JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

GEORGE BOOLE

Théorème général concernant l'intégration définie

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 13 (1848), p. 111-112.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1848_1_13__111_0>

THÉORÈME GÉNÉRAL CONCERNANT L'INTÉGRATION DÉFINIE;

PAR M. GEORGE BOOLE (DE LINCOLN).

Soit R une fonction rationnelle de x, telle que les racines de l'équation

$$x - \mathrm{R} = v$$

soient réelles pour toutes les valeurs de v qui ne font pas évanouir la fonction $f(v)$; on a universellement

$$(1) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x - \mathrm{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} dv\, f(v),$$

quelle que soit la forme de la fonction $f(v)$.

De là on déduit facilement

$$(2) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f\left(x - \frac{a_1}{x-\lambda_1} - \frac{a_2}{x-\lambda^2} \cdots - \frac{a_n}{x-\lambda_n}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} dv\, f(v),$$

pourvu que les valeurs des constantes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ soient réelles et positives; celles des constantes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ réelles.

On peut se servir de ce théorème général pour trois applications différentes.

Premièrement, pour l'évaluation des intégrales. Voici un exemple :

$$\int_0^{\infty} dx\, e^{-\left(x - \frac{a}{x}\right)^n} = \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right),$$

pourvu que n soit pair; d'où résulte, en supposant $n = 2$, la formule connue

$$\int_0^{\infty} dx\, e^{-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)} = \frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}} e^{-2a}.$$

Deuxièmement, pour exprimer les sommes des intégrales transcendantes. En supposant que $f(v)$ s'évanouisse dans l'équation (1) quand on a $v > q$ ou $v < p$, on obtient

$$\int_{p_1}^{q_1} dx f(x-\mathrm{R}) + \int_{p_2}^{q_2} dx f(x-\mathrm{R}) \ldots + \int_{p_n}^{q_n} dx f(x-\mathrm{R}) = \int_{p}^{q} dv f(v),$$

$p_1, p_2, \ldots, p_n$ et $q_1, q_2, \ldots, q_n$ étant respectivement les racines des équations

$$x - \mathrm{R} = p, \quad x - \mathrm{R} = q,$$

et les racines de l'équation

$$x - \mathrm{R} = v$$

étant toutes réelles pour toutes les valeurs de v qui se trouvent entre les limites p et q.

Troisièmement, le théorème s'applique à la réduction des intégrales définies multiples. Au point de vue de cette application, je l'ai communiqué à M. Cayley dès 1846.