JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

J.-A. SERRET

Note sur la surface réglée dont les rayons de courbure principaux sont égaux et dirigés en sens contraires

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 11 (1846), p. 451-457.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1846_1_11__451_0>

NOTE

SUR LA SURFACE RÉGLÉE

DONT LES RAYONS DE COURBURE PRINCIPAUX SONT ÉGAUX

ET DIRIGÉS EN SENS CONTRAIRES;

Par M. J.-A. SERRET.

1. On sait que l'héliçoïde gauche à plan directeur a, en chaque point, ses rayons de courbure principaux égaux et de sens contraires, et même que cette surface est la seule, parmi les surfaces réglées, qui jouisse de cette propriété. Dans un élégant Mémoire qui fait partie de l'un des derniers cahiers de ce Recueil, M. Michael Roberts a cherché à déduire ce théorème des équations intégrales que Monge a fait connaître, et qui représentent généralement toutes les surfaces dont les deux rayons de courbure sont égaux et de sens contraires. Cette marche avait déjà été indiquée par Legendre dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour l'année 1787. On lit, en effet, à la page 314: *Si l'on cherche la surface la moindre entre deux lignes droites données, non situées dans le même plan, soient m la plus courte distance de ces lignes, λ l'angle qu'elles font entre elles, on pourra déterminer à priori la forme des fonctions φ et ψ, et il en résultera, pour l'équation de la surface cherchée, réduite à la forme la plus simple*,

$$z = x \operatorname{tang} \frac{\lambda y}{m}.$$

Mais le moyen le plus simple et le plus naturel de démontrer ce théorème consiste, ainsi que M. Wantzel l'a remarqué, dans une Note communiquée à la Société Philomatique en 1843, à combiner l'équation aux différentielles partielles des surfaces dont les deux rayons de courbure sont égaux et de sens contraires avec les équations de la droite génératrice. On peut de la même manière déterminer les surfaces réglées que représente une équation aux différentielles partielles, plus générale, qui comprend un grand nombre de celles que Monge a considérées dans sa *Géométrie analytique*, et l'on simplifie beaucoup les substitutions en faisant subir à l'équation une transformation préalable que nous allons rappeler.

2. L'équation aux différentielles partielles des surfaces dont les deux rayons de courbure sont égaux et de sens contraires, est comprise, comme cas particulier, dans l'équation

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{R}r + \mathrm{S}s + \mathrm{T}t + \mathrm{U}(rt - s^2) = 0,$$

où R, S, T, U sont des fonctions données de p et q seulement. (Nous représentons, suivant l'usage, par p et q les dérivées du premier ordre $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, par r, s, t les dérivées du second ordre $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dxdy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$.)

A l'aide de la transformation indiquée par Legendre dans l'ouvrage déjà cité, on peut faire dépendre l'intégration de l'équation (1), de celle d'une équation linéaire, et voici comment.

Si l'on fait

$$\text{(2)} \qquad u = px + qy - z,$$

on aura

$$du = xdp + ydq,$$

à cause de

$$dz = pdx + qdy,$$

ce qui montre que, si l'on prend p et q pour variables indépendantes, au lieu de x et y, en sorte que x, y, et, par suite, z et u, soient considérés comme fonctions de p et q, on aura

$$\text{(3)} \qquad x = \frac{du}{dp}, \quad y = \frac{du}{dq}.$$

D'ailleurs, des équations

$$dp = rdx + sdy, \quad dq = sdx + tdy.$$

on tire

$$dx = \frac{t}{rt - s^2}\,dp - \frac{s}{rt - s^2}\,dq, \quad dy = -\frac{s}{rt - s^2}\,dp + \frac{r}{rt - s^2}\,dq,$$

d'où

$$\frac{dx}{dp} = \frac{d^2u}{dp^2} = \frac{t}{rt - s^2}, \quad \frac{dx}{dq} = \frac{dy}{dp} = \frac{d^2u}{dpdq} = \frac{-s}{rt - s^2}, \quad \frac{dy}{dq} = \frac{d^2u}{dq^2} = \frac{r}{rt - s^2}.$$

D'après cela, l'équation (1) deviendra

$$(4) \qquad \mathrm{R}\frac{d^2u}{dq^2} - \mathrm{S}\frac{d^2u}{dpdq} + \mathrm{T}\frac{d^2u}{dp^2} + \mathrm{U} = 0.$$

Celle-ci est linéaire; elle fera connaître u en fonction de p et q, on connaîtra ensuite x, y et z à l'aide des équations

$$x = \frac{du}{dp}, \quad y = \frac{du}{dq}, \quad z = p\frac{du}{dp} + q\frac{du}{dq} - u.$$

Il faut remarquer toutefois que, si l'équation (1) admettait des solutions communes avec l'équation

$$rt - s^2 = 0,$$

la méthode précédente ne pourrait les faire connaître; car, dans ce cas, il y aurait une équation entre p et q, et ces quantités ne pourraient plus dès lors être prises pour les variables indépendantes. On devra donc toujours chercher à part les surfaces développables qui pourraient satisfaire à l'équation (1).

3. Cherchons maintenant les surfaces réglées que l'équation (1) peut représenter. Soient

$$(5) \qquad \begin{cases} y = ax + \mathrm{A}, \\ z = bx + \mathrm{B}, \end{cases}$$

les équations de la génératrice, dans lesquelles a est un paramètre variable, et A, b, B sont des fonctions de ce paramètre.

On peut d'abord exprimer l'une des variables p et q à l'aide de la seconde et du paramètre a: car, si l'on passe d'un point à un point infiniment voisin de la même génératrice, on aura

$$dy = adx, \quad dz = bdx:$$

et comme d'ailleurs

$$dz = pdx + qdy,$$

il viendra

$$b = p + aq,$$

ou

(6) $$p = b - aq.$$

Si maintenant l'on porte dans l'équation (2), les valeurs de y, z et p tirées des équations (5) et (6), il viendra

(7) $$u = \mathrm{A}q - \mathrm{B}.$$

Si l'on considère p, q et u comme trois coordonnées rectangulaires, les équations (6) et (7) seront celles d'une ligne droite, et nous serons ramenés à chercher la surface réglée que représente l'équation (4).

Si, dans la première des équations (5), on remplace y et x par leurs valeurs $\frac{du}{dq}$, $\frac{du}{dp}$, on aura

(8) $$\frac{du}{dq} = a\frac{du}{dp} + \mathrm{A},$$

que l'on aurait pu déduire directement des équations (6) et (7).

Cela posé, différentions l'équation (8) successivement par rapport à p et à q, dénotons par A', b', B' les dérivées de A, b et B, et remarquons enfin que l'équation (6) donne

$$\frac{da}{dp} = \frac{1}{b' - q}, \quad \frac{da}{dq} = \frac{a}{b' - q},$$

on aura

(9) $$\left\{\begin{aligned} \frac{d^2u}{dpdq} &= a\frac{d^2u}{dp^2} + \frac{\frac{du}{dp} + \mathrm{A}'}{b' - q};\\ \frac{d^2u}{dq^2} &= a\frac{d^2u}{dpdq} + a\frac{\frac{du}{dp} + \mathrm{A}'}{b' - q} = a^2\frac{d^2u}{dp^2} + 2a\frac{\frac{du}{dp} + \mathrm{A}'}{b' - q}.\end{aligned}\right.$$

Portant dans l'équation (4) les valeurs de p, $\frac{d^2u}{dpdq}$, $\frac{d^2u}{dq^2}$, tirées des équations (6) et (9), et dénotant par R_1, S_1, T_1, U_1 ce que deviennent R, S, T, U, par le changement de p en $b - aq$, on aura

$$(10) \qquad (a^2R_1 - aS_1 + T_1)\frac{d^2u}{dp^2} + (2aR_1 - S_1)\frac{\frac{du}{dp} + A'}{b' - q} + U_1 = 0;$$

mais l'équation (7) donne

$$\frac{du}{dp} = \frac{A'q - B'}{b' - q}, \quad \frac{d^2u}{dp^2} = \frac{1}{b' - q}\frac{d}{da}\left(\frac{A'q - B'}{b' - q}\right),$$

et l'équation (10) devient

$$(11) \qquad \frac{d}{da}\left(\frac{A'q - B'}{b' - q}\right) + \frac{A'b' - B'}{b' - q}\cdot\frac{2aR_1 - S_1}{a^2R_1 - aS_1 + T_1} + \frac{(b' - q)U_1}{a^2R_1 - aS_1 + T_1} = 0.$$

Telle est la condition nécessaire et suffisante pour que la surface réglée que nous considérons satisfasse à l'équation (1). En exprimant qu'elle doit avoir lieu quel que soit q, on aura plusieurs équations à l'aide desquelles on déterminera b, A et B.

4. Supposons qu'il s'agisse de la surface dont les deux rayons de courbure sont égaux et de sens contraires, on aura

$$R = 1 + q^2, \quad S = -2pq, \quad T = 1 + p^2, \quad U = 0,$$

et

$$a^2R_1 - aS_1 + T_1 = 1 + a^2 + b^2, \quad 2aR_1 - S_1 = 2(bq + a), \quad U_1 = 0;$$

et l'équation (11) deviendra

$$(12) \qquad \frac{d}{da}\left(\frac{A'q - B'}{b' - q}\right) + \frac{2(A'b' - B')}{1 + a^2 + b^2}\cdot\frac{bq + a}{b' - q} = 0,$$

ou, en effectuant la différentiation, et dénotant par b'', A'', B'', les secondes dérivées de b, A, B,

$$(13) \qquad (A'q - B')b'' = (b' - q)\left[(A''q - B'') + \frac{2(A'b' - B')(bq + a)}{1 + a^2 + b^2}\right];$$

cette équation devant avoir lieu, en particulier pour $q = b'$, on aura

$$A'b' - B' = 0, \quad \text{ou} \quad b'' = 0.$$

La première de ces deux équations ne saurait avoir lieu ; car, s'il en était ainsi, l'équation (12) donnerait

$$\frac{dA'}{da} = \frac{d}{da}\frac{B'}{b'} = 0,$$

d'où, en représentant par x', y', z' trois constantes arbitraires,

$$A = y' - ax' \quad \text{et} \quad B = z' - bx',$$

en sorte que les équations de la génératrice seraient

$$y - y' = a(x - x') \quad \text{et} \quad z - z' = b(x - x'),$$

et représenteraient une surface conique faisant partie des surfaces $rt - s^2 = 0$ que nous avons exclues; on a donc nécessairement

$$b'' = 0, \quad \text{d'où} \quad b = Ca + C',$$

C et C′ représentant deux constantes arbitraires.

Ce dernier résultat fait voir que la génératrice est constamment parallèle à un plan fixe, et, par conséquent, que la surface est à plan directeur. Si l'on prend ce plan pour celui des x et y, les constantes C et C′ seront nulles; on aura

$$b = 0, \quad b' = 0,$$

et l'équation (13) deviendra

$$A''q - B'' - \frac{2B'a}{1+a^2} = 0,$$

d'où

$$A'' = 0, \quad \text{et} \quad \frac{B''}{B'} + \frac{2a}{1+a^2} = 0;$$

et, par l'intégration,

$$A = y' - ax', \quad B = z' + c \operatorname{arc\,tang} a,$$

x', y', z' et c désignant quatre constantes arbitraires. Les équations de la génératrice seront, d'après cela,

$$y - y' = a(x - x'), \quad \text{et} \quad z - z' = c \operatorname{arc\,tang} a,$$

ou simplement

$$y = ax, \quad \text{et} \quad z = c \operatorname{arc\,tang} a,$$

et l'équation de la surface sera enfin

$$\frac{y}{x} = \tang \frac{z}{c},$$

qui est bien celle de l'héliçoïde gauche à plan directeur.

5. En considérant, comme nous l'avons fait, b, A, B comme des fonctions de a, on omettrait en général les surfaces pour lesquelles on a

$$a = \text{une constante.}$$

Mais il suffira évidemment, pour éviter cet inconvénient, de remplacer partout dans nos formules b' et b'' par $\frac{b'}{a'}$ et $\frac{b''a' - b'a''}{a'^2}$, et ainsi des autres; alors a, b, A et B seront considérés comme fonctions d'un paramètre indéterminé.

Dans l'exemple que nous avons traité, on pouvait supposer a variable, parce que la propriété géométrique exprimée par l'équation aux différentielles partielles est indépendante des axes coordonnés, et que cette équation restera la même par le changement des quantités z et y l'une en l'autre; si donc l'une des quantités a ou b est constante, on peut supposer que ce ne soit pas a, et il est évident qu'elles ne peuvent l'être en même temps, puisque alors la surface serait cylindrique, et par suite développable.

Quant aux surfaces développables, on devra les examiner à part; il est aisé de voir que toutes celles que représente notre équation

$$(1 + q^2) r - 2pqs + (1 + p^2) t = 0$$

sont imaginaires. Car, pour les surfaces développables,

$$\frac{dp^2}{r} = \frac{dpdq}{s} = \frac{dq^2}{t},$$

d'où

$$(1 + q^2) dp^2 - 2pq dpdq + (1 + p^2) dq^2 = 0,$$

ou

$$dp^2 + dq^2 + (qdp - pdq)^2 = 0.$$