JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. BRASSINNE

Sur l'interpolation

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 11 (1846), p. 177-183.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1846_1_11__177_0>

SUR L'INTERPOLATION;

Par M. E. BRASSINNE,

Professeur à l'École d'Artillerie de Toulouse.

1°. Les principales formules d'interpolation données par les géomètres peuvent se déduire assez simplement d'une formule générale qui les comprend toutes comme cas particuliers.

Supposons qu'une fonction de la variable x, que nous désignerons par u, devienne, pour des valeurs particulières $x_0, x_1, x_2,\ldots, x_m$ de la variable, successivement égale à $u_0, u_1, u_2,\ldots, u_m$. Nous pourrons représenter la fonction u par la formule

$$(1)\quad u = \frac{A_0 u_0 (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_m) + A_1 u_1 (x-x_0)\ldots(x-x_m) + \ldots + A_m u_m (x-x_0)\ldots(x-x_{m-1})}{A_0 (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_m) + A_1 (x-x_0)\ldots(x-x_m) + \ldots + A_m (x-x_0)\ldots(x-x_{m-1})};$$

$A_0, A_1,\ldots, A_m$ peuvent être des fonctions arbitraires de x, ou des quantités numériques quelconques. Les facteurs binômes qui multiplient, au numérateur ou au dénominateur, une fonction quelconque A_p, sont au nombre de m, et ils sont formés en retranchant de la variable x chacune de ses valeurs particulières, à l'exception de x_p. De cette forme générale nous allons conclure, en assignant des valeurs particulières aux indéterminées $A_0, A_1,\ldots, A_m$, les formules les plus connues.

2°. Si nous voulons que la formule d'interpolation soit un polynôme entier en x du degré m, il suffira de déterminer $A_0, A_1,\ldots, A_m$, regardés comme des quantités numériques, de telle sorte que la variable disparaisse au dénominateur de la formule générale; or, ce dénominateur est un polynôme du degré m; s'il prend une valeur déterminée pour les $(m+1)$ valeurs particulières de x, il faudra qu'il soit nécessairement constant, sans quoi, retranchant du dénominateur cette valeur déterminée, on obtiendrait une équation algébrique du degré m qui aurait $m+1$ racines différentes, ce qui est absurde. Or, en désignant par

$D_0, D_1, D_2, \ldots, D_m$ ce que deviennent au dénominateur les produits binômes qui multiplient $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_m$ quand on fait successivement

$$x = x_0 = x_1 = x_2 = \ldots = x_m,$$

et représentant par C la valeur déterminée du dénominateur pour ces diverses hypothèses, on devra avoir

$$C = A_0 D_0, \quad C = A_1 D_1, \quad C = A_2 D_2, \ldots, \quad C = A_m D_m,$$

égalités auxquelles on peut satisfaire en posant

$$A_0 = D_1 D_2 \ldots D_m, \quad A_1 = D_0 D_2 \ldots D_m, \ldots.$$

Le dénominateur de la formule (1) devient alors égal à la quantité constante $D_0 D_1 D_2 \ldots D_m$, et, si l'on remplace, au numérateur, $A_0, A_1, \ldots, A_m$ par leurs valeurs, on obtiendra la formule d'interpolation de Lagrange :

$$(2) \quad u = \frac{u_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_m)}{D_0} + \frac{u_1(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_m)}{D_1} + \ldots.$$

Si, dans cette formule, on suppose

$$u_0 = u_1 = u_2 = \ldots = u_m,$$

u_0 sera facteur commun au second membre, et il multipliera une expression de la forme

$$\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_m)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_m)} + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_m)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_m)} + \ldots;$$

les numérateurs sont les produits m à m des $m+1$ binômes; chaque numérateur est divisé par la quantité numérique qui exprime ce que devient ce numérateur lorsque la variable x est changée en cette lettre affectée de l'indice qui manque aux secondes lettres des binômes: or, il est visible que cette expression algébrique du degré m se réduit à l'unité pour les $m+1$ valeurs de x égales à $x_0, x_1, \ldots, x_m$; elle est donc constante et égale à l'unité. Cette remarque, qui était bien connue, nous sera utile dans ce qui suit.

3°. Si u doit être exprimé par une fraction dont le numérateur soit constant, et le dénominateur une fonction de x du degré m, nous déterminerons $A_0, A_1, \ldots, A_m$ par la condition que le numérateur ait toujours la même valeur déterminée C pour $x = x_0 = x_1 = \ldots = x_m$. Il faudra pour cela satisfaire aux égalités

$$A_0 u_0 D_0 = C, \quad A_1 u_1 D_1 = C, \ldots, \quad A_m u_m D_m = C,$$

ce qui reviendra à faire

$$A_0 = u_1 D_1 u_2 D_2 \ldots u_m D_m, \quad A_1 = u_0 D_0 u_2 D_2 \ldots u_m D_m;$$

par suite, la formule générale (1) deviendra

$$(3) \quad u = \frac{1}{\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_m)}{D_0} \cdot \frac{1}{u_0} + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_m)}{D_1} \cdot \frac{1}{u_1} + \ldots}.$$

4°. Supposons que u doive être exprimé par une fraction dont le numérateur soit du degré n, et le dénominateur du degré $(p-1)$, en supposant

$$m = n + p - 1.$$

Pour arriver à cette forme, posons, dans la formule générale (1),

$$A_0 = \frac{B_0}{D_0}, \quad A_1 = \frac{B_1}{D_1}, \ldots;$$

$B_0, B_1, B_2, \ldots$ étant de nouvelles indéterminées; la formule (1) deviendra

$$(4) \quad u = \frac{B_0 u_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_m)}{D_0} + B_1 u_1 \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_m)}{D_1} + \ldots}{B_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_m)}{D_0} + B_1 \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_m)}{D_1} + \ldots}.$$

Dans cette formule (4) supposons B_0 égal à la somme des produits $(p-1)$ à $(p-1)$ qu'on peut faire avec les m lettres $u_1, u_2, \ldots, u_m$, chacun de ces produits étant multiplié par un nombre indéterminé; que B_1 soit de même égal à la somme des produits $(p-1)$ à $(p-1)$ de $u_0, u_2, \ldots, u_m$, etc. Cherchons dans le numérateur de la formule (4) ce qui multipliera un produit quelconque de p lettres $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}$. Ce produit ne se trouvera que dans les p premiers termes du numérateur de la formule (4), et il sera multiplié par une expression de la forme

$$\alpha \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_m)}{D_0} + \beta \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_m)}{D_1} + \ldots.$$

Il est clair que, dans cette somme de p termes, le produit

$$(x - x_p)(x - x_{p+1}) \dots (x - x_m)$$

sera facteur commun. Mais ce produit est divisé, dans le premier terme, par les facteurs binômes de D_0, $(x_0 - x_p)(x_0 - x_{p+1}) \dots (x_0 - x_m)$, dont nous nommerons le produit d_0 ; dans le second terme, par des facteurs de D_1, $(x_1 - x_p) \dots (x_1 - x_m)$, dont nous appellerons le produit d_1, etc. Cela posé, nous ferons

$$\alpha = \frac{1}{d_1 . d_2 \dots d_{p-1}}, \quad \beta = \frac{1}{d_0 . d_2 \dots d_{p-1}}, \dots$$

Nous aurons alors, en isolant le facteur commun dans la somme précédente, et observant que ce facteur est multiplié, d'après la remarque du 2°, par une somme égale à l'unité, le terme général du numérateur ainsi exprimé

$$\frac{u_0}{d_0} \cdot \frac{u_1}{d_1} \cdot \frac{u_2}{d_2} \dots \frac{u_{p-1}}{d_{p-1}} (x - x_p)(x - x_{p+1}) \dots (x - x_m),$$

dont la loi est très-aisée : un produit de p lettres $u_0, u_1, u_2, \dots, u_{p-1}$, est multiplié par un produit de n facteurs binômes, dont le premier terme est x, et le second, ce même x affecté des indices qui ne se trouvent pas dans le produit $u_0 u_1 \dots u_{p-1}$. Si l'on change successivement la variable x en x_0 $x_1 \dots$ x_{p-1}, on aura les produits désignés par $d_0, d_1, \dots, d_{p-1}$, et le terme général sera divisé par $d_0 . d_1 \dots d_{p-1}$.

Le dénominateur n'offre pas plus de difficulté, ses termes ne contiendront que $p - 1$ facteurs en u. Cherchons l'expression de celui qui contient le produit $u_0 u_1 u_2 \dots u_{p-2}$. Ce terme monôme provient des valeurs de $B_{p-1}, B_p, \dots, B_m$ développées. Or, le monôme qui se trouve dans B_{p-1} est multiplié par u_{p-1}; il donne au dénominateur, d'après la loi établie pour le numérateur, un terme

$$\frac{u_0 . u_1 . u_2 \dots u_{p-2}}{(x_0 - x_p) \dots (x_0 - x_m) \times (x_1 - x_p) \dots (x_1 - x_m) \times \dots \times (x_{p-2} - x_p) \dots (x_{p-2} - x_m)}$$
$$\times \left[\frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_m)}{(x_{p-1} - x_0) \dots (x_{p-1} - x_m)} \right].$$

Le coefficient B_p donnera un terme pareil; seulement, aux dénominateurs en dehors de la parenthèse, les x_p seront remplacés par x_{p-1};

et, entre parenthèses, les x_{p-1} seront remplacés par x_p. Le terme provenant de B_{p+1} dérivera du précédent; seulement l'indice $p+1$, en dehors de la parenthèse, sera remplacé par p, et l'indice p par $p+1$ en dedans, etc. Cela posé, si l'on isole dans les termes provenant de B_{p-1}, B_p, B_m les facteurs communs en x, dont on changera les signes ainsi que ceux des binômes qui leur correspondent aux dénominateurs, on aura, pour le terme général du dénominateur,

$$\frac{u_0 . u_1 . u_2 \ldots u_{p-2} (x_0 - x)(x_1 - x) \ldots (x_{p-2} - x)}{(x_0 - x_{p-1}) \ldots (x_0 - x_m) \times (x_1 - x_{p-1}) \ldots (x_1 - x_m) \ldots \times (x_{p-2} - x_{p-1})(x_{p-2} - x_p) \ldots (x_{p-2} - x_m)},$$

qui multiplie une expression égale à l'unité. La loi de ce terme est aisée. Le groupe $u_0 u_1 \ldots u_{p-2}$ est multiplié par $p - 1$ facteurs binômes, dont les premières lettres sont x affecté successivement des indices de u, et les seconds termes la variable x. Ce produit total est divisé par $p - 1$ groupes, dans chacun desquels la première lettre est x affecté de l'un des indices de u, et la seconde lettre, x, affecté successivement des indices qui n'entrent pas dans le produit $u_0 u_1 u_2 \ldots u_{p-2}$.

La méthode précédente fournit une démonstration de la formule d'interpolation que M. Cauchy a donnée dans son *Cours d'Analyse*, page 528.

5°. On peut enfin déduire, de la formule d'interpolation de Lagrange, deux formules très-souvent employées. Reprenons la formule (2) de Lagrange, que nous écrirons de cette manière

$$u = u_0 \cdot \frac{N_0}{D_0} + u_1 \frac{N_1}{D_1} + u_2 \frac{N_2}{D_2} + \ldots.$$

Posons

$$u_1 = u_0 + A, \quad u_2 = u_0 + B, \quad u_3 = u_0 + C, \quad u_4 = u_0 + D, \ldots,$$

nous aurons, en isolant le facteur commun u_0, et d'après la remarque du 2°,

$$u = u_0 + \frac{AN_1}{D_1} + \frac{BN_2}{D_2} + \frac{CN_3}{D_3} + \frac{DN_4}{D_4} + \ldots.$$

Or, tous les termes après u_0 ont pour facteur commun $x - x_0$, et ce binôme est divisé, dans le second terme, par $x_1 - x_0$, dans le troisième par $x_2 - x_0$, dans le quatrième par $x_3 - x_0$, etc. Isolant ce facteur commun, et posant

$$A = \delta u_0 (x_1 - x_0), \quad B = \delta u_0 (x_2 - x_0) + B', \quad C = \delta u_0 (x_3 - x_0) + C', \ldots,$$

il résultera, en isolant $\delta u_0 (x - x_0)$, une nouvelle expression de u de cette forme

$$u = u_0 + (x - x_0)\delta u_0 + \frac{B' N_2}{D_2} + \frac{C' N_3}{D_3} + \frac{D' N_4}{D_4} + \ldots .$$

Tous les termes après les deux premiers contiennent, en facteur commun, $(x - x_0)(x - x_1)$, et ce produit est divisé, dans le troisième terme, par deux facteurs de D_2, savoir $(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$, dans le suivant par $(x_3 - x_0)(x_3 - x_1), \ldots$. Posant donc

$$\begin{aligned} B' &= \delta^2 u_0 (x_2 - x_0)(x_2 - x_1), \\ C' &= \delta^2 u_0 (x_3 - x_0)(x_3 - x_1) + C'', \\ D' &= \delta^2 u_0 (x_4 - x_0)(x_4 - x_1) + D'', \ldots, \end{aligned}$$

nous trouverons, en isolant $\delta^2 u_0$, une nouvelle expression de la forme

$$(5) \qquad u = u_0 + (x - x_0)\delta u_0 + (x - x_0)(x - x_1)\delta^2 u_0 + \frac{C'' N_3}{D_3} + \ldots,$$

dont la loi est évidente, et qui revient à la formule de la *Mécanique céleste* (tome Ier, page 200). Il est clair que, si l'on avait classé les indices dans un autre ordre, par exemple dans l'ordre 1, 2, 3,..., m, 0, on aurait obtenu une formule pareille à la formule (5), savoir,

$$(6) \qquad u = u_1 + (x - x_1)\delta u_1 + (x - x_1)(x - x_2)\delta^2 u_1 + \ldots .$$

La formule (5), n'étant qu'une nouvelle forme de la formule de Lagrange, donnera les valeurs de $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_m$ en y posant

$$x = x_0 = x_1 = \ldots = x_m.$$

Cette observation nous donnera une loi de formation aisée pour les δu_0, $\delta^2 u_0$, $\delta^3 u_0, \ldots$ Posons, en effet, $x = x_1$ dans la formule (5), nous trouverons

$$u_1 = u_0 + (x_1 - x_0)\delta u_0,$$

d'où

$$\delta u_0 = \frac{u_1 - u_0}{x_1 - x_0};$$

par suite, et d'après l'ordre successif arbitraire des indices,

$$\delta u_1 = \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1}, \qquad \delta u_2 = \frac{u_3 - u_2}{x_3 - x_2}, \ldots .$$

Pour déterminer $\delta^2 u_0$, $\delta^2 u_1, \ldots$, posons, comme conséquences des formules (5), (6),

$$u_2 = u_0 + (x_1 - x_0)\,\delta u_0 + (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)\,\delta^2 u_0,$$
$$u_2 = u_1 + (x_2 - x_1)\,\delta u_1;$$

soustrayant ces deux dernières et remplaçant $u_1 - u_0$ par $\delta u_0 (x_1 - x_0)$, on trouvera

$$\delta^2 u_0 = \frac{\delta u_1 - \delta u_0}{x_2 - x_0},$$

et, par suite,

$$\delta^2 u_1 = \frac{\delta u_2 - \delta u_1}{x_3 - x_1}, \qquad \delta^2 u_2 = \frac{\delta u_3 - \delta u_2}{x_4 - x_2}.$$

Pour trouver $\delta^3 u_0$, on poserait $x = x_3$ dans les formules (5), (6), on soustrairait les deux valeurs de u_3, et l'on éliminerait u_1, δu_1 en fonction de u_0, δu_0, ce qui donnerait

$$\delta^3 u_0 = \frac{\delta^2 u_1 - \delta^2 u_0}{x_3 - x_0}, \ldots.$$

Si, dans la formule (5), on suppose

$$x_0 = 0, \quad x_1 = h, \quad x_2 = 2h, \quad x_3 = 3h, \ldots,$$

on aura, en employant les différences finies dont la caractéristique est Δ,

$$\delta u_0 = \frac{u_1 - u_0}{h} = \frac{\Delta u_0}{h}, \quad \delta^2 u_0 = \frac{\Delta^2 u_0}{2.h^2}, \quad \delta^3 u_0 = \frac{\Delta^3 u_0}{2.3.h^3}, \ldots:$$

ces valeurs, substituées dans la formule (5), donneront

$$u = u_0 + \frac{x}{h}\,\Delta u_0 + \frac{x(x-h)}{1.2.h^2}\,\Delta^2 u_0 + \frac{x(x-h)(x-2h)}{1.2.3.h^3}\,\Delta^3 u_0 + \ldots,$$

formule ordinairement employée pour l'interpolation.