

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

HERMITE

Sur une question relative à la théorie des nombres

*Journal de mathématiques pures et appliquées 1<sup>re</sup> série*, tome 14 (1849), p. 21-30.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1849\\_1\\_14\\_\\_21\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1849_1_14__21_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

.....

SUR

UNE QUESTION RELATIVE A LA THÉORIE DES NOMBRES ;

**PAR M. HERMITE.**

—————

Soient  $n + 1$  nombres entiers

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots, \kappa, \lambda,$$

dont le plus grand commun diviseur est l'unité; on propose de trouver tous les systèmes de  $n(n + 1)$  autres nombres, savoir :

$$\begin{array}{ccc} \alpha', & \alpha'', & \dots, & \alpha^{(n)}, \\ \beta', & \beta'', & \dots, & \beta^{(n)}, \\ \gamma', & \gamma'', & \dots, & \gamma^{(n)}, \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \kappa', & \kappa'', & \dots, & \kappa^{(n)}, \\ \lambda', & \lambda'', & \dots, & \lambda^{(n)}, \end{array}$$

qui rendent le déterminant

$$\begin{array}{cccc} \alpha, & \alpha', & \dots, & \alpha^{(i)}, \dots, \alpha^{(n)}, \\ \beta, & \beta', & \dots, & \beta^{(i)}, \dots, \beta^{(n)}, \\ \gamma, & \gamma', & \dots, & \gamma^{(i)}, \dots, \gamma^{(n)}, \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \kappa, & \kappa', & \dots, & \kappa^{(i)}, \dots, \kappa^{(n)}, \\ \lambda, & \lambda', & \dots, & \lambda^{(i)}, \dots, \lambda^{(n)}, \end{array}$$

égal à plus ou moins un.

*Solution.* Nommons respectivement

$\pi_1$	le plus grand commun diviseur de $\alpha$	et $\beta$ .
$\pi_2$	<i>idem</i>	$\pi_1$ et $\gamma$ .
$\pi_3$	<i>idem</i>	$\pi_2$ et $\delta$ .
.....		
$\pi_{n-1}$	<i>idem</i>	$\pi_{n-2}$ et $\alpha$ .
$\pi_n$	<i>idem</i>	$\pi_{n-1}$ et $\lambda$ .

dans l'hypothèse admise,  $\pi_n$  sera l'unité. Prenons ensuite les nombres entiers

$$a, b, c, d, \dots, h, l, \\ c', d', \dots, k', l'.$$

D'après les conditions

$$\begin{aligned} a\beta - b\alpha &= \pi_1, \\ c'\gamma - c\pi_1 &= \pi_2, \\ d'\delta - d\pi_2 &= \pi_3, \\ &\dots \\ k'\alpha - k\pi_{n-2} &= \pi_{n-1}, \\ l'\lambda - l\pi_{n-1} &= \pi_n = 1. \end{aligned}$$

On satisfera à la question proposée par les valeurs suivantes

$$\begin{aligned} \alpha_i &= am_i + M_i \frac{\alpha}{\pi_1}, \\ \beta_i &= bm_i + M_i \frac{\beta}{\pi_1}, \\ \gamma_i &= cn_i + N_i \frac{\gamma}{\pi_2}, \\ \delta_i &= dp_i + P_i \frac{\delta}{\pi_2}, \\ &\dots \\ \alpha_i &= ks_i + S_i \frac{\alpha}{\pi_{n-1}}, \\ \lambda_i &= lt_i + T_i \frac{\lambda}{\pi_n}. \end{aligned}$$

les quantités

$$M_i, N_i, P_i, \dots, S_i, T_i$$

dépendant des nombres entiers

$$m_i, n_i, p_i, \dots, s_i, t_i$$

par les équations

$$M_i = c' n_i + N_i \frac{\pi}{\pi'}$$

$$N_i = d' p_i + P_i \frac{\pi}{\pi'}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$S_i = l' t_i + T_i \frac{\pi_{i-1}}{\pi'}$$

et toutes les solutions possibles s'obtiendront en prenant toutes les valeurs des  $n^2$  quantités

$$m_i, n_i, p_i, \dots, s_i, t_i,$$

pour lesquelles le déterminant

$$\begin{vmatrix} m_1 & m_2 & \dots & m_n \\ n_1 & n_2 & \dots & n_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{vmatrix}$$

égale plus ou moins un.

Ainsi, par exemple, lorsque  $n = 2$ , s'il s'agit de rendre égal à l'unité le déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix} = \alpha(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'') + \beta(\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'') + \gamma(\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'')$$

on aura

$$\alpha' = am_1 + M_1 \frac{\alpha}{\pi_1},$$

$$\beta' = bm_1 + M_1 \frac{\beta}{\pi_1},$$

$$\gamma' = cn_1 + N_1 \gamma,$$

avec

$$M_1 = c'n_1 + N_1 \pi_1,$$

ce qui donne

$$\alpha' = am_1 + \frac{\alpha c'}{\pi_1} n_1 + N_1 \alpha,$$

$$\beta' = bm_1 + \frac{\beta c'}{\pi_1} n_1 + N_1 \beta,$$

$$\gamma' = cn_1 + N_1 \gamma;$$

on trouvera ensuite semblablement

$$\alpha'' = am_2 + \frac{\alpha c'}{\pi_1} n_2 + N_2 \alpha,$$

$$\beta'' = bm_2 + \frac{\beta c'}{\pi_1} n_2 + N_2 \beta,$$

$$\gamma'' = cn_2 + N_2 \gamma,$$

et l'on devra prendre pour  $m_1, n_1, m_2, n_2$  indéfiniment tous les nombres entiers pour lesquels

$$m_1 n_2 - m_2 n_1 = \pm 1.$$

Si  $n = 3$ , la solution générale de l'équation

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \alpha', & \alpha'', & \alpha''' \\ \beta, & \beta', & \beta'', & \beta''' \\ \gamma, & \gamma', & \gamma'', & \gamma''' \\ \delta, & \delta', & \delta'', & \delta''' \end{pmatrix} = \pm 1$$

sera de même comprise dans les formules

$$\alpha' = am_1 + \frac{\alpha c'}{\pi_1} n_1 + \frac{\alpha d'}{\pi_2} p_1 + P_1 \alpha,$$

$$\beta' = bm_1 + \frac{\beta c'}{\pi_1} n_1 + \frac{\beta d'}{\pi_2} p_1 + P_1 \beta,$$

$$\gamma' = cn_1 + \frac{\gamma d'}{\pi_2} p_1 + P_1 \gamma,$$

$$\delta' = dp_1 + P_1 \delta;$$

PURES ET APPLIQUÉES.

25

$$\alpha'' = \alpha m_2 + \frac{\alpha c'}{\pi_1} n_2 + \frac{\alpha d'}{\pi_2} p_2 + P_2 \alpha,$$

$$\beta'' = \beta m_2 + \frac{\beta c'}{\pi_1} n_2 + \frac{\beta d'}{\pi_2} p_2 + P_2 \beta,$$

$$\gamma'' = \gamma m_2 + \frac{\gamma d'}{\pi_2} p_2 + P_2 \gamma,$$

$$\delta'' = \delta m_2 + P_2 \delta;$$

$$\alpha''' = \alpha m_3 + \frac{\alpha c'}{\pi_1} n_3 + \frac{\alpha d'}{\pi_2} p_3 + P_3 \alpha,$$

$$\beta''' = \beta m_3 + \frac{\beta c'}{\pi_1} n_3 + \frac{\beta d'}{\pi_2} p_3 + P_3 \beta,$$

$$\gamma''' = \gamma m_3 + \frac{\gamma d'}{\pi_2} p_3 + P_3 \gamma,$$

$$\delta''' = \delta m_3 + P_3 \delta.$$

Voici maintenant l'analyse qui nous a conduit à ces résultats.  
Soient, pour abréger, A le déterminant des quantités

$$(A) \quad \alpha^{(i)}, \beta^{(i)}, \gamma^{(i)}, \dots, \lambda^{(i)},$$

B celui du système

$$(B) \quad \begin{pmatrix} \xi, & \beta, & 0, & 0, \dots, & 0, \\ \xi', & -\alpha, & \gamma, & 0, \dots, & 0, \\ \xi'', & 0, & -\beta, & \delta, \dots, & 0, \\ \xi''', & 0, & 0, & -\gamma, \dots, & 0, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi^{(n-1)}, & 0, & 0, & 0, \dots, & \lambda, \\ \xi^{(n)}, & 0, & 0, & 0, \dots, & -\alpha, \end{pmatrix}$$

dont la loi est facile à saisir, et où les quantités  $\xi$  sont définies par les équations

$$\begin{aligned} \alpha \xi + \beta \xi' + \gamma \xi'' + \dots + \lambda \xi^{(n)} &= 1, \\ \alpha' \xi + \beta' \xi' + \gamma' \xi'' + \dots + \lambda' \xi^{(n)} &= 0, \\ \alpha'' \xi + \beta'' \xi' + \gamma'' \xi'' + \dots + \lambda'' \xi^{(n)} &= 0, \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \\ \alpha^{(n)} \xi + \beta^{(n)} \xi' + \gamma^{(n)} \xi'' + \dots + \lambda^{(n)} \xi^{(n)} &= 0. \end{aligned}$$

De la composition des systèmes (A) et (B) résultera le nouveau système

$$\begin{array}{cccccc}
 1, & 0, & 0, \dots, & 0, \dots, & 0, \\
 0, & \alpha' \beta - \beta' \alpha, & \alpha'' \beta - \beta'' \alpha, \dots, & \alpha^{(i)} \beta - \beta^{(i)} \alpha, \dots, & \alpha^{(n)} \beta - \beta^{(n)} \alpha, \\
 0, & \beta' \gamma - \gamma' \beta, & \beta'' \gamma - \gamma'' \beta, \dots, & \beta^{(i)} \gamma - \gamma^{(i)} \beta, \dots, & \beta^{(n)} \gamma - \gamma^{(n)} \beta, \\
 0, & \gamma' \delta - \delta' \gamma, & \gamma'' \delta - \delta'' \gamma, \dots, & \gamma^{(i)} \delta - \delta^{(i)} \gamma, \dots, & \gamma^{(n)} \delta - \delta^{(n)} \gamma, \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0, & \alpha^m \lambda - \lambda^m \alpha, & \alpha^{m-1} \lambda - \lambda^{m-1} \alpha, \dots, & \alpha^{(i)} \lambda - \lambda^{(i)} \alpha, \dots, & \alpha \lambda - \lambda \alpha.
 \end{array}$$

En appelant C son déterminant, ou, ce qui revient au même, celui des  $n^2$  quantités

$$(C) \quad \alpha^{(i)} \beta - \beta^{(i)} \alpha, \quad \beta^{(i)} \gamma - \gamma^{(i)} \beta, \dots, \quad \alpha^{(i)} \lambda - \lambda^{(i)} \alpha,$$

on aura, par ce théorème connu,

$$C = AB.$$

Or on trouve facilement, au signe près,

$$B = \beta \gamma \delta \dots \alpha;$$

donc on peut remplacer la condition proposée, savoir

$$A = \pm 1,$$

par la suivante,

$$C = \pm \beta \gamma \delta \dots \alpha,$$

dont nous allons nous occuper.

Exposons d'abord une transformation des termes du système (C); j'observe, à cet effet, que  $\pi_i$  désignant le plus grand commun diviseur de  $\alpha$  et  $\beta$ , on aura nécessairement

$$\alpha^{(i)} \beta - \beta^{(i)} \alpha = m_i \pi_i,$$

d'où l'on tire

$$\alpha^{(i)} = am_i + M_i \frac{\alpha}{\pi_i},$$

$$\beta^{(i)} = bm_i + M_i \frac{\beta}{\pi_i},$$

les nombres entiers  $m_i$  et  $M_i$  restant entièrement arbitraires, et  $a$  et  $b$  étant déterminés par l'équation

$$a\beta - b\alpha = \pi_1.$$

Au moyen de cette valeur de  $\beta^{(i)}$ , on trouve

$$\beta^{(i)}\gamma - \gamma^{(i)}\beta = b\gamma m_i + \frac{\beta}{\pi_1} (M_i\gamma - \gamma^{(i)}\pi_1).$$

Or,  $\pi_2$  désignant le plus grand commun diviseur de  $\pi_1$  et  $\gamma$ , on aura nécessairement

$$M_i\gamma - \gamma^{(i)}\pi_1 = n_i\pi_2,$$

d'où

$$M_i = c'n_i + N_i \frac{\pi_1}{\pi_2},$$

$$\gamma^{(i)} = cn_i + N_i \frac{\gamma}{\pi_1},$$

les nombres entiers  $n_i$  et  $N_i$  étant quelconques,  $c$  et  $c'$  dépendant de l'équation

$$c'\gamma - c\pi_1 = \pi_2.$$

La répétition du même calcul nous conduira de l'expression précédente de  $\gamma^{(i)}$  à celle de  $\delta^{(i)}$ ; il vient, en effet,

$$\gamma^{(i)}\delta - \delta^{(i)}\gamma = c\delta n_i + \frac{\gamma}{\pi_2} (N_i\delta - \delta^{(i)}\pi_2),$$

et posant encore

$$N_i\delta - \delta^{(i)}\pi_2 = p_i\pi_3,$$

$\pi_3$  étant le plus grand commun diviseur de  $\pi_2$  et  $\delta$ , on en conclura

$$N_i = d'p_i + P_i \frac{\pi_2}{\pi_3},$$

$$\delta^{(i)} = dp_i + P_i \frac{\delta}{\pi_3},$$

$d$  et  $d'$  étant donnés par l'équation

$$d'\delta - d\pi_2 = \pi_3.$$

La loi que suivent ces opérations est maintenant évidente, et on en



conclura, d'une part,

$$\begin{aligned} \alpha^{(i)}\beta - \beta^{(i)}\alpha &= m_i\pi_1, \\ \beta^{(i)}\gamma - \gamma^{(i)}\beta &= b\gamma m_i + \frac{\beta\pi_2}{\pi_1} n_i, \\ \gamma^{(i)}\delta - \delta^{(i)}\gamma &= c\delta n_i + \frac{\gamma\pi_3}{\pi_2} p_i, \\ &\dots\dots\dots \\ \chi^{(i)}\lambda - \lambda^{(i)}\chi &= k\lambda s_i + \frac{\chi\pi_n}{\pi_{n-1}} t_i, \end{aligned}$$

où il est essentiel d'observer que  $m_i, n_i, \dots, s_i, t_i$  restent jusqu'à présent des entiers entièrement arbitraires.

D'un autre côté, nous obtenons d'ailleurs

$$\begin{aligned} \alpha^{(i)} &= am_i + M_i \frac{\alpha}{\pi_1}, \\ \beta^{(i)} &= bm_i + M_i \frac{\beta}{\pi_1}, \\ \gamma^{(i)} &= cn_i + N_i \frac{\gamma}{\pi_2}, \\ \delta^{(i)} &= dp_i + P_i \frac{\delta}{\pi_3}, \\ &\dots\dots\dots \\ \chi^{(i)} &= ks_i + S_i \frac{\chi}{\pi_{n-1}}, \\ \lambda^{(i)} &= lt_i + T_i \frac{\lambda}{\pi_n}, \end{aligned}$$

et les entiers  $M_i, N_i, P_i, \dots$  s'expriment de proche en proche, uniquement par  $m_i, n_i, p_i, \dots$  au moyen de ces autres équations

$$\begin{aligned} M_i &= c'n_i + N_i \frac{\pi_1}{\pi_2}, \\ N_i &= d'p_i + P_i \frac{\pi_2}{\pi_3}, \\ &\vdots \\ S_i &= k't_i + T_i \frac{\pi_{n-1}}{\pi_n}, \end{aligned}$$

lesquelles ne laissent d'indéterminé que  $T_i$ .

Ces résultats obtenus, reportons-nous maintenant au système (C), qui a été transformé dans le suivant, savoir,

$$\begin{array}{cccc}
 m_1 \pi_1, & m_2 \pi_1, \dots, & m_i \pi_1, \dots, & m_n \pi_1, \\
 b\gamma m_1 + \frac{\beta \pi_2}{\pi_1} n_1, & b\gamma m_2 + \frac{\beta \pi_2}{\pi_1} n_2, \dots, & b\gamma m_i + \frac{\beta \pi_2}{\pi_1} n_i, \dots, & b\gamma m_n + \frac{\beta \pi_2}{\pi_1} n_n, \\
 c\delta n_1 + \frac{\gamma \pi_3}{\pi_2} p_1, & c\delta n_2 + \frac{\gamma \pi_3}{\pi_2} p_2, \dots, & c\delta n_i + \frac{\gamma \pi_3}{\pi_2} p_i, \dots, & c\delta n_n + \frac{\gamma \pi_3}{\pi_2} p_n, \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 k\lambda s_1 + \frac{\alpha \pi_n}{\pi_{n-1}} t_1, & k\lambda s_2 + \frac{\alpha \pi_n}{\pi_{n-1}} t_2, \dots, & k\lambda s_i + \frac{\alpha \pi_n}{\pi_{n-1}} t_i, \dots, & k\lambda s_n + \frac{\alpha \pi_n}{\pi_{n-1}} t_n.
 \end{array}$$

On reconnaît bien facilement qu'un pareil système provient de la composition des deux autres, que voici :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{cccc}
 m_1, & m_2, \dots, & m_i, \dots, & m_n, \\
 n_1, & n_2, \dots, & n_i, \dots, & n_n, \\
 p_1, & p_2, \dots, & p_i, \dots, & p_n, \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 s_1, & s_2, \dots, & s_i, \dots, & s_n, \\
 t_1, & t_2, \dots, & t_i, \dots, & t_n,
 \end{array} \right.$$

et

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{ccccc}
 \pi_1, & b\gamma, & 0, & 0, \dots, & 0, \\
 0, & \frac{\beta \pi_2}{\pi_1}, & c\delta, & 0, \dots, & 0, \\
 0, & 0, & \frac{\gamma \pi_3}{\pi_2}, & d\varepsilon, \dots, & 0, \\
 0, & 0, & 0, & \frac{\alpha \pi_n}{\pi_{n-1}}, \dots, & 0, \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0, & 0, & 0, & 0, \dots, & k\lambda, \\
 0, & 0, & 0, & 0, \dots, & \frac{\alpha \pi_n}{\pi_{n-1}}.
 \end{array} \right.$$

donc son déterminant, et, par suite, celui du système (C) est le produit des déterminants de ces deux systèmes.

Or le déterminant du système (2) se réduit à son terme principal

$$\beta\gamma\dots\alpha\pi_n$$

ou simplement

$$\beta\gamma\dots\alpha.$$

puisque  $\pi_n$  est l'unité; la condition proposée

$$C = \pm \beta\gamma\dots\alpha$$

sera donc remplie en prenant égal à l'unité en valeur absolue le déterminant des  $n^2$  nombres entiers du système (1), ce qui est la conclusion que nous avons annoncée, et qu'il s'agissait d'obtenir.

