

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

F. LEFORT

**Expression numérique des intégrales définies qui se présentent,  
quand on cherche les termes généraux du développement des  
coordonnées d'une planète, dans son mouvement elliptique**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 1<sup>re</sup> série*, tome 11 (1846), p. 142-152.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1846\\_1\\_11\\_\\_142\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1846_1_11__142_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Expression numérique des intégrales définies qui se présentent, quand on cherche les termes généraux du développement des coordonnées d'une planète, dans son mouvement elliptique;*

**PAR M. F. LEFORT,**

Ingenieur des Ponts et Chaussées.

En désignant, conformément aux notations de la *Mécanique céleste*, par  $u$  l'anomalie excentrique,  $\nu$  l'anomalie vraie,  $nt$  l'anomalie moyenne d'une planète; par  $r$  le rayon vecteur,  $a$  le demi-grand axe, et  $e$  l'excentricité de son orbite, on a

$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos u,$$

$$nt = u - e \sin u,$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} \nu = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tang} \frac{1}{2} u;$$

d'où l'on déduit, par le développement en séries, à l'aide du théorème de Lagrange,

$$(1) \quad u - nt = A_1 \sin nt + A_2 \sin 2nt + \dots + A_i \sin int + \dots,$$

$$(2) \quad \frac{r}{a} = B_0 + B_1 \cos nt + B_2 \cos 2nt + \dots + B_i \cos int + \dots,$$

$$(3) \quad \nu - nt = C_1 \sin nt + C_2 \sin 2nt + \dots + C_i \sin int + \dots$$

On sait que les coefficients des sinus et cosinus des arcs multiples de l'anomalie moyenne peuvent être exprimés par des intégrales définies, de telle manière que

$$(4) \quad A_i = \frac{2}{i\pi} \int_0^\pi \cos i(u - e \sin u) du,$$

$$(5) \quad B_i = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (1 - e \cos u)^2 \cos i(u - e \sin u) du,$$

$$(6) \quad C_i = \frac{2\sqrt{1-e^2}}{i\pi} \int_0^\pi \frac{\cos i(u - e \sin u)}{1 - e \cos u} du,$$

$i$  étant un nombre entier et positif.

On a, d'ailleurs,

$$B_0 = 1 + \frac{1}{2} e^2.$$

La détermination de ces intégrales définies a fait l'objet de deux Mémoires insérés par Poisson dans les Additions à la *Connaissance des Temps* pour 1825 et pour 1836. Le second Mémoire seul contient une méthode explicite pour la détermination numérique de ces intégrales.

Poisson a fait dépendre les valeurs de  $B_i$  et de  $C_i$  de celle de  $A_i$  et de ses dérivées relatives à  $e$ .

L'expression de  $B_i$  est fort simple : en effet, en différentiant  $A_i$  par rapport à  $e$ , et comparant le résultat à  $B_i$ , on trouve

$$B_i = -\frac{e}{i} \frac{dA_i}{de} [*].$$

L'expression de  $C_i$  est, au contraire, tellement compliquée que, tout en indiquant la manière de la composer, Poisson a dû renoncer à l'écrire. Elle ne permet pas, d'ailleurs, de saisir la loi de formation des nombres, ce qui est, si je ne me trompe, le véritable but de semblables recherches, aujourd'hui que la détermination numérique des coefficients a été poussée aussi loin au moins que le comportent les applications astronomiques.

Quant à l'intégrale  $A_i$ , Poisson la résout à l'aide de deux autres intégrales définies, dont il avait donné la solution dans un Mémoire considérable imprimé au XIX<sup>e</sup> cahier du *Journal de l'École Polytechnique*.

M. Bessel s'était occupé du même objet bien avant Poisson. Les

[\*] C'est par une erreur d'impression que le facteur  $\frac{1}{i}$  a été omis dans la formule (6) du Mémoire cité. (Additions à la *Connaissance des Temps* pour 1836, page 6.)

recherches de ce savant remontent, en effet, à 1816 : elles ont été publiées dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin*.

Dans son important Mémoire de 1824, M. Bessel, s'appuyant sur ses travaux antérieurs, détermine un assez grand nombre d'intégrales définies qui se rattachent à la théorie des perturbations planétaires, et il donne, entre autres, la solution de trois intégrales qui peuvent être facilement ramenées à celles que nous avons désignées par  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ .

L'expression trouvée par M. Bessel pour  $C_i$  n'est pas explicitement développée suivant les puissances ascendantes de l'excentricité, et elle ne fait pas connaître, plus que celle de Poisson, la loi de formation des coefficients numériques de ces diverses puissances, loi qui est très-apparente dans les séries relatives à  $A_i$  et  $B_i$  [\*].

Après avoir attentivement examiné ces publications, dont j'ai dû la connaissance à deux savants qui m'honorent d'une bienveillante amitié, j'ai pensé que les géomètres ne verraient peut-être pas sans intérêt la solution à laquelle j'ai été conduit par des études sur le même sujet.

L'équation (6) peut être présentée sous une autre forme. En effet, en retranchant l'équation (1) de l'équation (3), multipliant les deux membres par  $\sin int d.nt$ , et intégrant entre les limites 0 et  $\pi$ , on trouve

$$C_i = A_i + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\nu - u) \sin int d.nt;$$

mais si l'on pose

$$\lambda = \frac{e}{1 + \sqrt{1 - e^2}},$$

on a

$$\nu - u = \frac{2\lambda}{1} \sin u + \frac{2\lambda^2}{2} \sin 2u + \dots + \frac{2\lambda^m}{m} \sin mu + \dots = \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{2\lambda^m}{m} \sin mu.$$

On aura donc, en substituant à  $\nu - u$  sa valeur, intégrant par parties,

[\*] Je n'ai aucunement la prétention d'avoir analysé dans cet exposé rapide les savantes recherches de M. Bessel : je n'avais à considérer ici son Mémoire qu'au point de vue des trois intégrales dont je présente une solution.

et ayant égard aux limites,

$$C_i = A_i + \frac{2}{i\pi} \sum_{m=1}^{m=\infty} 2\lambda^m \int_0^\pi \cos i(u - e \sin u) \cos mu \, du.$$

Ainsi les déterminations de  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  sont ramenées à la seule intégrale

$$\int_0^\pi \cos i(u - e \sin u) \cos mu \, du,$$

puisqu'en faisant  $m = 0$  on retombe sur l'intégrale relative à  $A_i$ , et que  $B_i$  se déduit de  $A_i$  par une simple dérivation par rapport à  $e$ .

Pour résoudre cette intégrale, nous remarquerons que

$$\begin{aligned} \cos i(u - e \sin u) &= \cos (ie \sin u) \cos iu + \sin (ie \sin u) \sin iu, \\ \cos iu \cos mu &= \frac{1}{2} \cos (i + m)u + \frac{1}{2} \cos (i - m)u, \\ \sin iu \cos mu &= \frac{1}{2} \sin (i + m)u + \frac{1}{2} \sin (i - m)u, \end{aligned}$$

en sorte que

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi \cos i(u - e \sin u) \cos mu \, du \\ &= \frac{1}{2} \left[ \int_0^\pi \cos (ie \sin u) \cos (i + m)u \, du + \int_0^\pi \sin (ie \sin u) \sin (i + m)u \, du \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left[ \int_0^\pi \cos (ie \sin u) \cos (i - m)u \, du + \int_0^\pi \sin (ie \sin u) \sin (i - m)u \, du \right]. \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} \cos (i - m)u &= \cos (m - i)u, \\ \sin (i - m)u &= -(\sin m - i)u. \end{aligned}$$

Ainsi le problème est ramené à la détermination de

$$\int_0^\pi \cos (ie \sin u) \cos xu \, du \pm \int_0^\pi \sin (ie \sin u) \sin xu \, du,$$

$x$  étant un nombre entier et positif de la forme  $2y$  ou  $2y + 1$ .

Par des formules connues,

$$\cos (ie \sin u) = 1 + \sum_{r=1}^{r=\infty} (-1)^r \frac{i^{2r} e^{2r}}{1 \cdot 2 \dots 2r} \sin^{2r} u,$$

$$\sin (ie \sin u) = \sum_{r=0}^{r=\infty} (-1)^r \frac{i^{2r+1} e^{2r+1}}{1 \cdot 2 \dots (2r+1)} \sin^{2r+1} u,$$

$$\sin^{2r} u = \frac{(-1)^r}{2^{2r-1}} \left\{ \begin{aligned} & \cos 2ru + \sum_{n=1}^{n=r-1} (-1)^n \frac{2r(2r-1) \dots (2r-n+1)}{1 \cdot 2 \dots n} \cos 2(r-n)u \\ & + \frac{(-1)^r 2r(2r-1) \dots (r+1)}{2 \cdot 1 \cdot 2 \dots r} \end{aligned} \right\},$$

$$\sin^{2r+1} u = \frac{(-1)^r}{2^{2r}} \left[ \sin (2r+1)u + \sum_{n=1}^{n=r} (-1)^n \frac{(2r+1)2r \dots (2r-n+2)}{1 \cdot 2 \dots n} \sin (2r+1-2n)u \right].$$

Si nous posons, pour abrégér,

$$A = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{1}{2^{2r-1}} \frac{i^{2r} e^{2r}}{1 \cdot 2 \dots 2r},$$

$$B = \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{1}{2^{2r}} \frac{i^{2r+1} e^{2r+1}}{1 \cdot 2 \dots (2r+1)},$$

$$C = \sum_{n=1}^{n=r-1} (-1)^n \frac{2r(2r-1) \dots (2r-n+1)}{1 \cdot 2 \dots n},$$

$$D = \sum_{n=1}^{n=r} (-1)^n \frac{(2r+1)2r \dots (2r-n+2)}{1 \cdot 2 \dots n},$$

$$E = \frac{(-1)^r 2r(2r-1) \dots (r+1)}{2 \cdot 1 \cdot 2 \dots r},$$

nous aurons

$$\cos (ie \sin u) = 1 + A [\cos 2ru + C \cos 2(r-n)u + E],$$

$$\sin (ie \sin u) = B [\sin (2r+1)u + D \sin (2r+1-2n)u],$$

et l'on voit immédiatement que

$$\int_0^\pi \cos (ie \sin u) \cos (2\gamma + 1) u \, du = 0,$$

$$\int_0^\pi \sin (ie \sin u) \sin 2\gamma u \, du = 0.$$

Il suffit donc de trouver

$$\int_0^\pi \cos (ie \sin u) \cos 2\gamma u \, du,$$

et

$$\int_0^\pi \sin (ie \sin u) \sin (2\gamma + 1) u \, du.$$

Or

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \cos (ie \sin u) \cos 2\gamma u \, du = \int_0^\pi \cos 2\gamma u \, du \\ & + A \int_0^\pi \cos 2ru \cos 2\gamma u \, du + AC \int_0^\pi \cos 2(r - n)u \cos 2\gamma u \, du \\ & + AE \int_0^\pi \cos 2\gamma u \, du; \end{aligned}$$

mais

$$\int_0^\pi \cos 2\gamma u \, du = 0,$$

puisque, par hypothèse,  $\gamma$  n'est pas nul; la seconde intégrale n'a de valeur que pour  $\gamma = r$ , elle est alors égale à  $\frac{\pi}{2}$ , et A se réduit à

$$\frac{1}{2^{2\gamma-1}} \frac{i^\gamma e^\gamma}{1 \cdot 2 \dots 2\gamma};$$

la troisième intégrale n'a de valeur que pour  $r - n = \gamma$ , puisque  $n < r$ : sa valeur est alors  $\frac{\pi}{2}$ , et AC devient

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2\gamma+2n-1}} \frac{i^{\gamma+2n} e^{2\gamma+2n}}{1 \cdot 2 \dots (2\gamma+2n)} \frac{(2\gamma+2n)(2\gamma+2n-1) \dots (2\gamma+n+1)}{1 \cdot 2 \dots n};$$

on a donc

$$\int_0^\pi \cos(ie \sin u) \cos 2yu \, du$$

$$= \pi \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{2y}}{1 \cdot 2 \dots 2y} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{2n}}{1 \cdot 2 \dots n(2y+1) \dots (2y+n)} \right].$$

On trouve de la même manière

$$\int_0^\pi \sin(ie \sin u) \sin (2y+1)u \, du$$

$$= \pi \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{2y+1}}{1 \cdot 2 \dots (2y+1)} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{2n}}{1 \cdot 2 \dots n(2y+2) \dots (2y+n+1)} \right].$$

Ainsi,  $x$  étant un nombre entier et positif, on a généralement

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_0^\pi \cos(ie \sin u) \cos xu \, du + \int_0^\pi \sin(ie \sin u) \sin xu \, du \\ & = \pi \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^x}{1 \cdot 2 \dots x} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{2n}}{1 \cdot 2 \dots n(x+1) \dots (x+n)} \right], \end{aligned} \right.$$

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_0^\pi \cos(ie \sin u) \cos xu \, du - \int_0^\pi \sin(ie \sin u) \sin xu \, du \\ & = \pi \frac{\left(\frac{-ie}{2}\right)^x}{1 \cdot 2 \dots x} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{2n}}{1 \cdot 2 \dots n(x+1) \dots (x+n)} \right]. \end{aligned} \right.$$

Quand les facteurs  $\cos xu$  et  $\sin xu$  sont remplacés par l'unité, on a simplement

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_0^\pi \cos(ie \sin u) \, du \pm \int_0^\pi \sin(ie \sin u) \, du \\ & = \pi \left[ 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{2n}}{(1 \cdot 2 \dots n)^2} \right]. \end{aligned} \right.$$

Les intégrales définies données par les formules (7), (8) et (9) condui-

sent immédiatement aux valeurs de  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ ; en effet,

$$(10) \left\{ \begin{aligned} A_i &= \frac{2}{i\pi} \int_0^\pi \cos i(u - e \sin u) du \\ &= \frac{2}{i\pi} \left[ \int_0^\pi \cos (ie \sin u) \cos iu du + \int_0^\pi \sin (ie \sin u) \sin iu du \right] \\ &= \frac{2}{i} \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^i}{1 \cdot 2 \dots i} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{2n}}{1 \cdot 2 \dots n(i+1) \dots (i+n)} \right], \end{aligned} \right.$$

$$(11) \left\{ \begin{aligned} B_i &= -\frac{e}{i} \frac{dA_i}{de} \\ &= -\frac{2}{i} \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^i}{1 \cdot 2 \dots i} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \frac{(i+2n) \left(\frac{ie}{2}\right)^{2n}}{1 \cdot 2 \dots n(i+1) \dots (i+n)} \right], \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} C_i &= A_i + \frac{2}{i\pi} \sum_{m=1}^{m=\infty} 2\lambda^m \int_0^\pi \cos i(u - e \sin u) \cos mu du \\ &= A_i + \frac{2}{i\pi} \sum_{m=1}^{m=\infty} \lambda^m \left\{ \int_0^\pi \cos (ie \sin u) \cos (i+m)u du \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\pi \sin (ie \sin u) \sin (i+m)u du \right\} \\ &\quad + \frac{2}{i\pi} \sum_{m=1}^{m=i-1} \lambda^m \left\{ \int_0^\pi \cos (ie \sin u) \cos (i-m)u du \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\pi \sin (ie \sin u) \sin (i-m)u du \right\} \\ &\quad + \frac{2}{i\pi} \lambda^i \left[ \int_0^\pi \cos (ie \sin u) du + \int_0^\pi \sin (ie \sin u) du \right] \\ &\quad + \frac{2}{i\pi} \sum_{m=i+1}^{m=\infty} \lambda^m \left\{ \int_0^\pi \cos (ie \sin u) \cos (m-i)u du \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\pi \sin (ie \sin u) \sin (m-i)u du \right\}; \end{aligned}$$

substituant à  $A_i$  et aux intégrales définies leurs valeurs déjà trouvées,

et réduisant par la considération des limites relatives aux sommes  $\Sigma$ ,

$$C_i = \frac{2}{i} \sum_{m=0}^{i-1} \lambda^m \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{i+m}}{1.2\dots(i+m)} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{2n}}{1.2\dots n(i+m+1)\dots(i+m+n)} \right] \\ + \frac{2}{i} \sum_{m=i}^{\infty} \lambda^m \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{i-m} (i-m+1)}{1.2\dots(i-m+1)} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{2n}}{1.2\dots n(i-m+1)\dots(i-m+n)} \right] \\ + \frac{2}{i} \sum_{m-i=1}^{m-i=\infty} (-1)^{m-i} \lambda^m \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{m-i}}{1.2\dots(m-i)} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{2n}}{1.2\dots n(m-i+1)\dots(m-i+n)} \right].$$

Pour obtenir  $C_i$  en série ordonnée suivant les puissances croissantes de  $e$ , il faut développer  $\lambda^m$  et effectuer le produit du développement par les seconds facteurs. Or

$$\lambda^m = \left(\frac{e}{2}\right)^m \left[ 1 + \frac{m}{1} \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \frac{m(m+3)}{1.2} \left(\frac{e}{2}\right)^4 + \dots + \frac{m(m+n+1)\dots(m+2n-1)}{1.2\dots n} \left(\frac{e}{2}\right)^{2n} + \dots \right] \\ = \left(\frac{e}{2}\right)^m \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m+n+1)\dots(m+2n-1)}{1.2\dots n} \left(\frac{e}{2}\right)^{2n} \right].$$

Si l'on remarque que

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots) (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n + \dots) \\ = a_0 b_0 + (b_0 a_1 + a_0 b_1) x + (b_0 a_2 + a_1 b_1 + b_2 a_0) x^2 + \dots \\ + (b_0 a_n + a_{n-1} b_1 + b_2 a_{n-2} + \dots + b_{n-1} a_1 + a_0 b_n) x^n + \dots,$$

on en déduira

$$\left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m+n+1)\dots(m+2n-1)}{1.2\dots n} \left(\frac{e}{2}\right)^{2n} \right] \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{2n}}{1.2\dots n(i+m+1)\dots(i+m+n)} \right] \\ = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{e}{2}\right)^{2n} \left\{ \frac{i^{2n}}{1.2\dots n(i+m+1)\dots(i+m+n)} + \frac{i^{2(n-1)}}{1.2\dots(n-1)(i+m+1)\dots(i+m+n-1)} \frac{m}{1} + \dots \right. \\ \left. + (-1)^\alpha \frac{i^{2(n-\alpha)}}{1.2\dots(n-\alpha)(i+m+1)\dots(i+m+n-\alpha)} \frac{m(m+\alpha+1)\dots(m+2\alpha-1)}{1.2\dots\alpha} + \dots \right. \\ \left. + (-1)^n \frac{m(m+n+1)\dots(m+2n-1)}{1.2\dots n} \right\},$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}
 C_i &= \frac{2}{i} \left(\frac{e}{2}\right)^i \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{i^{i+m} \left(\frac{e}{2}\right)^{2m}}{1 \cdot 2 \dots (i+m)} \\
 &\times \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \left(\frac{e}{2}\right)^{2n} \left[ \frac{i^{2n}}{1 \cdot 2 \dots n (i+m+1) \dots (i+m+n)} + \dots \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (-1)^\alpha \frac{i^{2(n-\alpha)}}{1 \cdot 2 \dots (n-\alpha) (i+m+1) \dots (i+m+n-\alpha)} \frac{m(m+\alpha+1) \dots (m+2\alpha-1)}{1 \cdot 2 \dots \alpha} + \dots \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (-1)^n \frac{m(m+n+1) \dots (m+2n-1)}{1 \cdot 2 \dots n} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{2}{i} \left(\frac{e}{2}\right)^i \sum_{m=1}^{m=i} \frac{i^{i-m} (i-m+1)}{1 \cdot 2 \dots (i-m+1)} \right. \right. \\
 (12) &\times \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \left(\frac{e}{2}\right)^{2n} \left[ \frac{i^{2n}}{1 \cdot 2 \dots n (i-m+1) \dots (i-m+n)} + \dots \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (-1)^\alpha \frac{i^{2(n-\alpha)}}{1 \cdot 2 \dots (n-\alpha) (i-m+1) \dots (i-m+n-\alpha)} \frac{m(m+\alpha+1) \dots (m+2\alpha-1)}{1 \cdot 2 \dots \alpha} + \dots \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (-1)^n \frac{m(m+n+1) \dots (m+2n-1)}{1 \cdot 2 \dots n} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{2}{i} \left(\frac{e}{2}\right)^i \sum_{m-i=1}^{m-i=\infty} (-1)^{m-i} \frac{i^{m-i} \left(\frac{e}{2}\right)^{2(m-i)}}{1 \cdot 2 \dots (m-i)} \right. \right. \\
 &\times \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \left(\frac{e}{2}\right)^{2n} \left[ \frac{i^{2n}}{1 \cdot 2 \dots n (m-i+1) \dots (m-i+n)} + \dots \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (-1)^\alpha \frac{i^{2(n-\alpha)}}{1 \cdot 2 \dots (n-\alpha) (m-i+1) \dots (m-i+n-\alpha)} \frac{m(m+\alpha+1) \dots (m+2\alpha-1)}{1 \cdot 2 \dots \alpha} + \dots \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (-1)^n \frac{m(m+n+1) \dots (m+2n-1)}{1 \cdot 2 \dots n} \right. \right.
 \end{aligned}$$

Cette expression est compliquée, sans aucun doute, mais elle présente dans ses termes une loi de formation facile à saisir.

En calculant jusqu'à la neuvième puissance de  $e$  à l'aide de cette formule, on trouve

$$C_i = 2e - \frac{1}{4} e^3 + \frac{5}{96} e^5 + \frac{107}{4608} e^7 + \frac{6217}{368640} e^9 + \dots$$

On peut parvenir à l'expression de  $C_i$ , donnée ci-dessus, en partant de la formule (6) adoptée par MM. Bessel et Poisson. Il suffit de déve-

lopper  $\frac{1}{1-e\cos u}$  en série croissante suivant les cosinus des multiples de  $u$ . On trouve facilement, par la méthode des coefficients indéterminés :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-e\cos u} &= \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} (1 + 2\lambda \cos u + 2\lambda^2 \cos 2u + \dots + 2\lambda^m \cos mu + \dots) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left( 1 + \sum_{m=1}^{m=\infty} 2\lambda^m \cos mu \right),\end{aligned}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}C_i &= \frac{2}{i\pi} \int_0^\pi \cos i(u - e \sin u) du + \frac{2}{i\pi} \sum_{m=1}^{m=\infty} 2\lambda^m \int_0^\pi \cos i(u - e \sin u) \cos mu du \\ &= A_i + \frac{2}{i\pi} \sum_{m=1}^{m=\infty} 2\lambda^m \int_0^\pi \cos i(u - e \sin u) \cos mu du,\end{aligned}$$

c'est-à-dire l'expression fondamentale à laquelle je suis arrivé par une autre méthode qui me paraît plus élégante et plus directe.

