JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E.-L. GUILLON

Note sur la propriété de la cycloïde, d'être la seule tautochrone dans le vide

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 11 (1846), p. 216.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1846_1_11__216_0>

Note sur la propriété de la cycloïde, d'être la seule tautochrone dans le vide;

Par M. E.-L. GUILLON,

Élève de l'École Normale, ancien élève de l'École centrale des Arts et Manufactures.

Supposons qu'une courbe AM puisse être une tautochrone, sans coïncider avec la cycloïde tautochrone AN qui a son sommet au point A, le plus bas de la courbe AM, et qui y possède même cercle osculateur que AM. Les oscillations infiniment petites d'un point matériel pesant seront de même durée sur les deux courbes.

Cela posé, soient m un point de AM infiniment voisin de A, et mn une horizontale qui coupe la cycloïde en n; il pourra se présenter deux cas : ou bien la tangente en m à la courbe AM sera plus inclinée sur l'horizontale AX que celle de la cycloïde en n, ou bien elle le sera moins. Supposons d'abord que le premier cas ait lieu, et admettons que la courbe AM ne soit pas de telle nature que la différence entre le coefficient angulaire de sa tangente et celui de la tangente à la cycloïde, pour deux points ainsi placés sur une même horizontale, puisse changer de signe un nombre infini de fois dans une étendue infiniment petite; alors, ce qui arrive aux deux points m et n infiniment voisins de A aura lieu jusqu'à une horizontale $m'n'$ située au-dessus de l'horizontale AX à une distance finie qui pourra d'ailleurs être très-petite. Il résulte de là que si l'on conçoit une infinité d'horizontales, infiniment rapprochées, comprises entre AX et $m'n'$, elles partageront les arcs Am' et An' en éléments correspondants toujours plus inclinés sur l'horizontale et, par conséquent, plus petits pour la première courbe que pour la seconde. Cela étant, supposons que deux points matériels pesants, se mouvant sur les courbes AM et AN, partent en même temps, sans vitesse, l'un de m', l'autre de n'; les vitesses qu'ils auront seront les mêmes lorsqu'ils parcourront deux éléments correspondants; donc le premier arrivera en A plus tôt que le second.

Si l'on avait supposé la tangente en m moins inclinée qu'en n, on aurait trouvé, au contraire, que le point qui parcourt la cycloïde doit arriver en A plus tôt que l'autre. Or la durée de la descente sur la cycloïde est toujours la même, et égale à la durée de la descente infiniment petite sur la courbe AM; donc sur AM la durée de l'oscillation dépend de son amplitude, ou, en d'autres termes, la courbe AM n'est pas une tautochrone.