JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J.-H. JELLETT

# Extrait d'une lettre adressée à M. Liouville

*Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série*, tome 12 (1847), p. 92-94.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1847_1_12__92_0>

# EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. LIOUVILLE,

PAR M. J.-H. JELLETT (DE DUBLIN).

« ... Ayant vu dans votre Journal (septembre 1846) le précis d'un Mémoire sur la quadrature des surfaces du second degré, par M. Lebesgue, je crois devoir rappeler un Mémoire sur le même sujet, que j'ai fait imprimer, il y a plus d'un an, dans le *Cambridge and Dublin mathematical Journal* (tome I, page 57, décembre 1845).

» On y trouvera que j'ai employé, dans la question des quadratures, les courbes que M. Lebesgue appelle *parallèles*, et que, par ce moyen, j'ai résolu cette question, tant pour les surfaces douées d'un centre, que pour les surfaces dépourvues de centre. On trouvera aussi que j'ai considéré le cas où il existe, entre les angles que M. Lebesgue appelle $i$, $i'$, $i''$, les relations

$$\frac{\operatorname{tang} i}{a} = \frac{\operatorname{tang} i'}{b} = \frac{\operatorname{tang} i''}{c},$$

et que j'ai donné une équation entre les trois différences des zones correspondantes. Quant à l'expression de la différence entre deux zones, on peut la déduire, comme M. Roberts me l'a fait remarquer peu après la publication de mon Mémoire, des équations que j'ai posées. Mais, comme M. Lebesgue l'a donnée le premier, on doit sans doute lui attribuer cette découverte.

» Avant de quitter le problème de quadrature, je vais en donner une application assez remarquable au calcul de l'attraction d'un ellipsoïde.

» Soient $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les coordonnées du point attiré, $a$, $b$, $c$ les demi-axes de l'ellipsoïde attirant, et A, B, C les composantes de l'attraction de ce corps. Soit S la surface totale de l'ellipsoïde réciproque, c'est-àdire de l'ellipsoïde dont les demi-axes $a'$, $b'$, $c'$ vérifient les relations $aa' = 1$, $bb' = 1$, $cc' = 1$, et posons

$$(\mathrm{I}) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d.\mathrm{S}a}{da} &= \mathrm{P}a^2, \\ \frac{d.\mathrm{S}b}{db} &= \mathrm{Q}b^2, \\ \frac{d.\mathrm{S}c}{dc} &= \mathrm{R}c^2. \end{aligned} \right.$$

Je dis que les composantes A, B, C de l'attraction de l'ellipsoïde seront données par les formules

$$(\mathrm{II}) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{A} &= \mu f\rho . b^2 . c^2 . \alpha . (\mathrm{Q} + \mathrm{R} - \mathrm{P}), \\ \mathrm{B} &= \mu f\rho . a^2 . c^2 . \beta . (\mathrm{R} + \mathrm{P} - \mathrm{Q}), \\ \mathrm{C} &= \mu f\rho . a^2 . b^2 . \gamma . (\mathrm{P} + \mathrm{Q} - \mathrm{R}). \end{aligned} \right.$$

En effet, $a'$, $b'$, $c'$ étant les demi-axes de l'ellipsoïde réciproque, nous aurons (*voir* page 6 de mon Mémoire)

$$\mathrm{S} = 2\pi a'^2 . b'^2 . c'^2 . \left\{ \begin{aligned} &\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin\theta\, d\theta}{(b'^2 \sin^2\theta + c'^2\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}} (a'^2\sin^2\theta + c'^2\cos^2\theta)^{\frac{1}{2}}} \\ + &\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin\theta\, d\theta}{(b'^2 \sin^2\theta + c'^2\cos^2\theta)^{\frac{1}{2}} (a'^2\sin^2\theta + c'^2\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \right\},$$

ou, en vertu des équations $a' = \frac{1}{a}$, $b' = \frac{1}{b}$, $c' = \frac{1}{c}$,

$$\mathrm{S} = 2\pi c^2 . \left\{ \begin{aligned} &\frac{b}{a} . \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin\theta\, d\theta}{(c^2 \sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}} (c^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta)^{\frac{1}{2}}} \\ + &\frac{a}{b} . \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin\theta\, d\theta}{(c^2 \sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^{\frac{1}{2}} (c^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \right\}.$$

Mais si l'on pose, dans la première des intégrales,

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{b}{c} . \operatorname{tang}\varphi,$$

et, dans la seconde,

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{a}{c} . \operatorname{tang}\varphi,$$

on voit facilement que les limites ne se changent pas, et l'expression devient

$$S = \frac{2\pi}{c} \cdot \left\{ \frac{1}{a} \cdot \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin\varphi\, d\varphi \sqrt{b^2 \sin^2\varphi + c^2 \cos^2\varphi}}{\sqrt{b^2 \sin^2\varphi + a^2 \cos^2\varphi}} + \frac{1}{b} \cdot \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin\varphi\, d\varphi \sqrt{a^2 \sin^2\varphi + c^2 \cos^2\varphi}}{\sqrt{a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi}} \right\}.$$

En différentiant sous le signe $\int$, et comparant la valeur de $\frac{d.Sc}{dc}$ qu'on obtient avec les valeurs connues des composantes A, B, C (Poisson, *Mécanique*, tome I, page 190), nous aurons

$$\frac{d.Sc}{dc} = \frac{1}{2\mu f\rho} \cdot \left( \frac{A}{b^2.\alpha} + \frac{B}{a^2.\beta} \right);$$

sans nouveau calcul, on voit que

$$\text{(III)} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d.Sb}{db} &= \frac{1}{2\mu f\rho} \cdot \left( \frac{C}{a^2.\gamma} + \frac{A}{c^2.\alpha} \right), \\ \frac{d.Sa}{da} &= \frac{1}{2\mu f\rho} \cdot \left( \frac{B}{c^2.\beta} + \frac{C}{b^2.\gamma} \right). \end{aligned} \right.$$

En tirant des équations (III) les valeurs de A, B, C, on tombe, en vertu des équations (I), sur les équations (II). Ainsi la proposition est démontrée. On voit donc que le calcul de l'attraction d'un ellipsoïde ne dépend que de la quadrature de l'ellipsoïde réciproque.