviennent ainsi

(I) $$\begin{cases} (L\,du + N\,dv + R\,d\varepsilon)(a + bu + cv + e\varepsilon) \\ = (L'du + N'dv + R'd\varepsilon)(a' + b'u + c'v + e'\varepsilon) \end{cases}$$

et

$$\text{(II)}\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{L}\,du + \mathrm{N}\,dv + \mathrm{R}\,d\varepsilon \\ &= (\mathrm{L}''\,du + \mathrm{N}''\,dv + \mathrm{R}''\,d\varepsilon)\,\frac{a' + b'u + c'v + e'\varepsilon}{\sqrt{(a' + b'u + c'v + e'\varepsilon)^2 + (a + bu + cv + e\varepsilon)^2}}. \end{aligned}\right.$$

Introduisons dans ces équations, à la place de $u$ et de $v$, deux nouvelles variables $\varphi$ et $\psi$, déterminées par les deux équations suivantes :

$$(\alpha)\qquad \left\{\begin{aligned} a' + b'u + c'v + e'\varepsilon &= \varphi, \\ a + bu + cv + e\varepsilon &= \psi. \end{aligned}\right.$$

En tirant de ces équations les valeurs de $du$ et de $dv$ et les portant dans les équations (I) et (II), celles-ci deviendront de la forme

$$\text{(III)}\qquad \psi\,(\mathrm{P}\,d\varphi + \mathrm{Q}\,d\psi + \mathrm{S}\,d\varepsilon) = \varphi\,(\mathrm{P}'\,d\varphi + \mathrm{Q}'\,d\psi + \mathrm{S}'\,d\varepsilon)$$

et

$$\text{(IV)}\qquad \mathrm{P}\,d\varphi + \mathrm{Q}\,d\psi + \mathrm{S}\,d\varepsilon = \frac{\varphi}{\sqrt{\varphi^2 + \psi^2}}\,(\mathrm{P}''\,d\varphi + \mathrm{Q}''\,d\psi + \mathrm{S}''\,d\varepsilon).$$

$\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{S}$; $\mathrm{P}', \mathrm{Q}', \mathrm{S}'$; $\mathrm{P}'', \mathrm{Q}'', \mathrm{S}''$ sont des coefficients constants et connus.

En résolvant l'équation (III) par rapport à $d\varepsilon$, on a

$$\text{(V)}\qquad d\varepsilon = \frac{\varphi\,(\mathrm{P}'\,d\varphi + \mathrm{Q}'\,d\psi) - \psi\,(\mathrm{P}\,d\varphi + \mathrm{Q}\,d\psi)}{\mathrm{S}\psi - \mathrm{S}'\varphi}.$$

Si l'on substitue cette valeur de $d\varepsilon$ dans l'équation (IV), celle-ci devient, en réduisant,

$$\text{(VI)}\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\mathrm{S}\varphi\,(\mathrm{P}'\,d\varphi + \mathrm{Q}'\,d\psi) - \mathrm{S}'\varphi\,(\mathrm{P}\,d\varphi + \mathrm{Q}\,d\psi)}{\mathrm{S}\psi - \mathrm{S}'\varphi} \\ &= \frac{\varphi}{\sqrt{\varphi^2 + \psi^2}} \times \frac{\mathrm{S}\psi\,(\mathrm{P}''\,d\varphi + \mathrm{Q}''\,d\psi) - \mathrm{S}'\varphi\,(\mathrm{P}''\,d\varphi + \mathrm{Q}''\,d\psi) + \mathrm{S}''\varphi\,(\mathrm{P}'\,d\varphi + \mathrm{Q}'\,d\psi) - \mathrm{S}''\psi\,(\mathrm{P}\,d\varphi + \mathrm{Q}\,d\psi)}{\mathrm{S}\psi - \mathrm{S}'\varphi}. \end{aligned}\right.$$

Cette équation ne contient plus que les deux variables $\varphi$ et $\psi$. Elle est satisfaite d'abord par $\varphi = 0$; mais cette valeur n'est pas l'intégrale générale, puisqu'elle ne contient pas de constante arbitraire. En faisant attention à ce qui a été représenté par $\varphi$, on voit que $\varphi = u - u'$, et dès lors $\varphi = 0$ répond à $u - u' = 0$. Ce ne peut donc être qu'une valeur particulière de l'intégrale, répondant à l'instant où $u = u'$, ou bien la solution générale répondant au cas où $u$ serait constamment égal à $u'$, c'est-à-dire où pendant toute la durée du choc, le glissement suivant le plan tangent s'effectuerait suivant la direction constante de l'axe des $y$. Dans tous les cas, on saura, soit par les autres équations, soit directement par les données, si cette solution est admissible ou non.

De même, l'équation (VI) est satisfaite par $S\psi - S'\varphi = 0$ ou $\varphi = \frac{S}{S'}\psi$; mais ce n'est pas non plus l'intégrale générale, puisqu'il n'y a pas de constante arbitraire. Comme $\varphi = u - u'$ et $\psi = v - v'$, cela répond à $u - u' = \frac{S}{S'}(v - v')$; par conséquent, c'est une valeur particulière de l'intégrale générale, répondant à l'instant où l'on aurait $\frac{u-u'}{v-v'} = \frac{S}{S'}$, ou bien ce serait la solution générale dans le cas où le glissement conserverait une direction constante suivant le plan tangent et déterminée par la relation $\tang \alpha = \frac{v-v'}{u-u'} = \frac{S'}{S}$, $\alpha$ étant l'angle formé par cette direction avec l'axe des $x$. Cette solution devra être rejetée ou conservée suivant les données particulières de la question.

Pour avoir l'intégrale générale de l'équation (VI), on peut donc diviser ses deux membres par le facteur commun $\frac{\varphi}{S\psi - S'\varphi}$, et elle devient alors

$$
(\text{VII})\qquad \left\{\begin{aligned}
&\sqrt{\varphi^2+\psi^2}\,[(SP'-PS')\,d\varphi + (SQ'-QS')\,d\psi]\\
&= [(SP''-PS'')\psi + (P'S''-S'P'')\varphi]\,d\varphi\\
&+ [(SQ''-QS'')\psi + (Q'S''-S'Q'')\varphi]\,d\psi.
\end{aligned}\right.
$$

Pour intégrer l'équation (VII), introduisons encore à la place de $\varphi$ et de $\psi$ deux nouvelles variables, $\omega$ et $\theta$, qui soient telles que l'on ait

$$\varphi = \omega \cos\theta \quad \text{et} \quad \psi = \omega \sin\theta.$$

On voit que ces nouvelles inconnues ne sont autre chose que la vitesse relative de glissement suivant le plan tangent et l'angle formé par la direction de ce glissement avec l'axe des $x$. On déduit des relations précédentes,

$$d\varphi = -\,\omega \sin\theta\, d\theta + \cos\theta . d\omega$$

et

$$d\psi = \omega \cos\theta d\theta + \sin\theta . d\omega.$$

Substituant les valeurs précédentes à la place de $\varphi$, de $\psi$, de $d\varphi$ et de $d\psi$, dans l'équation (VII), celle-ci devient

$$\begin{aligned}\omega\,[&(SP' - PS')(-\omega \sin\theta d\theta + \cos\theta d\omega) + (SQ' - QS')(\omega\cos\theta d\theta + \sin\theta\, d\omega)]\\ =[&(SP'' - PS'')\,\omega \sin\theta + (P'S'' - S'P'')\,\omega\cos\theta](-\omega\sin\theta\, d\theta + \cos\theta d\omega)\\ +[&(SQ'' - QS'')\,\omega\sin\theta + (Q'S'' - S'Q'')\,\omega\cos\theta]\,(\omega\cos\theta\, d\theta + \sin\theta\, d\omega).\end{aligned}$$

Les deux membres de cette équation ont $\omega$ pour facteur commun. Elle est donc satisfaite par $\omega = 0$. Mais cette solution, qui répond à une vitesse de glissement nulle, n'est pas l'intégrale générale. Pour avoir celle-ci, divisons par $\omega$ les deux membres de l'équation, qui prend alors la forme

$$\frac{d\omega}{\omega} = \frac{g\sin\theta - h\cos\theta - i\sin^2\theta + (l-k)\sin\theta\cos\theta + m\cos^2\theta}{g\cos\theta + h\sin\theta - (i+m)\sin\theta\cos\theta - k\cos^2\theta - l\sin^2\theta}\, d\theta,$$

$g$, $h$, $i$, $k$, $l$, $m$ étant des coefficients constants et connus. En appelant $f(\theta)$ la fraction qui forme le premier facteur du second membre, et E la base des logarithmes népériens, on voit que

$$\text{(VIII)} \qquad \omega = \omega_0\, \mathrm{E}^{\int_{\theta_0}^{\theta} f(\theta)\, d\theta},$$

où $\theta_0$ et $\omega_0$ sont les valeurs particulières de $\theta$ et de $\omega$ au commencement du choc.

Cette intégrale pourra toujours s'obtenir; car, en faisant $\sin\theta = \sigma$, $\sigma$ étant une inconnue auxiliaire, on aura $f(\theta)d\theta = F(\sigma)d\sigma$, et $F(\sigma)d\sigma$ pourra toujours très-facilement être ramenée à la forme d'une fraction rationnelle.

Quant à $\varepsilon$, on l'aura en remplaçant dans (V) $\varphi$ et $\psi$, d'abord par leurs valeurs en $\omega$ et $\theta$, puis ensuite $\omega$ par sa valeur en $\theta$ donnée par (VIII), et $d\omega$ par sa valeur $\omega f(\theta)\,d\theta$. En appelant $f_1(\theta)$ une fraction analogue à $f(\theta)$, dont le numérateur et le dénominateur se composent chacun de termes égaux à certains coefficients multipliés par certaines puissances de $\sin\theta$ et $\cos\theta$, on a

$$d\varepsilon = \mathrm{E}^{\int_{\theta_0}^{\theta} f(\theta)\, d\theta} \times f_1(\theta)\, d\theta$$

et

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \int_{\theta_0}^{\theta} f_1(\theta)\, \mathrm{E}^{\int_{\theta_0}^{\theta} f(\theta)\,d\theta}\, d\theta.$$

On connaît aussi $\varphi$ et $\psi$, puisque $\varphi = \omega \cos\theta$ et $\psi = \omega \sin\theta$. D'ailleurs la valeur précédente de $\varepsilon$ permettra de connaître celle de $\theta$ à la fin du choc, puisque alors $\varepsilon = 0$.

Substituant dans les équations $(\alpha)$ à $\varepsilon$, $\varphi$ et $\psi$ leurs valeurs, on aura celles de $u$ et de $v$, et on obtiendra ensuite facilement celles de toutes les autres inconnues.

Supposons qu'on veuille examiner en particulier le cas où les axes coordonnés seraient pour chaque corps ses axes principaux relatifs au point de contact, et où, en même temps, chacun d'eux aurait son centre de gravité sur la normale commune au point de contact; on trouverait alors

$$\int mxy = 0, \int mxz = 0, \int myz = 0, \int m'y'x' = 0, \int m'x'z' = 0, \int m'y'z' = 0;$$
$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad x'_1 = 0, \quad y'_1 = 0.$$

Si on applique la méthode générale, et qu'on pose, pour abréger,

$$\frac{\mathrm{M}^2}{\mathrm{A}} z_1^2 - \mathrm{M} = a; \quad \frac{\mathrm{M}^2}{\mathrm{B}} z_1^2 - \mathrm{M} = b; \quad \frac{\mathrm{M}'^2}{\mathrm{A}'} z_1'^2 - \mathrm{M}' = a', \text{ et } \frac{\mathrm{M}'^2}{\mathrm{B}'} z_1'^2 - \mathrm{M}' = b',$$

on arrive à l'équation suivante entre $\omega$ et $\theta$,

$$\frac{d\omega}{\omega} = \frac{bb'(a+a')\sin^2\theta + aa'(b+b')\cos^2\theta}{[bb'(a+a') - aa'(b+b')]\sin\theta.\cos\theta}\, d\theta,$$

ou, en remplaçant $\cos^2\theta$ par $1 - \sin^2\theta$,

$$\frac{d\omega}{\omega} = \frac{aa'(b+b')}{bb'(a+a') - aa'(b+b')}\, \frac{d(2\theta)}{\sin(2\theta)} + \operatorname{tang}\theta\, d\theta.$$

En intégrant à partir du commencement du choc, on trouve

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \left(\frac{\operatorname{tang}\theta}{\operatorname{tang}\theta_0}\right)^{\frac{aa'(b+b')}{bb'(a+a') - aa'(b+b')}} \times \frac{\cos\theta_0}{\cos\theta}.$$

Supposons, en particulier, qu'il s'agisse du choc de deux sphères, de même volume et de même densité; alors $a = b = a' = b'$, et l'équation précédente donne $\operatorname{tang}\theta = \operatorname{tang}\theta_0$.

Ce qui indique que, dans ce cas, la direction du glissement ne varie pas pendant toute la durée du choc. Nous retrouvons ici, comme cas particulier, cette conséquence, que l'on trouve démontrée directement dans la théorie mathématique des effets du jeu de billard de M. Coriolis, et qui lui a servi à simplifier beaucoup la plupart des questions de dynamique qu'il a traitées dans cet ouvrage.

Il est même facile de voir que la même chose arriverait encore si deux corps homogènes de révolution venaient se choquer par l'extrémité de l'axe de chacun d'eux. En effet, on aurait alors $A = B$, $A' = B'$, et, par conséquent,

$$a = b \quad \text{et} \quad a' = b'; \text{ dès lors,} \quad bb'(a + a') - aa'(a + b') = 0,$$

et, par suite, le glissement conserverait pendant toute la durée du choc sa direction initiale suivant le plan tangent.

La même formule montre que, si $\theta_0 = 0$, on a aussi $\theta = 0$ pendant toute la durée du choc, et, par conséquent, la direction du glissement ne varie pas; c'est ce qui arrivera, en général, quand le glissement commencera suivant une direction qui coïncidera avec celle d'un axe principal commun aux deux corps relativement à leur point de contact.

On aurait pu, pour résoudre le problème, choisir d'autres axes coordonnés, et, en général, des axes quelconques. Les mêmes conditions d'équilibre se seraient toujours exprimées par un même nombre d'équations analogues. Seulement, il serait arrivé que les expressions des composantes de la quantité de mouvement élémentaire du frottement pendant l'instant $dt$ auraient dépendu non-seulement de $u, v, u'$ et $v'$, mais aussi de toutes les autres composantes des vitesses, c'est-à-dire de $w, p, q, r$; $w', p', q'$ et $r'$; car la direction du glissement aurait été fonction des vitesses des deux points en contact, et ces vitesses elles-mêmes auraient été exprimées au moyen de toutes ces quantités. Il en résulte que toutes les inconnues seraient entrées dans les équations, non-seulement par leurs différentielles, mais encore directement; en sorte que, pour l'élimination, on aurait été obligé de passer par la différentiation, et qu'on aurait été conduit finalement à des équations différentielles d'un ordre bien plus élevé.

La méthode qui vient d'être exposée, s'applique encore dans le cas où il y aurait dans le système un ou plusieurs points fixes. Et même, avec un peu d'attention, il est facile de voir qu'on intègre encore absolument de même les équations différentielles du problème. Il suffit alors de remplacer chaque point fixe par une force convenable, ce qui introduit trois nouvelles inconnues pour chacun d'eux; mais comme, d'un autre côté, la condition que le point correspondant demeure immobile fournit trois nouvelles équations, il s'ensuit que le nombre des équations sera toujours suffisant, et même on pourra par là connaître les pressions ou percussions éprouvées par les points fixes. S'il y avait un ou plusieurs points assujettis à rester chacun sur une courbe donnée, le résultat serait encore le même. On ferait abstraction de chaque courbe, en supposant celle-ci remplacée par une force normale d'une grandeur inconnue : on introduirait par là trois nouvelles inconnues; mais en même temps on aurait trois équations de plus, servant à exprimer, l'une que la force est normale à la courbe, et deux pour exprimer que la vitesse du point correspondant est toujours tangente à cette courbe. Enfin, il en serait encore de même s'il y avait un ou plusieurs points obligés de demeurer sur des surfaces fixes : on remplacerait chaque surface par une force convenable, normale à cette surface, ce qui n'introduirait qu'une inconnue de plus; car si N est la grandeur de cette force, que $F(x, y, z) = 0$ soit l'équation de la surface, que $\xi$, $\eta$, $\zeta$ soient les coordonnées du point en question, et que l'on ait

$$V = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dF}{\delta\xi}\right)^2 + \left(\frac{dF}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dF}{d\zeta}\right)^2}},$$

on aurait $NV\frac{dF}{d\xi}$, $NV\frac{dF}{d\eta}$ et $NV\frac{dF}{d\zeta}$ pour les composantes de N parallèles à OX, OY et OZ. On aurait en même temps une équation nouvelle servant à exprimer que la vitesse du point $(\xi, \eta, \zeta)$ est tangente à la surface en question; cette équation serait

$$\frac{dF}{d\xi} \times \frac{d\xi}{dt} + \frac{dF}{d\eta} \times \frac{d\eta}{dt} + \frac{dF}{d\zeta} \times \frac{d\zeta}{dt} = 0.$$

Or $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ sont des fonctions connues de la vitesse absolue du point de contact du corps auquel appartient le point $(\xi, \eta, \zeta)$, et de la vitesse de rotation de ce corps autour de l'axe instantané qui passe par son point de contact.

On voit encore, avec un peu d'attention, que, dans le cas d'un ou de plusieurs points assujettis à rester sur des courbes ou sur des surfaces fixes, on peut intégrer les équations différentielles du problème absolument de la même manière, de sorte que la méthode qui a été exposée est tout à fait générale.

En tenant compte du frottement, nous avons supposé que les deux corps choquants étaient complétement dépourvus d'élasticité, puisque nous avons pris o pour la valeur de $\varepsilon$ à la fin du choc. Si les corps étaient, au contraire, parfaitement élastiques, ce nouveau problème se ramènerait au précédent de la manière suivante : on fractionnerait le choc en deux parties, l'une depuis le commencement jusqu'à l'instant de la plus grande compression, alors que les vitesses des éléments de contact sont les mêmes pour les deux corps, dans le sens de la normale commune.

On calculerait ainsi les vitesses $u_1$, $v_1$, $w_1$, $p_1$, $q_1$, $r_1$, $u'_1$, $v'_1$, etc., qui ont lieu au moment de la plus grande compression, ainsi que $\int Z dt$ au même moment. La seconde période commencerait alors, et finirait au moment où les deux corps se séparent; elle comprendrait un second choc, pour lequel on aurait des équations analogues à celles de la première période. Seulement ici $\varepsilon$ serait o au commencement du choc, et sa valeur finale serait inconnue. On conçoit néanmoins qu'à l'aide des équations différentielles on puisse exprimer les vitesses finales $u_2$, $v_2$, $w_2$, $p_2$, $q_2$, etc., en fonctions de la valeur finale $\varepsilon_2$ de $\varepsilon$, car ce sont toujours les mêmes équations différentielles, et elles s'intègrent de la même manière.

On pourra de même exprimer pour la seconde période $\int Z dt$ en fonction de $\varepsilon_2$; or, si les deux corps sont supposés parfaitement élastiques, $\int Z dt$ doit avoir la même valeur pour la seconde période que pour la première, d'où résultera une équation qui déterminera la valeur de $\varepsilon_2$, et, par suite, pourra servir à exprimer les différentes vitesses $u_2$, $v_2$, $w_2$, etc., qui ont lieu à la fin du choc en fonction de quantités toutes connues.

Si les corps n'étaient, comme cela arrive à peu près toujours, qu'imparfaitement élastiques, alors $\int Z dt$, dans la seconde période, ne serait qu'une fraction de ce qu'est cette quantité de mouvement pendant la première, attendu que chaque corps ne reprendrait pas exactement, après le choc, la forme qu'il avait auparavant.

## III.

*Formules qui donnent les pertes de forces vives relatives dans les chocs de corps solides non élastiques, et dans les changements brusques de liaisons d'un corps solide.*

Il a été dit que, dans les changements brusques de vitesses produits par des chocs, il y avait toujours perte de force vive, et que cette perte était égale pour des corps complétement privés d'élasticité, et en supposant les frottements négligeables, à la force vive due aux vitesses perdues ou gagnées par les différents points des deux corps. C'est le théorème de Carnot qu'on peut démontrer fort simplement de la manière suivante:

Soient, à l'époque $t$, N et F les actions mutuelles qui s'exercent au contact des deux corps, suivant la normale et dans le plan tangent; la seconde force n'est autre que le frottement. Pour un déplacement virtuel compatible avec les liaisons du système, soient respectivement $\delta n$ et $\delta f$ ceux des points d'application des forces N et F. Les moments virtuels des quantités de mouvement élémentaires qui les mesurent pendant l'instant suivant $dt$ sont

$$N\delta n \cos(N, \delta n)\, dt \quad \text{et} \quad - F\delta f \cos(F, \delta f)\, dt.$$

Comme $\delta n$ et $\delta f$ peuvent être regardés comme constants pendant tout le choc, les moments virtuels des quantités de mouvement qui mesurent les forces N et F pendant toute la durée du choc sont respectivement

$$\sum \delta n \int N \cos(N, \delta n)\, dt \quad \text{et} \quad - \sum \delta f \int F \cos(F, \delta f)\, dt;$$

le signe $\int$ comprend toute la durée du choc, et le signe $\sum$ l'ensemble des termes dus aux différents contacts.

Soient d'ailleurs $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ les projections sur les axes coordonnés du déplacement virtuel du point $(x, y, z)$; appelons $\frac{dx_0}{dt}$, $\frac{dy_0}{dt}$ et $\frac{dz_0}{dt}$ les composantes de la vitesse de ce point immédiatement avant le choc, et soient $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dy_1}{dt}$, $\frac{dz_1}{dt}$ ce que deviennent ces composantes aussitôt après: si $m$ est la masse de ce point matériel, les composantes de la quantité de mouvement qu'il a perdue sont

$$m\left(\frac{dx_0}{dt}-\frac{dx_1}{dt}\right),\quad m\left(\frac{dy_0}{dt}-\frac{dy_1}{dt}\right),\quad m\left(\frac{dz_0}{dt}-\frac{dz_1}{dt}\right).$$

Or, puisqu'il y a équilibre entre ces quantités de mouvement et celles qui mesurent les forces N et F pendant le même intervalle de temps, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}&\sum \delta n \int \mathrm{N}\cos(\mathrm{N}, \delta n)\,dt - \sum \delta f \int \mathrm{F}\cos(\mathrm{F}, \delta f)\,dt \\ &= \sum m\left[\left(\frac{dx_1}{dt}-\frac{dx_0}{dt}\right)\delta x + \left(\frac{dy_1}{dt}-\frac{dy_0}{dt}\right)\delta y + \left(\frac{dz_1}{dt}-\frac{dz_0}{dt}\right)\delta z\right].\end{aligned}$$

Supposons maintenant qu'on choisisse, pour déplacements virtuels des différents points du système, ceux qui répondent aux vitesses qui ont lieu immédiatement après le choc, et qui sont compatibles avec les liaisons du système; alors

$$\delta x = dx_1,\quad \delta y = dy_1,\quad \delta z = dz_1.$$

De plus, en désignant par $dn_1$ et $df_1$ le rapprochement des deux corps dans le sens de la normale, et l'étendue du glissement dans le plan tangent, qui ont réellement lieu à la fin du choc, les termes du premier membre de l'équation précédente deviennent respectivement

$$\sum dn_1 \int \mathrm{N}\cos(\mathrm{N}, dn_1)\,dt \quad \text{et} \quad -\sum df_1 \int \mathrm{F}\cos(\mathrm{F}, df_1)\,dt,$$

et l'équation entière se transforme en celle-ci, après avoir tout divisé par $dt$,

$$\begin{aligned}&\sum \frac{dn_1}{dt}\int \mathrm{N}\cos(\mathrm{N}, dn_1)\,dt - \sum \frac{df_1}{dt}\int \mathrm{F}\cos(\mathrm{F}, df_1)\,dt \\ &= \sum m\left[\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dx_1 dx_0}{dt^2} + \frac{dy_1 dy_0}{dt^2} + \frac{dz_1 dz_0}{dt^2}\right)\right].\end{aligned}$$

Si les deux corps, après le choc, ont, au point de contact, des vitesses égales dans le sens de la normale commune, alors $\frac{dn_1}{dt} = 0$, et le premier terme du premier membre disparaît. Si le frottement est négligeable, le second terme disparaît aussi, et l'on a simplement

$$(1)\quad 0 = \sum m\left[\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dx_1\,dx_0}{dt^2} + \frac{dy_1\,dy_0}{dt^2} + \frac{dz_1\,dz_0}{dt^2}\right)\right].$$

Mais, d'un autre côté, on a identiquement

$$(\mathrm{II})\left\{\begin{aligned} &\sum m\left[\left(\frac{dx_0}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_0}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_0}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2\right] \\ &= \sum m\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{dx_0 - dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_0 - dy_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_0 - dz_1}{dt}\right)^2 \\ &- 2\left[\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dx_1\,dx_0}{dt^2} + \frac{dy_1\,dy_0}{dt^2} + \frac{dz_1\,dz_0}{dt^2}\right)\right]\end{aligned}\right\}.\end{aligned}\right.$$

A cause de (1), cette dernière équation se réduit, en appelant $V_0$ et $V_1$ les vitesses du point $m$ immédiatement avant et après le choc, et U la vitesse perdue ou gagnée par ce point, à

$$\sum m V_0^2 - \sum m V_1^2 = \sum m U^2.$$

En appelant T le travail résistant dû à la compression des deux corps produite par leurs actions mutuelles, on a

$$2T = \sum m V_1^2 - \sum m V_0^2 = -\sum m U^2.$$

Si les deux corps, après le choc, n'avaient pas des vitesses égales dans le sens de la normale commune, et si les frottements n'étaient pas négligeables, on aurait deux termes de plus, et l'on trouverait de même

$$\sum m V_1^2 - \sum m V_0^2,$$

ou

$$2T = -\sum m U^2 + 2\sum \frac{dn_1}{dt}\int N\cos(N, dn_1)\,dt - 2\sum \frac{df_1}{dt}\int F\cos(F, df_1)\,dt.$$

Si les deux corps ont, après le choc, des vitesses égales dans le sens de la normale commune au point de contact; que, cependant, on veuille tenir compte du frottement, mais que l'on sache que la direction du glissement n'a pas varié pendant toute la durée du choc, alors on a

$$\cos(F, df_1) = 1$$

et

$$\sum m V_1^2 - \sum m V_0^2, \quad \text{ou} \quad 2T = -\sum m U^2 - 2\sum \frac{df_1}{dt}\int F dt.$$

IV.

Il se produit une perte de force vive tout à fait semblable dans un corps que l'on assujettit brusquement à un nouveau système de liaisons. Ainsi, dans ce cas, les quantités de mouvement perdues par les différents points matériels dans ce changement instantané doivent se faire équilibre entre elles à l'aide des deux systèmes de liaisons, celles qui existaient primitivement et celles qui ont été ajoutées. Par conséquent, si $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ sont les projections sur les axes pour le point $(x, y, z)$ d'un déplacement virtuel compatible avec les deux systèmes de liaisons, on a, en conservant les mêmes notations que pour le théorème de Carnot,

$$\sum m\left[\left(\frac{dx_0}{dt} - \frac{dx_1}{dt}\right)\delta x + \left(\frac{dy_0}{dt} - \frac{dy_1}{dt}\right)\delta y + \left(\frac{dz_0}{dt} - \frac{dz_1}{dt}\right)\delta z\right] = 0.$$

On peut prendre, pour ces déplacements virtuels, ceux qui répondent aux vitesses qu'ont les différents points immédiatement après l'introduction des nouvelles liaisons, car ces déplacements sont compatibles avec les deux systèmes de liaisons; cela revient à faire, dans l'équation ci-dessus, $\delta x = dx_1$, $\delta y = dy_1$ et $\delta z = dz_1$, et cette équation devient, en divisant tout par $dt$,

$$\sum m\left[\left(\frac{dx_0}{dt} - \frac{dx_1}{dt}\right)\frac{dx_1}{dt} + \left(\frac{dy_0}{dt} - \frac{dy_1}{dt}\right)\frac{dy_1}{dt} + \left(\frac{dz_0}{dt} - \frac{dz_1}{dt}\right)\frac{dz_1}{dt}\right] = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\sum m U V_1 \cos(U, V_1) = 0.$$

Mais $V_0$ étant la résultante de U et de $V_1$, on a directement

$$\sum m V_0^2 = \sum m V_1^2 + \sum m U^2 + 2\sum m U V_1 \cos(U, V_1),$$

ce qui, à cause de l'équation précédente, se réduit à

$$\sum m V_0^2 - \sum m V_1^2 = \sum m U^2.$$

Inversement, si l'on vient à supprimer brusquement tout ou partie des liaisons d'un système, il y a gain de force vive égal à la force vive due aux vitesses perdues ou gagnées par les différents points.

Ce théorème se démontre d'une manière tout à fait analogue, et l'on trouve

$$\sum m V_1^2 - \sum m V_0^2 = \sum m U^2.$$

Ainsi, quand des liaisons viennent à être brusquement supprimées, il y a toujours gain de force vive.

## V.

Le théorème de Carnot, et ceux analogues sur les liaisons, donnent les forces vives gagnées ou perdues brusquement dans les circonstances correspondantes. Nous allons maintenant voir ce que deviennent ces théorèmes quand on les applique au mouvement relatif, c'est-à-dire que nous allons chercher quelle est l'expression supplémentaire répondant à $-\frac{1}{2}\sum m U^2$ dans le mouvement absolu, et qu'il faudrait introduire dans l'équation des forces vives pour les mouvements relatifs, dans le cas de chocs ou de modification instantanée dans le système des liaisons établies. En un mot, nous allons chercher, pour le mouvement relatif, l'équivalent du théorème de Carnot pour le mouvement absolu.

A cet effet, conservons les mêmes notations que précédemment pour la démonstration du théorème de Carnot. On aura encore, pour tout déplacement virtuel ($\delta x$, $\delta y$, $\delta z$) compatible avec les liaisons du système,

$$\begin{aligned}\sum \delta n \int \mathrm{N} \cos(\mathrm{N}, \delta n)\, dt - \sum \delta f \int \mathrm{F} \cos(\mathrm{F}, \delta f)\, dt \\ = \sum m \left[\left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_0}{dt}\right)\delta x + \left(\frac{dy_1}{dt} - \frac{dy_0}{dt}\right)\delta y + \left(\frac{dz_1}{dt} - \frac{dz_0}{dt}\right)\delta z\right].\end{aligned}$$

Supposons maintenant que la vitesse absolue $V_1$ de chaque point ait été décomposée en deux autres $V_r$ et $V_m$, et désignons les composantes de ces vitesses à un instant quelconque par $\frac{d_r x}{dt}, \frac{d_r y}{dt}, \frac{d_r z}{dt}$; $\frac{d_m x}{dt}, \frac{d_m y}{dt}, \frac{d_m z}{dt}$, en affectant plus particulièrement ces composantes des indices o ou 1, lorsqu'elles se rapportent au commencement ou à la fin du choc.

Supposons que, pour chaque point du système, la composante finale $V_{r_1}$ réponde à un déplacement virtuel compatible avec les liaisons du système, et appliquons l'équation précédente à ce déplacement virtuel. En divisant tout par $dt$, l'équation précédente deviendra

$$\begin{aligned}&\sum \frac{d_r n_1}{dt}\int \mathrm{N}\cos(\mathrm{N}, d_r n_1)\,dt - \sum \frac{d_r f_1}{dt}\int \mathrm{F}\cos(\mathrm{F}, d_r f_1)\,dt \\ &= \sum m\left[\left(\frac{dx_1}{dt}-\frac{dx_0}{dt}\right)\frac{d_r x_1}{dt}+\left(\frac{dy_1}{dt}-\frac{dy_0}{dt}\right)\frac{d_r y_1}{dt}+\left(\frac{dz_1}{dt}-\frac{dz_0}{dt}\right)\frac{d_r z_1}{dt}\right].\end{aligned}$$

Si, après le choc, et en ne tenant compte que des vitesses relatives, les points de contact ont des vitesses égales dans le sens de la normale commune, alors $\frac{d_r n_1}{dt} = 0$, et le premier terme du premier membre de l'équation précédente disparaît. Le second terme de l'équation précédente disparaît aussi si les frottements sont négligeables, de sorte que le premier membre devient nul. Dans ce cas, l'équation ci-dessus revient à

$$(1) \qquad \sum m\mathrm{U}\mathrm{V}_{r_1}\cos(\mathrm{U}, \mathrm{V}_{r_1}) = 0,$$

U étant la vitesse absolue perdue par le point $m$. Or, si $\mathrm{U}_r$ et $\mathrm{U}_m$ sont les composantes perdues par ce même point respectivement par rapport à $\mathrm{V}_r$ et $\mathrm{V}_m$, U est la résultante de $\mathrm{U}_r$ et de $\mathrm{U}_m$, de sorte que

$$\sum m\mathrm{U}\mathrm{V}_{r_1}\cos(\mathrm{U}, \mathrm{V}_{r_1}) = \sum m\,\mathrm{U}_r\mathrm{V}_{r_1}\cos(\mathrm{U}_r, \mathrm{V}_{r_1}) + \sum m\,\mathrm{U}_m\mathrm{V}_{r_1}(\mathrm{U}_m, \mathrm{V}_{r_1});$$

et, par suite,

$$(2) \qquad \sum m\,\mathrm{U}_r\mathrm{V}_{r_1}\cos(\mathrm{U}_r, \mathrm{V}_{r_1}) = -\sum m\,\mathrm{U}_m\mathrm{V}_{r_1}\cos(\mathrm{U}_m, \mathrm{V}_{r_1}).$$

Mais, d'un autre côté, $V_{r_0}$ étant la résultante de $V_{r_1}$ et de $U_r$, on a directement

$$V_{r_0}^2 = V_{r_1}^2 + U_r^2 + 2U_rV_{r_1}\cos(U_r, V_{r_1});$$

d'où

$$\sum mV_{r_0}^2 - \sum mV_{r_1}^2 = \sum mU_r^2 + 2\sum mU_rV_{r_1}\cos(U_r, V_{r_1}).$$

Remplaçant dans cette équation $\sum mU_rV_{r_1}\cos(U_r, V_{r_1})$ par sa valeur tirée de (2), on a

$$(3)\qquad \sum mV_{r_0}^2 - \sum mV_{r_1}^2 = \sum mU_r^2 - 2\sum mU_mV_{r_1}\cos(U_m, V_{r_1}).$$

Cette équation (3) donne l'équivalent, pour le mouvement relatif, de ce qu'est le théorème de Carnot pour le mouvement absolu. On voit que, dans un choc entre corps dépourvus d'élasticité, la perte de force vive relative est encore égale à la force vive due aux vitesses relatives perdues ou gagnées par les différents points, moins un terme de correction qui est égal à la somme des doubles produits des quantités de mouvement perdues par rapport aux autres composantes $V_m$ par les projections sur ces vitesses perdues des vitesses relatives finales $V_{r_1}$.

Si les autres composantes $V_m$ répondaient aussi à des déplacements virtuels compatibles avec les liaisons du système, et que par rapport à elles seules, les points de contact eussent aussi, après le choc, des vitesses égales dans le sens de la normale commune, on aurait de même

$$(4)\qquad \sum mV_{m_0}^2 - \sum mV_{m_1}^2 = \sum mU_m^2 - 2\sum mU_rV_{m_1}\cos(U_r, V_{m_1}).$$

Les équations (1), (3), (4) expriment toutes la même propriété, car on peut les déduire les unes des autres. Elles supposent seulement deux conditions essentielles : l'une que les vitesses $V_{r_1}$ sont, pour chaque point, compatibles avec un même déplacement virtuel du système ; ensuite, qu'après le choc et en ne tenant compte que de ces composantes, les vitesses du point de contact estimées suivant la normale commune soient égales pour les deux corps. Nous exposerons plus loin comment l'on peut satisfaire d'une manière très-générale à ces deux conditions, entre deux corps solides, soit complétement privés d'élasticité, soit, au contraire, parfaitement élastiques.

En supposant ces deux conditions remplies, on voit que la perte de force vive relative peut avoir, dans certains cas, la même forme que la perte de force vive absolue.

C'est ce qui arrivera quand on aura

$$\sum m\, U_m\, V_{r_1} \cos(U_m, V_{r_1}) = 0.$$

1°. En premier lieu, si $V_m = 0$, on a $V_r = V$, $U_m = 0$, pour chaque point, et l'équation (3) donne

$$\sum m\, V_0^2 - \sum m\, V_1^2 = \sum m\, U^2,$$

qui n'est autre chose que le théorème de Carnot.

2°. Si $U_m = 0$, c'est-à-dire si les composantes $V_m$ de chaque point ne sont pas altérées par le choc.

3°. Si les composantes $V_r$ et $V_m$ sont constamment parallèles à deux axes rectangulaires, $\cos(U_m, V_{r_1}) = 0$ pour chaque point, et

$$\sum m\, V_{r_0}^2 - \sum m\, V_{r_1}^2 = \sum m\, U_r^2.$$

4°. La même chose a lieu si on peut décomposer la vitesse de chaque point en trois autres constamment parallèles à trois axes rectangulaires. On a, relativement à chaque composante,

$$\cos(U_m, V_{r_1}) = 0$$

et

$$\sum m\, V_{r_0}^2 - \sum m\, V_{r_1}^2 = \sum m\, U_r^2.$$

5°. Si $V_{r_1} = 0$ pour chaque point, on a

$$\sum m\, V_{r_0}^2 = \sum m\, U_r^2; \quad \text{et en effet,} \quad U_r = V_{r_0}.$$

6°. Enfin, il peut arriver que $\sum m\, U_m\, V_{r_1} \cos(U_m, V_{r_1})$ soit nulle, sans qu'on ait $U_m\, V_{r_1} \cos(U_m, V_{r_1}) = 0$ pour chaque point.

Si le frottement n'était pas négligeable, au lieu d'avoir

$$\sum m \, \mathrm{UV}_{r_1} \cos(\mathrm{U}, \mathrm{V}_{r_1}) = 0,$$

on aurait eu

$$\sum m \, \mathrm{UV}_{r_1} \cos(\mathrm{U}, \mathrm{V}_{r_1}) = \sum \frac{d_r f_1}{dt} \int \mathrm{F} \cos(\mathrm{F}, d_r f_1)\, dt$$

et

$$\sum m \, \mathrm{U}_r \mathrm{V}_{r_1} \cos(\mathrm{U}_r, \mathrm{V}_{r_1}) = -\sum m \, \mathrm{U}_m \mathrm{V}_{r_1} \cos(\mathrm{U}_m, \mathrm{V}_{r_1}) + \sum \frac{d_r f_1}{dt} \int \mathrm{F} \cos(\mathrm{F}, d_r f_1)\, dt,$$

puis enfin,

$$\sum m \, \mathrm{V}_{r_0}^2 - \sum m \, \mathrm{V}_{r_1}^2 = \sum m \, \mathrm{U}_r^2 - 2 \sum m \, \mathrm{U}_m \mathrm{V}_{r_1} \cos(\mathrm{U}_m, \mathrm{V}_{r_1}) + 2 \sum \frac{d_r f_1}{dt} \int \mathrm{F} \cos(\mathrm{F}, d_r f_1)\, dt.$$

## VI.

Avant de passer à l'examen des conséquences qu'on peut tirer de ce théorème sur les forces vives relatives, nous allons faire voir qu'il s'applique absolument de même aux changements instantanés de vitesse qui sont produits dans un système de points matériels par l'introduction ou la suppression brusque de certaines liaisons.

Supposons d'abord que de nouvelles liaisons viennent à être introduites subitement. En conservant encore les notations qui ont été adoptées plus haut pour la démonstration du théorème analogue, par rapport aux vitesses absolues, on aura de même

$$\sum m \left[ \left( \frac{dx_0}{dt} - \frac{dx_1}{dt} \right) \delta x + \left( \frac{dy_0}{dt} - \frac{dy_1}{dt} \right) \delta y + \left( \frac{dz_0}{dt} - \frac{dz_1}{dt} \right) \delta z \right] = 0.$$

Supposons maintenant qu'on ait décomposé la vitesse absolue V de chaque point en deux autres $\mathrm{V}_r$ et $\mathrm{V}_m$, telles que l'une d'elles, au moins $\mathrm{V}_r$, réponde pour chaque point à un déplacement virtuel compatible avec les deux systèmes de liaisons : celles qui existaient primitivement et celles qui ont été ajoutées postérieurement. On peut donc prendre pour $\delta x$, $\delta y$ et $\delta z$, respectivement $d_r x_1$, $d_r y_1$ et $d_r z_1$, en appelant $\frac{d_r x_1}{dt}$, $\frac{d_r y_1}{dt}$, $\frac{d_r z_1}{dt}$ les composantes de la vitesse relative finale $\mathrm{V}_{r_1}$

du point $(x, y, z)$. L'équation précédente devient alors, en divisant tout par $dt$,

$$\sum m\left[\left(\frac{dx_0}{dt}-\frac{dx_1}{dt}\right)\frac{d_r x_1}{dt}+\left(\frac{dy_0}{dt}-\frac{dy_1}{dt}\right)\frac{d_r y_1}{dt}+\left(\frac{dz_0}{dt}-\frac{dz_1}{dt}\right)\frac{d_r z_1}{dt}\right]=0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\sum m\,\mathrm{U}\mathrm{V}_{r_1}\cos(\mathrm{U},\ \mathrm{V}_{r_1})=0,$$

U étant la vitesse absolue perdue par chaque point. La démonstration se termine maintenant comme pour les chocs. On déduit de l'équation précédente,

$$\sum m\,\mathrm{U}_r\,\mathrm{V}_r\cos(\mathrm{U}_r,\ \mathrm{V}_{r_1})=-\sum m\,\mathrm{U}_m\,\mathrm{V}_{r_1}\cos(\mathrm{U}_m,\mathrm{V}_{r_1}).$$

D'ailleurs, on a directement, puisque $\mathrm{V}_r$ est la résultante de $\mathrm{V}_{r_1}$ et de $\mathrm{U}_r$,

$$\sum m\,\mathrm{V}_r^2-\sum m\,\mathrm{V}_{r_1}^2=\sum m\,\mathrm{U}_r^2+2\sum m\,\mathrm{U}_r\,\mathrm{V}_{r_1}\cos(\mathrm{U}_r,\mathrm{V}_{r_1}).$$

Par conséquent, on a aussi

$$\sum m\,\mathrm{V}_r^2-\sum m\,\mathrm{V}_{r_1}^2=\sum m\,\mathrm{U}_r^2-2\sum m\,\mathrm{U}_m\,\mathrm{V}_{r_1}\cos(\mathrm{U}_m,\ \mathrm{V}_{r_1}).$$

C'est, comme on voit, la même équation que pour les chocs, et la seule condition pour qu'elle puisse être appliquée, est que les composantes $\mathrm{V}_{r_1}$ répondent à des déplacements virtuels compatibles avec toutes les liaisons du système.

Outre les applications qu'on pourrait faire de ce théorème, pour déterminer les vitesses des différents points d'un système, immédiatement après l'introduction brusque de certaines liaisons, on peut en tirer aussi quelques conséquences générales.

En premier lieu, supposons que, dans un corps solide en mouvement, la vitesse V de chaque molécule soit décomposée en deux autres, $\mathrm{V}_r$ et $\mathrm{V}_m$, telles que le système des composantes $\mathrm{V}_{r_1}$ réponde à des déplacements virtuels compatibles avec les liaisons existantes, et telles en outre qu'on puisse, par l'introduction brusque de certaines liaisons convenables, détruire toutes les composantes $\mathrm{V}_r$ sans changer les composantes $V_m$; alors les vitesses $V_r$ deviennent nulles, et les composantes $V_m$ restent seules sans altération. A cause de

$$\sum m \, UV_r \cos(U, V_r) = 0,$$

on a donc

$$\sum m \, V_r \, V_m \cos(V_r \, V_m) = 0.$$

D'ailleurs, V étant la résultante de $V_r$ et de $V_m$, on a

$$\sum m \, V^2 = \sum m \, V_r^2 + \sum m \, V_m^2 + 2 \sum m \, V_r \, V_m \cos(V_r, V_m);$$

donc

$$\sum m \, V^2 = \sum m \, V_m^2 + \sum m \, V_r^2.$$

Ainsi, supposons qu'un corps solide libre soit animé d'un mouvement quelconque dans l'espace; on peut concevoir la vitesse V de chaque point comme la résultante de la vitesse actuelle de translation $u$ du centre de gravité de ce corps, et de sa vitesse de rotation $\omega$ autour d'un certain axe instantané passant par le centre de gravité. On sait, de plus, que si l'on venait tout à coup à fixer le centre de gravité, le mouvement de rotation du corps continuerait immédiatement après sans altération autour du même axe instantané; par conséquent, on peut détruire les composantes $u$, sans changer $\omega$ ni en grandeur ni en direction. Il résulte de là que, M étant la masse totale du corps et A son moment d'inertie autour de cet axe instantané, on a

$$\sum m V^2 = M u^2 + A \omega^2,$$

c'est-à-dire qu'à un instant quelconque la force vive du corps est égale à la force vive due à la vitesse de translation de son centre de gravité et à sa masse totale, plus la force vive due au mouvement de rotation autour de l'axe instantané passant par le centre de gravité au moment que l'on considère.

Une autre conséquence du même théorème est la suivante. Dans l'équation générale des forces vives pour les mouvements relatifs, on sait qu'il existe un terme de correction qui est égal à

$$-\sum P_m V_r dt \cos(P_m, V_r).$$

Dans ce terme, $V_r$ représente la composante qui se rapporte au mouvement relatif, et $P_m$ est la force qui serait susceptible de donner à chaque point, s'il était libre, le mouvement dû aux autres composantes $V_m$. Cela étant, nous allons faire voir que, toutes les fois qu'on pourra, par un système de liaisons convenable, détruire les composantes $V_r$ sans altérer les composantes $V_m$ ou *vice versâ*, on aura

$$-\sum P_m V_r dt \cos(P_m, V_r) = \sum P_r V_m dt \cos(P_r, V_m),$$

en sorte qu'on pourra former le terme de correction, à volonté, de l'une quelconque de ces deux sommes.

Soient, en effet, $u_r$, $v_r$, $w_r$ les composantes de $V_r$, et $u_m$, $v_m$, $w_m$ celles de $V_m$, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{m} P_m V_r \cos(P_m, V_r) &= \frac{du_m}{dt} u_r + \frac{dv_m}{dt} v_r + \frac{dw_m}{dt} w_r \\ &= \frac{d}{dt}(u_r u_m + v_r v_m + w_r w_m) - \left(\frac{du_r}{dt} u_m + \frac{dv_r}{dt} v_m + \frac{dw_r}{dt} w_m\right) \\ &= \frac{d}{dt} V_r V_m \cos(V_r V_m) - \frac{1}{m} P_r V_m \cos(P_r V_m).\end{aligned}$$

Il résulte de là que

$$\begin{aligned}-\sum P_m V_r dt \cos(P_m, V_r) = &-\sum \frac{d}{dt}[m V_r V_m \cos(V_r, V_m)] \\ &+ \sum P_r V_m dt \cos(P_r V_m);\end{aligned}$$

et, comme $\sum m V_r V_m \cos(V_r, V_m) = 0$, il s'ensuit que

$$-\sum P_m V_r dt \cos(P_m, V_r) = \sum P_r V_m dt \cos(P_r V_m).$$

La seule condition nécessaire est que l'on puisse, par des liaisons convenables, détruire un des systèmes de composantes sans altérer l'autre, et que ce dernier réponde à des déplacements virtuels compatibles avec les liaisons existant réellement dans le système.

Par exemple, si on veut appliquer le principe des forces vives à l'étude du mouvement de rotation d'un corps libre, soumis à l'action de certaines forces, par rapport à son centre de gravité considéré comme fixe, le terme de correction pourra être, indifféremment, et au signe près, ou le travail dû aux forces capables de donner à chaque point, s'il était libre, le mouvement absolu du centre de gravité et aux vitesses de rotation, ou le travail dû aux forces capables de donner à chaque point, s'il était libre, le mouvement de rotation autour du centre de gravité et à la vitesse de translation de ce dernier.

Le théorème qui a été démontré pour le cas où on introduit brusquement certaines liaisons dans un système de points matériels a un analogue pour le cas où on vient, au contraire, à supprimer instantanément certaines liaisons.

Ainsi, en conservant les mêmes notations que précédemment, à propos du théorème correspondant pour les vitesses absolues, on a, en général,

$$\sum m\left[\left(\frac{dx_0}{dt}-\frac{dx_1}{dt}\right)\delta x+\left(\frac{dy_0}{dt}-\frac{dy_1}{dt}\right)\delta y+\left(\frac{dz_0}{dt}-\frac{dz_1}{dt}\right)\delta z\right]=0.$$

D'ailleurs, d'après ce qui a été dit plus haut, $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ sont les projections sur les axes coordonnés d'un déplacement virtuel quelconque, compatible avec les deux systèmes de liaisons (celles qui ont été conservées et celles qui ont été supprimées). On peut donc prendre pour $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$, respectivement, $d_r x_0$, $d_r y_0$, $d_r z_0$, en conservant encore les mêmes notations que pour le cas de l'introduction brusque de certaines liaisons. L'équation précédente devient alors

$$\sum m\left[\left(\frac{dx_0}{dt}-\frac{dx_1}{dt}\right)\frac{d_r x_0}{dt}+\left(\frac{dy_0}{dt}-\frac{dy_1}{dt}\right)\frac{d_r y_0}{dt}+\left(\frac{dz_0}{dt}-\frac{dz_1}{dt}\right)\frac{d_r z_0}{dt}\right]=0$$

ou

$$\sum m\,\mathrm{U}\mathrm{V}_{r_0}\cos(\mathrm{U},\mathrm{V}_{r_0})=0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\sum m\,\mathrm{U}_r\mathrm{V}_{r_0}\cos(\mathrm{U}_r,\mathrm{V}_{r_0})=-\sum m\,\mathrm{U}_m\mathrm{V}_{r_0}\cos(\mathrm{U}_m,\mathrm{V}_{r_0}).$$

On a d'ailleurs

$$\sum m\mathrm{V}_{r_1}^2=\sum m\mathrm{V}_{r_0}^2+\sum m\mathrm{U}_r^2-2\sum m\,\mathrm{U}_r\mathrm{V}_{r_0}\cos(\mathrm{U}_r,\mathrm{V}_{r_0});$$

donc

$$\sum m\mathrm{V}_{r_1}^2-\sum m\mathrm{V}_{r_0}^2=\sum m\mathrm{U}_r^2+2\sum m\,\mathrm{U}_m\mathrm{V}_{r_0}\cos(\mathrm{U}_m,\mathrm{V}_{r_0}).$$

## VII.

Nous avons fait voir que, quand il se produit un choc, on a

$$(1) \qquad \sum m \mathrm{U} \mathrm{V}_{r_1} \cos(\mathrm{U}, \mathrm{V}_{r_1}) = 0,$$

et aussi

$$(2) \qquad \sum m \mathrm{V}_{r_0}^2 - \sum m \mathrm{V}_{r_1}^2 = \sum m \mathrm{U}_r^2 - 2 \sum m \mathrm{U}_m \mathrm{V}_{r_1} \cos(\mathrm{U}_m, \mathrm{V}_{r_1}).$$

Ces deux équations supposent que le choc se termine à l'instant où les composantes $\mathrm{V}_{r_1}$ sont égales, dans le sens de la normale commune, au point de contact, et que ces composantes $\mathrm{V}_{r_1}$ soient compatibles, pour chaque point, avec un déplacement virtuel du système.

Observons de suite que dans ces équations (1) et (2), il entre à la fois les points matériels qui composent les deux corps choquants. Toutefois, il est évident, d'après la manière dont elles ont été obtenues, que, quand les composantes $\mathrm{V}_{r_1}$ répondront à des déplacements virtuels tels que, pour ceux-ci, le moment virtuel de l'action mutuelle N des deux corps, suivant la normale, soit nul pour chacun d'eux, ces équations (1) et (2) se dédoubleront chacune en deux autres, dans lesquelles il n'entrera que les termes relatifs à l'un des corps.

## VIII.

Nous allons maintenant faire l'application de ce qui précède au problème du choc des corps solides dans les deux cas extrêmes où ceux-ci sont privés d'élasticité, ou, au contraire, parfaitement élastiques.

Nous nous occuperons d'abord du premier cas, et nous supposerons, pour commencer, que les deux corps soient entièrement libres.

Nous regarderons le mouvement de chaque corps comme déterminé à chaque instant par celui de son point de contact et par son mouvement de rotation autour de l'axe instantané qui passe par ce point. Prenons celui-ci pour origine des coordonnées, la normale commune pour axe des $z$; puis, pour axes des $x$ et des $y$, deux droites quelconques perpendiculaires entre elles et situées dans le plan tangent commun.

Soient, pour l'un de ces corps, $u_0$, $v_0$, $w_0$ les composantes immédiatement avant le choc de la vitesse de son point de contact, suivant OX, OY et OZ; soient, au même instant, $p_0$, $q_0$, $r_0$ les composantes de son mouvement de rotation autour de OX, OY, OZ. Soient $u_1$, $v_1$, $w_1$; $p_1$, $q_1$, $r_1$ les mêmes quantités aussitôt après le choc. Désignons par les mêmes lettres, avec des accents, ce que sont les quantités correspondantes pour l'autre corps.

Pour appliquer le théorème, nous ferons usage de l'équation

$$(1)\qquad \sum m \mathrm{U} \mathrm{V}_{r_1} \cos(\mathrm{U}, \mathrm{V}_{r_1}) = 0,$$

qui est plus simple que l'équation (2). Nous prendrons pour $\mathrm{V}_{r_1}$, successivement $u_1$, $v_1$, $w_1$; puis les vitesses qui répondent aux mouvements séparés de rotation, autour de OZ, de OY et de OX, d'où résulteront six équations; mais celles-ci elles-mêmes en donneront davantage. En effet, dans le déplacement virtuel qui répond à $u_1$, le moment virtuel de N est nul, d'où résulte que l'équation (1) a lieu séparément pour chaque corps; et, comme $\mathrm{V}_{r_1}$ est alors facteur commun, il faudra poser, pour chaque corps,

$$\sum m \mathrm{U} \cos(\mathrm{U}, \mathrm{V}_{r_1}) = 0.$$

La même chose peut se dire relativement à $v_1$. On aura donc quatre équations.

Par rapport à $w_1$, l'équation (1) ne se dédouble pas, attendu que, pour chaque corps séparément, le moment virtuel correspondant de N n'est pas nul. Mais on a de suite une équation de plus, qui est $w_1 = w'_1$.

Il est clair d'ailleurs que l'équation (1) se dédouble quand $\mathrm{V}_{r_1}$ se rapporte aux vitesses de rotation autour de l'un quelconque des trois axes. D'abord, dans le mouvement de rotation autour de OZ, le point d'application de N reste fixe; par conséquent, son moment virtuel est nul. Quand un des corps tourne autour de OX ou de OY, sans glissement, le moment virtuel de N, quoiqu'il ne soit pas rigoureusement nul, est un infiniment petit du second ordre et négligeable. Au reste, on voit aisément que le théorème s'applique à toutes ces composantes $\mathrm{V}_{r_1}$; car toutes répondent à des déplacements virtuels compatibles avec les liaisons du système, et pour chacune séparément, les vitesses finales des éléments de contact sont les mêmes dans le sens de la normale commune.

On voit donc ainsi que l'on aura douze équations pour déterminer les douze inconnues $u_1, v_1, w_1$; $p_1, q_1, r_1$; $u'_1, v'_1, w'_1$; $p'_1, q'_1, r'_1$. Il s'agit maintenant de les former.

Or, pour un point matériel du premier corps, d'une masse $dm$ et dont les coordonnées sont $x, y, z$, les composantes parallèles à OX, à OY et à OZ de la quantité de mouvement perdue sont respectivement

$$[u_0 - u_1 + (q_0 - q_1)z - (r_0 - r_1)y]\,dm,$$
$$[v_0 - v_1 + (r_0 - r_1)x - (p_0 - p_1)z]\,dm.$$
$$[w_0 - w_1 + (p_0 - p_1)y - (q_0 - q_1)x]\,dm.$$

A l'aide de ces composantes, il sera facile de former les équations qui se rapportent aux composantes dans le sens de $u_1$, de $v_1$ et de $w_1$. Quant aux équations qui sont relatives aux mouvements de rotation autour des axes coordonnés, elles ne seront pas difficiles à obtenir. Prenons pour exemple le mouvement de rotation autour de OZ. Désignons, pour un instant, par X, Y, Z les composantes de la quantité de mouvement perdue par $dm$, parallèlement aux trois axes. Si $\rho$ est la distance du point $(x, y, z)$ à l'axe OZ, on aura pour ce point.

$$m\mathrm{U}\,\mathrm{V}_{r_1}\cos(\mathrm{U}, \mathrm{V}_{r_1})$$
$$= r_1\,dm[\mathrm{Z}\rho\cos(\mathrm{Z}, \rho r_1) + \mathrm{Y}\rho\cos(\mathrm{Y}, \rho r_1) + \mathrm{X}\rho\cos(\mathrm{X}, \rho r_1)].$$

Or

$$\cos(\mathrm{Z}, \rho r_1) = 0;$$

puis on a

$$\rho\cos(\mathrm{Y}, \rho r_1) = \pm x \quad \text{et} \quad \rho\cos(\mathrm{X}, \rho r_1) = \mp y.$$

Donc

$$\int m\mathrm{U}\,\mathrm{V}_{r_1}\cos(\mathrm{U}, \mathrm{V}_{r_1}) = \pm r_1\int dm(\mathrm{Y}x - \mathrm{X}y) = 0,$$

ou

$$\int dm(\mathrm{Y}x - \mathrm{X}y) = 0,$$

lors même qu'on aurait $r_1 = 0$; car $r_1$ est entré dans l'équation primitive comme représentant un déplacement virtuel, et ce déplacement peut toujours être pris différent de o, lors même qu'on aurait $r_1 = 0$.

Ces préliminaires établis, il est facile d'obtenir les douze équations cherchées.

On aura

$$(1)\qquad \int [u_0 - u_1 + (q_0 - q_1) z - (r_0 - r_1) y]\, dm = 0,$$

$$(2)\qquad \int [v_0 - v_1 + (r_0 - r_1) x - (p_0 - p_1) z]\, dm = 0,$$

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int [w_0 - w_1 + (p_0 - p_1) y - (q_0 - q_1) x]\, dm \\ + &\int [w'_0 - w'_1 + (p'_0 - p'_1) y' - (q'_0 - q'_1) x']\, dm \end{aligned}\right\} = 0,$$

$$(4)\qquad w_1 = w'_1,$$

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int [v_0 - v_1 + (r_0 - r_1) x - (p_0 - p_1) z]\, x\,dm \\ - &\int [u_0 - u_1 + (q_0 - q_1) z - (r_0 - r_1) y]\, y\,dm \end{aligned}\right\} = 0,$$

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int [u_0 - u_1 + (q_0 - q_1) z - (r_0 - r_1) y]\, z\,dm \\ - &\int [w_0 - w_1 + (p_0 - p_1) y - (q_0 - q_1) x]\, x\,dm \end{aligned}\right\} = 0,$$

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int [w_0 - w_1 + (p_0 - p_1) y - (q_0 - q_1) x]\, y\,dm \\ - &\int [v_0 - v_1 + (r_0 - r_1) x - (p_0 - p_1) z]\, z\,dm \end{aligned}\right\} = 0.$$

Les cinq autres équations se déduisent des équations (1), (2), (5), (6), (7), en mettant des accents aux lettres qui y entrent.

Soient M et M' les masses totales des deux corps; soient $x_1, y_1, z_1$; $x'_1, y'_1, z'_1$ les coordonnées de leurs centres de gravité. Désignons enfin par A, B, C; A', B', C' leurs moments d'inertie, par rapport à OX, OY et OZ. Les équations précédentes deviendront

$$(1)\qquad u_0 - u_1 + z_1 (q_0 - q_1) - y_1 (r_0 - r_1) = 0,$$

$$(2)\qquad v_0 - v_1 + x_1 (r_0 - r_1) - z_1 (p_0 - p_1) = 0,$$

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{M} (w_0 - w_1) + \mathrm{M} y_1 (p_0 - p_1) - \mathrm{M} x_1 (q_0 - q_1) \\ + &\mathrm{M'} (w'_0 - w'_1) + \mathrm{M'} y'_1 (p'_0 - p'_1) - \mathrm{M'} x'_1 (q'_0 - q'_1) \end{aligned}\right\} = 0.$$

$$(4)\qquad w_1 = w'_1,$$

$$(5)\qquad \begin{cases} \mathrm{M}x_1(v_0 - v_1) - \mathrm{M}y_1(u_0 - u_1) + \mathrm{C}(r_0 - r_1) - (p_0 - p_1) \\ \qquad \int xzdm - (q_0 - q_1)\int yzdm = 0, \end{cases}$$

$$(6)\qquad \begin{cases} \mathrm{M}z_1(u_0 - u_1) - \mathrm{M}x_1(w_0 - w_1) + \mathrm{B}(q_0 - q_1) - (r_0 - r_1) \\ \qquad \int yzdm - (p_0 - p_1)\int yxdm = 0, \end{cases}$$

$$(7)\qquad \begin{cases} \mathrm{M}y_1(w_0 - w_1) - \mathrm{M}z_1(v_0 - v_1) + \mathrm{A}(p_0 - p_1) - (q_0 - q_1) \\ \qquad \int xydm - (r_0 - r_1)\int xzdm = 0, \end{cases}$$

$$(8)\qquad u'_0 - u'_1 + z'_1(q'_0 - q'_1) - y'_1(r'_0 - r'_1) = 0,$$

$$(9)\qquad v'_0 - v'_1 + x'_1(r'_0 - r'_1) - z'_1(p'_0 - p'_1) = 0,$$

$$(10)\qquad \begin{cases} \mathrm{M}'x'_1(v'_0 - v'_1) - \mathrm{M}'y'_1(u'_0 - u'_1) + \mathrm{C}'(r'_0 - r'_1) - (p'_0 - p'_1) \\ \qquad \int x'z'dm' - (q'_0 - q'_1)\int y'z'dm' = 0, \end{cases}$$

$$(11)\qquad \begin{cases} \mathrm{M}'z'_1(u'_0 - u'_1) - \mathrm{M}'x'_1(w'_0 - w'_1) + \mathrm{B}'(q'_0 - q'_1) - (r'_0 - r'_1) \\ \qquad \int y'z'dm' - (p'_0 - p'_1)\int y'x'dm' = 0, \end{cases}$$

$$(12)\qquad \begin{cases} \mathrm{M}'y'_1(w'_0 - w'_1) - \mathrm{M}'z'_1(v'_0 - v'_1) + \mathrm{A}'(p'_0 - p'_1) - (q'_0 - q'_1) \\ \qquad \int x'y'dm' - (r'_0 - r'_1)\int x'z'dm' = 0. \end{cases}$$

Telles sont les douze équations du premier degré qui déterminent les douze inconnues. On voit que, si les axes coordonnés sont les axes principaux de l'un des corps, les intégrales $\int xydm$, $\int xzdm$, $\int yzdm$ disparaissent pour celui-ci, et elles seraient nulles pour les deux, si ceux-ci avaient tous deux les axes coordonnés pour axes principaux du point de contact. Après avoir résolu ces équations, on aura facilement la vitesse d'un point quelconque de l'un des corps, immédiatement après le choc; car, si $x, y, z$ sont les coordonnées de ce point, les composantes de sa vitesse parallèlement à OX, OY et OZ sont

$$u_1 + zq_1 - yr_1,$$
$$v_1 + xr_1 - zp_1,$$
$$w_1 + yp_1 - xq_1.$$

Si on voulait appliquer la théorie précédente au problème du choc des corps, dans le cas de leur parfaite élasticité, il faudrait le décomposer en deux périodes : l'une, depuis le commencement jusqu'à l'instant de la plus grande compression et qui se traiterait comme ci-dessus; l'autre, depuis ce moment jusqu'à la fin, et que l'on regarderait comme un second choc. Dans cette seconde période, on aurait encore douze inconnues et une équation de moins; car, pour la fin du choc, on n'aurait plus $w_1 = w'_1$, mais on aurait à la place une autre équation servant à exprimer que la quantité de mouvement perdue par l'un des corps dans le sens de la normale est la même dans la seconde période que dans la première; ce qui n'aurait plus lieu si les corps n'étaient qu'imparfaitement élastiques.

## IX.

L'équation

$$\sum m \mathrm{V}_{r_0}^2 - \sum m \mathrm{V}_{r_1}^2 = \sum m \mathrm{U}_r^2 - 2 \sum m \mathrm{U}_m \mathrm{V}_{r_1} \cos (\mathrm{U}_m, \mathrm{V}_{r_1})$$

peut être appliquée à l'étude des machines hydrauliques, à l'occasion desquelles on a souvent lieu de faire usage du principe des forces vives dans les mouvements relatifs. Elle permettra, quand il y aura choc ou changement brusque dans les liaisons établies, de connaître les nouvelles vitesses relatives, sans être obligé de passer par l'intermédiaire des vitesses absolues, ainsi que la modification qui en résulte dans l'expression du travail de la machine. Sans doute, la manière même dont se comportent les fluides quand ils sont placés dans des circonstances où des corps solides éprouveraient des changements instantanés de vitesse, fait qu'ils ne les éprouvent pas de même, et que toute méthode de calcul qui repose sur cette assimilation ne peut donner que des résultats approximatifs; mais cette cause d'inexactitude tient à la nature du fluide lui-même, et toute méthode doit nécessairement s'en ressentir dans l'application, car il est impossible de faire entrer dans les formules cette manière d'être des fluides, que nous allons développer en quelques lignes. Quand un fluide change brusquement de direction, il y a perte de force vive; la vitesse perdue est la composante normale à cette direction finale, et la vitesse conservée est la projection de la vitesse initiale sur cette même direction. C'est ce qui se voit immédiatement, et cela se conclut aussi du théorème des forces vives sur les chocs ou sur les changements brusques de liaisons. Ce fait se vérifie toujours et le théorème en question s'applique de même. Seulement, quand le changement de direction ne se fait pas instantanément à angle vif, mais par une courbe ou un coude arrondi, la vitesse finale, au lieu d'être la projection de la vitesse initiale sur la direction du fluide à la sortie, est égale à cette vitesse initiale. C'est ce qui résulte toujours, au reste, des mêmes principes; car, à chaque instant, la diminution de vitesse, c'est-à-dire la vitesse diminuée de ce qu'elle devient au bout d'un temps infiniment petit, est égale à cette vitesse multipliée par le sinus-verse de l'angle de contingence en ce point de la courbe que le fluide est obligé de parcourir. Cette diminution est donc un infiniment petit du second ordre, et la diminution totale, c'est-à-dire la vitesse initiale moins la vitesse finale est toujours un infiniment petit; par conséquent, la vitesse finale est égale à la vitesse initiale. Or, quand un fluide vient rencontrer un obstacle qui le force à changer de direction, les parties qui rencontrent directement cet obstacle doivent bien changer brusquement de direction; mais celles qui sont à une certaine distance changent de direction d'une manière graduelle, ce qui diminue la perte totale de force vive dans une proportion qu'il paraît impossible d'évaluer rigoureusement.