JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

L. COHEN-STUART

Solution d'un problème de photométrie

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 13 (1848), p. 257-263.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1848_1_13__257_0>

SOLUTION D'UN PROBLÈME DE PHOTOMÉTRIE;

PAR M. L. COHEN-STUART,
Élève à l'Académie royale de Delft.

Étant donnés un ellipsoïde et un point lumineux en dehors de cette surface, on demande de déterminer, 1° la courbe de séparation d'ombre et de lumière; 2° la valeur de l'intensité de la lumière en chaque point de la partie éclairée; 3° la quantité de lumière recueillie par celle-ci.

1. Soient

$$A_1 x^2 + A_2 y^2 + A_3 z^2 = 1 \tag{1}$$

l'équation de l'ellipsoïde, et a_1, a_2, a_3 les coordonnées du point donné; l'équation

$$\left\{\begin{aligned}&(A_1 x^2 + A_2 y^2 + A_3 z^2 - 1)(A_1 a_1^2 + A_2 a_2^2 + A_3 a_3^2 - 1)\\&\qquad = (A_1 a_1 x + A_2 a_2 y + A_3 a_3 z - 1)^2\end{aligned}\right. \tag{2}$$

sera celle de la surface conique qui, ayant a_1, a_2, a_3 pour centre, enveloppe l'ellipsoïde [*].

En combinant les équations (1) et (2), on voit aisément que la ligne de contact des deux surfaces, ou, ce qui revient au même, la courbe qui sépare la partie éclairée de la partie non éclairée, est la section de l'ellipsoïde par le plan

$$A_1 a_1 x + A_2 a_2 y + A_3 a_3 z - 1 = 0. \tag{3}$$

2. Désignons par u la longueur de la droite qui joint le point

[*] LEROY, *Analyse appliquée à la Géométrie des trois dimensions*, § 293, deuxième édition.

donné à un point x, y, z de la partie éclairée, et par μ l'angle que forme cette droite avec la normale en ce point de l'ellipsoïde; l'intensité I de la lumière y sera $\frac{\rho \cos \mu}{u^2}$, ρ étant un coefficient constant.

En appelant ensuite α_1, α_2, α_3 les angles que forme la droite ci-dessus mentionnée avec les axes coordonnés, et β_1, β_2, β_3 les angles analogues pour la normale, on aura évidemment

$$\cos \alpha_1 = \frac{a_1 - x}{u}, \quad \cos \alpha_2 = \frac{a_2 - y}{u}, \quad \cos \alpha_3 = \frac{a_3 - z}{u},$$

$$\cos \beta_1 = \frac{A_1 x}{(A_1^2 x^2 + A_2^2 y^2 + A_3^2 z^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\cos \beta_2 = \frac{A_2 y}{(A_1^2 x^2 + A_2^2 y^2 + A_3^2 z^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\cos \beta_3 = \frac{A_3 z}{(A_1^2 x^2 + A_2^2 y^2 + A_3^2 z^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\begin{aligned}\cos \mu &= \cos \alpha_1 \cos \beta_1 + \cos \alpha_2 \cos \beta_2 + \cos \alpha_3 \cos \beta_3 \\ &= \frac{A_1 (a_1 - x) x + A_2 (a_2 - y) y + A_3 (a_3 - z) z}{u (A_1^2 x^2 + A_2^2 y^2 + A_3^2 z^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{A_1 a_1 x + A_2 a_2 y + A_3 a_3 z - 1}{u (A_1^2 x^2 + A_2^2 y^2 + A_3^2 z^2)^{\frac{1}{2}}},\end{aligned}$$

$$(4) \qquad I = \frac{\rho (A_1 a_1 x + A_2 a_2 y + A_3 a_3 z - 1)}{[(a_1 - x)^2 + (a^2 - y)^2 + (a_3 - z)^2]^{\frac{3}{2}} (A_1^2 x^2 + A_2^2 y^2 + A_3^2 z^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Observons : 1° que pour les points dont les coordonnées vérifient l'équation (3), on a $I = 0$, comme on devait s'y attendre; 2° que pour le pied de la normale abaissée du point lumineux sur l'ellipsoïde, $\cos \mu$ étant un maximum et u en même temps un minimum, I est un maximum; 3° que l'équation $I = \varphi(x, y, z) = c$, jointe à l'équation (1), fera connaître les projections des lignes de lumière égale, ou des lignes isothermes, en supposant que du point donné émanent des rayons de chaleur.

3. La quantité de lumière qui tombe sur l'ellipsoïde étant la même que celle qui est recueillie par la partie d'une surface quelconque interceptée par le cône circonscrit à l'ellipsoïde, il en résulte qu'en coupant ce cône par un plan perpendiculaire à son axe, à une distance du centre égale à l'unité de longueur, il ne s'agira que d'obtenir la quantité de lumière recueillie par la surface de cette section, laquelle sera une ellipse.

Au premier abord, la détermination des axes de cette ellipse semble présenter quelques difficultés; mais on y parviendra facilement en considérant le cône comme asymptotique à un hyperboloïde, dont on déterminera les axes principaux à l'aide de l'équation connue entre ces axes et les coefficients de l'équation de cette surface rapportée au centre.

En effet, prenons le point donné a_1, a_2, a_3 pour origine d'un second système d'axes parallèles aux premiers, l'équation (2) de la surface conique circonscrite à l'ellipsoïde devient

$$\begin{aligned}[][\mathrm{A}_1(x-a_1)^2+\mathrm{A}_2(y-a_2)^2+\mathrm{A}_3(z-a_3)^2-1](\mathrm{A}_1a_1^2+\mathrm{A}_2a_2^2+\mathrm{A}_3a_3^2-1)\\ =[\mathrm{A}_1a_1(x-a_1)+\mathrm{A}_2a_2(y-a_2)+\mathrm{A}_3a_3(z-a^3)-1]^2,\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}&\mathrm{A}_1(x-a_1)^2(\mathrm{A}_2a_2^2+\mathrm{A}_3a_3^2-1)+\mathrm{A}_2(y-a_2)^2(\mathrm{A}_1a_1^2+\mathrm{A}_3a_3^2-1)\\ &+\mathrm{A}_3(z-a_3)^2(\mathrm{A}_1a_1^2+\mathrm{A}_2a_2^2-1)-(\mathrm{A}_1a_1^2+\mathrm{A}_2a_2^2+\mathrm{A}_3a_3^2-1)\\ &=2\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2a_1a_2(x-a_1)(y-a_2)+2\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3a_1a_3(x-a_1)(z-a_3)\\ &+2\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3(y-a_2)(z-a^2)\\ &-2[\mathrm{A}_1a_1(x-a_1)+\mathrm{A}_2a_2(y-a_2)+\mathrm{A}_3a_3(z-a_3)],\end{aligned}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\begin{aligned}&\mathrm{A}_1(\mathrm{A}_2a_2^2+\mathrm{A}_3a_3^2-1)x^2+\mathrm{A}_2(\mathrm{A}_1a_1^2+\mathrm{A}_3a_3^2-1)y^2\\ &+\mathrm{A}_3(\mathrm{A}_1a_1^2+\mathrm{A}_2a_2^2-1)z^2-2\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2a_1a_2xy\\ &-2\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3a_1z_3xz-2\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3a_2a_3yz=0,\end{aligned}$$

équation qui pourra s'écrire sous la forme simplifiée

$$\mathrm{A}x^2+\mathrm{A}'y^2+\mathrm{A}''z^2+2\mathrm{B}yz+2\mathrm{B}'xz+2\mathrm{B}''xy=0. \tag{5}$$

L'hyperboloïde dont la surface (5) représente le cône asymptotique ayant le même centre, aura évidemment pour équation

$$\mathrm{A}x^2+\mathrm{A}'y^2+\mathrm{A}''z^2+2\mathrm{B}yz+2\mathrm{B}'xz+2\mathrm{B}''xy=\mathrm{H},$$

H étant une quantité positive.

On sait, de plus, que l'équation

$$(6)\quad \begin{cases} s^3 - s^2(A + A' + A'') - s(B''^2 - AA' + B'^2 - AA'' + B^2 - A'A'') \\ \qquad - (AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B'') = 0 \end{cases}$$

a ses trois racines réelles, et que ces racines ont pour valeurs,

$$s' = \frac{H}{e^2}, \quad s'' = \frac{H}{f^2}, \quad s''' = \frac{H}{g^2},$$

en représentant par e^2, f^2 et g^2 les carrés des demi-axes de l'hyperboloïde [*].

Remarquons à présent que chacun des deux plans passant par un axe réel et un axe imaginaire coupe ce cône suivant deux de ses génératrices rectilignes, et que la tangente de la moitié de l'angle compris entre ces droites aura une valeur numérique égale à la longueur d'un des demi-axes de l'ellipse qu'il s'agissait de déterminer.

Mais l'équation (6) présentera deux cas distincts par rapport aux signes de ses trois racines. Elle pourra admettre deux racines positives et une négative, ou bien deux racines négatives et une positive. En désignant toujours par s', s'' les racines affectées du même signe, on aura en tous cas pour les valeurs des deux tangentes ou des deux axes de l'ellipse,

$$\frac{e}{g} = \left(-\frac{s'''}{s''}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{f}{g} = \left(-\frac{s'''}{s'}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Évaluons maintenant la quantité de lumière recueillie par la surface de cette ellipse, dont nous nommerons le grand axe $2a$, et le petit axe $2b$.

Soient ACB un quart d'ellipse, φ le point lumineux, l'intensité de la lumière au point P, dont les coordonnées rectangulaires sont x et y, ayant pour valeur $\rho\,\frac{\sin \mathrm{OP}\varphi}{\overline{\mathrm{P}\varphi}^2} = \frac{\rho}{\overline{\mathrm{P}\varphi}^3}$; la quantité de lumière recueillie par l'élément $\mathrm{P}r_1\,\mathrm{R}r_{11} = dx\,dy$ s'exprimera par $\frac{\rho\,dx\,dy}{\overline{\mathrm{P}\varphi}^3}$. En

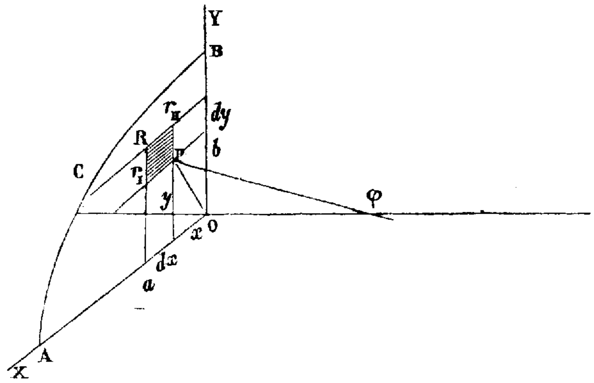
[*] Leroy, § 237.

la désignant par d^2X et substituant pour $P\varphi$ sa valeur, on aura

$$d^2X = \frac{\rho\, dx\, dy}{(1+y^2+x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

et, en posant

$$a\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} = f(y),$$



il viendra pour l'ellipse entière

$$X = 4\int_0^b dy \int_0^{f(y)} \frac{\rho\, dx}{(1+y^2+x^2)^{\frac{3}{2}}};$$

d'où l'on conclut, en intégrant,

$$\frac{X}{4\rho} = \int_0^b \frac{f(y)\, dy}{(1+y^2)\left[1+y^2+f(y)^2\right]^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{X}{4\rho} = a\int_0^b \frac{\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} dy}{(1+y^2)\left[1+a^2-(a^2-b^2)\frac{y^2}{b^2}\right]^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{X}{4\rho} = \frac{a}{(1+a^2)^{\frac{1}{2}}}\int_0^b \frac{\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right) dy}{(1+y^2)\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{a^2-b^2}{1+a^2}\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{X}{4\rho} = -\frac{a}{b^2(1+a^2)^{\frac{1}{2}}}\int_0^b \frac{dy}{\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{a^2-b^2}{1+a^2}\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$
$$+\frac{a(1+b^2)}{b^2(1+a^2)^{\frac{1}{2}}}\int_0^b \frac{dy}{(1+y^2)\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{a^2-b^2}{1+a^2}\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

En posant

$$y = b\sin\varphi,\quad \frac{a^2-b^2}{1+a^2} = c^2,$$

on aura

$$\frac{X}{4\rho} = -\frac{a}{b(1+a^2)^{\frac{1}{2}}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(1-c^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}$$
$$+\frac{a(1+b^2)}{b(1+a^2)^{\frac{1}{2}}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(1+b^2\sin^2\varphi)(1-c^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}},$$

c étant < 1; ou, en suivant les notations adoptées dans la théorie des fonctions elliptiques,

$$\frac{X}{4\rho} = -\frac{a}{b(1+a^2)^{\frac{1}{2}}}F^1(c) + \frac{a(1+b^2)}{b^2(1+a^2)^{\frac{1}{2}}}\Pi^1(b^2, c).$$

Soient encore

$$a = \operatorname{tang}\varepsilon,\quad b = \cot\theta,$$

le résultat précédent deviendra

$$\frac{X}{4\rho} = -\sin\varepsilon\operatorname{tang}\theta\, F^1(c) + \frac{\sin\varepsilon}{\sin\theta\cos\theta}\Pi^1(\cot^2\theta, c).$$

et pourra s'écrire sous la forme

$$\frac{X}{4\rho} = \frac{\sin\varepsilon}{\Delta(b,\theta)}\left[-\operatorname{tang}\theta\Delta(b,\theta)F^1(c) + \frac{\Delta(b,\theta)}{\sin\theta\cos\theta}\Pi^1(\cot^2\theta, c)\right];$$

d'où l'on déduit, à l'aide de la formule

$$\frac{\Delta(c',\theta)}{\sin\theta\cos\theta}\Pi^1(\cot^2\theta, c) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{tang}\theta\Delta(c',\theta)F^1(c) + F^1(c)F(c',\theta)$$
$$- E^1(c)F(c',\theta) - F^1(c)E(c',\theta)\ [*],$$

[*] Verhulst, *Traité élémentaire des Fonctions elliptiques*, § 56.

où l'on a

$$c'^2 = 1 - c^2 = \frac{1+b^2}{1+a^2} = \frac{\cos^2 \varepsilon}{\sin^2 \theta}, \quad \Delta(c', \theta) = \sin \varepsilon,$$

cette dernière expression

$$X = 4\rho \left[\frac{\pi}{2} + F^1(c) F(c', \theta) - E^1(c) F(c', \theta) - F^1(c) E(c', \theta) \right],$$

pour la valeur de la quantité de lumière répandue sur la surface de l'ellipsoïde.

Le résultat précédent nous conduit immédiatement à la solution d'un problème de calcul intégral, dont M. Catalan s'est occupé dans le tome VI de ce Journal (pages 340 et suivantes), et où il s'agissait de trouver la quadrature de l'ellipse sphérique.

En effet, en décrivant du centre d'une surface conique du second degré, déterminée par les tangentes a et b, une sphère dont le rayon soit égal à l'unité de longueur, la quantité de lumière recueillie par la partie ω de la surface sphérique interceptée par le cône sera $\omega\rho$; donc

$$\omega\rho = X, \quad \omega = \frac{X}{\rho},$$

et, en prenant une sphère qui a pour rayon r, on aura évidemment

$$\begin{aligned} O &= r^2\omega = r^2 \frac{X}{\rho} \\ &= 4r^2 \left[\frac{\pi}{2} + F^1(c) F(c', \theta) - E^1(c) F(c', \theta) - F^1(c) E(c, \theta) \right]. \end{aligned}$$

Cette expression, moins compliquée que celle qui est donnée à l'endroit cité de ce Journal, s'accorde d'ailleurs parfaitement avec le résultat que M. Catalan a obtenu plus tard, en résolvant un autre problème du même genre par des considérations différentes. (*Voir* tome VI de ce Journal, p. 419.)