JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

C. BRIOT

Note sur l'attraction

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 11 (1846), p. 174-176.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1846_1_11__174_0>

NOTE SUR L'ATTRACTION;

Par M. C. BRIOT,

Professeur à la Faculté des Sciences de Lyon.

1. On sait que les composantes de l'attraction d'un corps sur un point extérieur sont les dérivées d'une fonction $F(x, y, z)$ assujettie à satisfaire à l'équation

$$\frac{d^2F}{dx^2} + \frac{d^2F}{dy^2} + \frac{d^2F}{dz^2} = 0. \tag{1}$$

Les surfaces représentées par l'équation

$$a = F(x, y, z) \tag{2}$$

(a désignant un paramètre arbitraire) s'appellent *surfaces de niveau*. Concevons deux systèmes de surfaces,

$$b = f(x, y, z), \quad c = \varphi(x, y, z) \tag{3}$$

(b et c étant deux nouveaux paramètres arbitraires), *orthogonales* aux surfaces de niveau. Il existe une infinité de systèmes de cette nature. En chaque point de l'espace passent trois axes curvilignes, intersections des trois surfaces qui passent en ce point; je nomme *axe des a* l'intersection des surfaces b et c, etc. L'axe des a est perpendiculaire sur les axes des b et des c, mais ceux-ci font entre eux un angle variable θ. Je transforme l'équation (1) dans ce nouveau système de coordonnées a, b, c.

Posons

$$A^2 = \left(\frac{da}{dx}\right)^2 + \left(\frac{da}{dy}\right)^2 + \left(\frac{da}{dz}\right)^2,$$

$$B^2 = \left(\frac{db}{dx}\right)^2 + \left(\frac{db}{dy}\right)^2 + \left(\frac{db}{dz}\right)^2,$$

$$C^2 = \left(\frac{dc}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dc}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dc}{dz}\right)^2;$$

on a

$$\frac{da}{dx}\frac{db}{dx}+\frac{da}{dy}\frac{db}{dy}+\frac{da}{dz}\frac{db}{dz}=0,$$

$$\frac{da}{dx}\frac{dc}{dx}+\frac{da}{dy}\frac{dc}{dy}+\frac{da}{dz}\frac{dc}{dz}=0,$$

$$\frac{db}{dx}\frac{dc}{dx}+\frac{db}{dy}\frac{dc}{dy}+\frac{db}{dz}\frac{dc}{dz}=\mathrm{BC}\cos\theta,$$

équations qui peuvent s'écrire

$$\frac{da}{dx}=\mathrm{G}\left(\frac{db}{dy}\frac{dc}{dz}-\frac{db}{dz}\frac{dc}{dy}\right),$$

$$\frac{da}{dy}=\mathrm{G}\left(\frac{db}{dz}\frac{dc}{dx}-\frac{db}{dx}\frac{dc}{dz}\right),$$

$$\frac{da}{dz}=\mathrm{G}\left(\frac{db}{dx}\frac{dc}{dy}-\frac{db}{dy}\frac{dc}{dx}\right),$$

$$\mathrm{G}=\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{BC}\sin\theta}.$$

Il en résulte

$$\begin{aligned}\frac{d^2a}{dx^2}+\frac{d^2a}{dy^2}+\frac{d^2a}{dz^2}&=\frac{d\mathrm{G}}{dx}\left(\frac{db}{dy}\frac{dc}{dz}-\frac{db}{dy}\frac{dc}{dz}\right)+\frac{d\mathrm{G}}{dy}\left(\frac{db}{dz}\frac{dc}{dx}-\frac{db}{dx}\frac{dc}{dz}\right)\\&\quad+\frac{d\mathrm{G}}{dz}\left(\frac{db}{dx}\frac{dc}{dy}-\frac{db}{dy}\frac{dc}{dx}\right)\\&=\frac{1}{\mathrm{G}}\left(\frac{d\mathrm{G}}{dx}\frac{da}{dx}+\frac{d\mathrm{G}}{dy}\frac{da}{dy}+\frac{d\mathrm{G}}{dz}\frac{da}{dz}\right)\\&=\frac{1}{\mathrm{G}}\frac{d\mathrm{G}}{da}\left[\left(\frac{da}{dx}\right)^2+\left(\frac{da}{dy}\right)^2+\left(\frac{da}{dz}\right)^2\right]\\&\quad+\frac{1}{\mathrm{G}}\frac{d\mathrm{G}}{db}\left(\frac{da}{dx}\frac{db}{dx}+\frac{da}{dy}\frac{db}{dy}+\frac{da}{dz}\frac{db}{dz}\right)\\&\quad+\frac{1}{\mathrm{G}}\frac{d\mathrm{G}}{dc}\left(\frac{da}{dx}\frac{dc}{dx}+\frac{da}{dy}\frac{dc}{dy}+\frac{da}{dz}\frac{dc}{dz}\right);\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{d^2a}{dx^2}+\frac{d^2a}{dy^2}+\frac{d^2a}{dz^2}=\frac{\mathrm{A}^2}{\mathrm{G}}\frac{d\mathrm{G}}{da}.$$

L'équation (1) prend ainsi, dans le nouveau système de coordonnées, la forme simple

$$(4)\qquad \frac{d\mathrm{G}}{da}=0.$$

2. Cherchons la signification géométrique de cette équation. Les axes des b et des c partagent les surfaces de niveau en petits parallélogrammes. Si nous faisons varier le paramètre b, il en résulte normalement à la surface b un déplacement $\frac{1}{B}\,db$, et suivant l'axe des b un déplacement $d\beta = \frac{1}{B\sin\theta}\,db$. De même, si nous faisons varier le paramètre c, il en résulte, sur l'axe des c, un déplacement $d\gamma = \frac{1}{C\sin\theta}\,dc$. L'élément d'une surface de niveau a donc pour expression

$$d\omega = d\beta.d\gamma.\sin\theta = \frac{1}{BC\sin\theta}\,db\,dc.$$

L'attraction du corps sur un point est représentée par la valeur particulière de A en ce point. L'attraction du corps sur l'élément de la surface de niveau sera donc

$$A\,d\omega = \frac{A}{BC\sin\theta}\,db\,dc = G\,db\,dc.$$

L'équation (4) signifie donc que l'*attraction du corps sur les éléments des surfaces de niveau qui correspondent aux mêmes valeurs des paramètres b et c et aux mêmes accroissements db et dc de ces paramètres, c'est-à-dire les éléments compris dans un même canal orthogonal, est constante.* Elle fournit ainsi une démonstration nouvelle d'un théorème, du reste bien connu, mais très-important dans la théorie de l'attraction.