JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. BRAVAIS

Note sur les polyèdres symétriques de la géométrie

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 14 (1849), p. 137-140.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1849_1_14__137_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

NOTE

SUR LES POLYÈDRES SYMÉTRIQUES DE LA GÉOMÉTRIE;

Par M. A. BRAVAIS,

Professeur à l'École Polytechnique.

On dit que deux polyèdres sont symétriques, lorsqu'ils ont été construits semblablement l'un au-dessus, l'autre au-dessous d'un plan, avec la condition, pour leurs sommets homologues, d'être également distants du plan, et sur une même droite normale à ce plan. (Legendre, *Géométrie,* liv. 6.)

Je nommerai polyèdres *inverses* deux polyèdres dont les sommets homologues sont également distants d'un point donné et situés sur une même droite passant par ce point, mais de côtés opposés.

Je désignerai par P le premier polyèdre, supposé donné, et par p son inverse. On voit que, réciproquement, P sera l'inverse de p.

Je nommerai *pôle de symétrie* des deux polyèdres le point par lequel passent toutes les droites joignant deux à deux les sommets homologues des deux polyèdres.

Si l'on considère les deux polyèdres P, p comme formant un polyèdre unique (P, p), ce même point sera dit *centre de symétrie* du polyèdre (P, p).

Théorème I. *Lorsque le pôle de symétrie du polyèdre fixe* P *se déplace, son inverse* p *se change en un nouvel inverse* p', *et l'on peut toujours transporter* p *sur* p' *par un mouvement de translation commun à tous les sommets.*

Soient C, *fig.* 1, *Pl. I*, le premier pôle de symétrie et C' le deuxième; soit S un sommet quelconque du polyèdre fixe P; soient s son homologue avant le déplacement de C, et s' son homologue après ce déplacement.

De $Cs = CS$, $C's' = C'S$ on déduit $ss' = 2CC'$; de plus, ss' est parallèle à CC'. Soient de même t, t' les deux positions successives d'un autre sommet du polyèdre inverse; on aurait aussi $tt' = 2CC'$, tt' parallèle à CC'. Donc, si l'on transporte le polyèdre p en le faisant mouvoir, de C vers C', parallèlement à CC', et d'une quantité égale à $2CC'$, il viendra coïncider avec le polyèdre p'. *C. Q. F. D.*

Corollaire. Il suit de là qu'un polyèdre P étant donné, son inverse est complétement déterminé quant à sa forme et aussi quant à la direction de ses parties par rapport à l'espace absolu; toutefois le lieu qu'il doit occuper reste indéterminé, et dépend de la position du pôle de symétrie.

Théorème II. *Dans deux polyèdres inverses, les faces homologues sont égales chacune à chacune, et l'inclinaison de deux faces adjacentes, dans un de ces solides, est égale à l'inclinaison des faces homologues dans l'autre.*

Ce théorème se démontrerait, comme la proposition II du liv. 6 de Legendre, en substituant des triangles opposés par le sommet aux trapèzes de même base employés dans la démonstration; mais on peut l'obtenir plus simplement de la manière suivante :

Soit proposé de démontrer que les arêtes, angles plans et angles dièdres qui composent l'angle solide S, *fig.* 2, sont les mêmes que leurs homologues dans le polyèdre inverse. Le choix du pôle de symétrie étant arbitraire, prenons S pour pôle; prolongeons les arêtes SM, SN, SP, SQ, de $Sm = SM$, $Sn = SN$, $Sp = SP$, $Sq = SQ$, etc. Les deux angles solides opposés auront évidemment leurs arêtes égales deux à deux par construction, leurs angles plans égaux deux à deux comme opposés par le sommet, et leurs angles dièdres pareillement égaux comme opposés au sommet; or ces arêtes, angles plans ou angles dièdres sont homologues dans le polyèdre et dans son inverse. La même démonstration peut s'appliquer à tous les angles solides, par conséquent à toutes les arêtes, à tous les angles plans et à tous les angles dièdres : donc les faces sont égales et également inclinées de part et d'autre. *C. Q. F. D.*

Théorème III. *Si l'on fait tourner de deux angles droits le polyèdre p inverse de* P *autour d'une droite passant par le pôle de symé-*

trie C, *le polyèdre p' ainsi obtenu sera le symétrique de* P *par rapport au plan mené par* C *normalement à l'axe de rotation.*

Soient NN', *fig.* 3, la droite donnée et QCQ' son plan normal passant par C; soient S un sommet quelconque du polyèdre P, et s son homologue dans le polyèdre inverse. De s abaissez la perpendiculaire sr sur NN' et prolongez-la en s', à une distance $rs' = rs$. Il est visible qu'après un demi-tour effectué autour de NN', s viendra en s'. Joignons S et s'. Puisque l'on a $s\mathrm{C} = \mathrm{CS}$, $sr = rs'$, Ss' sera parallèle à NN', et, par conséquent, normale au plan QQ'. Si R est le point de rencontre de Ss' avec le plan QQ', la droite CR sera normale à NN', et, par conséquent, parallèle à ss'; or on a $s\mathrm{C} = \mathrm{CS}$, donc aussi SR = R$s'$. Donc s' est le sommet homologue de S dans le polyèdre construit symétriquement par rapport à P au-dessous du plan QQ'. Il en serait de même pour tout autre sommet du polyèdre P; donc une rotation de deux angles droits autour de NN' amènera l'inverse p en coïncidence avec le symétrique p' de P par rapport au plan QQ'. *C. Q. F. D.*

Scolie. Le plan QCQ' peut être appelé plan de symétrie du polyèdre (P, p') considéré comme un polyèdre unique.

THÉORÈME IV. *Réciproquement, le symétrique p' de* P *par rapport au plan quelconque* QQ', *en tournant de deux droits autour d'une normale au plan, devient l'un des inverses de* P, *et le pôle de symétrie est situé au point de rencontre* C *du plan et de l'axe de rotation.*

Car si l'on construit l'inverse p, en prenant C pour pôle de symétrie, p et p' peuvent être amenés à coïncidence, p sur p', ou p' sur p, par une rotation de deux angles droits autour de NN'.

Corollaire I. Il résulte des deux théorèmes précédents que les divers polyèdres symétriques de P ne sont autre chose, quant à leur forme, que son polyèdre inverse, et sont, quant à la direction de leurs parties, les divers polyèdres obtenus par des demi-révolutions de l'inverse p, effectuées autour d'axes arbitrairement choisis.

Deux polyèdres inverses d'un polyèdre donné P sont toujours semblablement tournés dans l'espace. Il n'en est pas de même de deux polyèdres symétriques de P, à moins que les deux plans de symétrie qui les déterminent ne soient parallèles entre eux.

Corollaire II. Deux polyèdres symétriques de P par rapport à deux plans arbitrairement choisis peuvent toujours être superposés; car ils peuvent tous les deux être superposés à un polyèdre inverse de P.

Théorème V. *Dans deux polyèdres symétriques, les faces homologues sont égales chacune à chacune, etc.* (Le reste comme au théorème II.)

C'est la proposition II du liv. 6 de Legendre; elle devient évidente, puisque le symétrique est toujours susceptible de coïncider avec l'inverse, et que l'inverse jouit, par rapport au polyèdre primitif, des propriétés ici énoncées, en vertu de notre théorème II.

Du reste, la démonstration de ce théorème est rendue inutile.

Théorème VI. *Deux angles solides opposés par le sommet sont inverses l'un de l'autre.*

En effet, le sommet commun est leur pôle de symétrie.

Théorème VII. *Le plan qui passe par deux arêtes opposées d'un parallélipipède, le divise en deux prismes inverses, et les angles solides opposés sont inverses l'un de l'autre.*

On démontre d'abord que les diagonales se coupent au même point; ce point est donc le centre de symétrie du parallélipipède.

Si l'on considère alors les deux prismes comme deux polyèdres distincts, le centre de symétrie devient un pôle de symétrie; donc les angles solides opposés sont inverses ainsi que les deux prismes. (Propositions V et VI du liv. 6 de la *Géométrie* de Legendre.)

Théorème VIII. *Sur la sphère, chaque polygone sphérique* P *a son inverse* p, *dont les sommets sont diamétralement opposés à ceux du polygone donné. Si l'on fait tourner* p *de* 180 *degrés autour d'un diamètre de la sphère, le nouveau polygone sera symétrique du polygone* P *par rapport au plan du grand cercle normal au diamètre choisi pour axe de rotation.*

Cela résulte de ce que le centre de la sphère est pris pour pôle de symétrie.

Réciproquement, tout polygone symétrique du polygone sphérique P peut être amené à coïncider avec son inverse p, par une demi-révolution autour du diamètre normal au plan de symétrie.