JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J.-A. SERRET

Théorie géométrique de la lemniscate et des courbes elliptiques de la première classe

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 11 (1846), p. 89-95.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1846_1_11__89_0>

THÉORIE GÉOMÉTRIQUE

DE LA LEMNISCATE ET DES COURBES ELLIPTIQUES

DE LA PREMIÈRE CLASSE;

Par M. J.-A. SERRET.

I.

Une étude plus approfondie des résultats que j'ai publiés dans le tome précédent de ce Recueil, m'a conduit à deux propriétés géométriques remarquables, communes à toutes les courbes elliptiques de la première classe, et qui fournissent, pour ces courbes, un mode uniforme de génération d'une extrême élégance.

Ces propriétés peuvent servir à définir les courbes elliptiques de la première classe, dont la théorie deviendra, dès lors, entièrement indépendante des considérations analytiques qui me les ont fait découvrir.

A ce nouveau point de vue, où je me place, je commence par démontrer, pour la lemniscate, les deux propriétés dont je viens de parler, et la généralisation, comme on le verra, se présentera d'elle-même.

Théorème I. *Soit r le rayon vecteur issu de l'un des foyers d'une lemniscate, dont la demi-distance focale est prise pour unité, et dont le demi-axe sera, dès lors, $\sqrt{2}$; on pourra toujours construire un triangle dont les côtés seront respectivement r, 1 et $\sqrt{2}$, car le rayon vecteur ne varie qu'entre les limites $\sqrt{2}-1$ et $\sqrt{2}+1$: cela posé, si α désigne l'angle de ce triangle opposé au côté $\sqrt{2}$, et β celui qui est* *opposé au côté* 1, *l'angle polaire* θ, *que forme le rayon vecteur de la lemniscate avec l'axe, sera toujours donné par l'équation*

$$\cos\theta = \cos(\alpha - 2\beta).$$

Remarque [*]. Soient O l'origine, c'est-à-dire l'un des foyers de la lemniscate, et OM un rayon vecteur quelconque; construisons le triangle OMP, de telle sorte que

$$\mathrm{OP} = 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{MP} = \sqrt{2}$$

(ce triangle peut être fait d'un côté ou de l'autre de OM, cela importe peu en ce moment), puis imaginons que le point M décrive d'un mouvement continu la lemniscate entière; le point P, qu'on peut toujours supposer se mouvoir d'un mouvement continu, décrira deux fois la circonférence tracée de l'origine comme centre, avec l'unité comme rayon.

Corollaire. Du théorème précédent, qu'on démontre bien aisément, on déduit la génération suivante de la lemniscate :

Soit OMP *un triangle dont le sommet* O *est fixe, et dont les côtés mobiles* OP *et* MP *sont constamment égaux, l'un à* 1, *l'autre à* $\sqrt{2}$; *si l'on fait varier ce triangle, de telle sorte que le cosinus de l'angle formé par le côté variable* OM *avec une droite fixe, soit constamment égal au cosinus de l'angle* MOP $-$ 2 OMP, *le point* M *engendrera une lemniscate dont* O *sera un foyer et la droite fixe l'axe.*

Théorème II. *Soit, comme précédemment,* OM *un rayon vecteur de la lemniscate, et construisons le triangle* OMP, *de part et d'autre de* OM, *la tangente en* M *à la lemniscate passera constamment par le centre du cercle circonscrit à l'un de ces triangles; si, en outre, on considère spécialement celui de ces triangles pour lequel cette propriété a lieu, et qu'en vertu du théorème* I, *on le fasse servir à la description de la lemniscate par un mouvement continu, cette propriété se conservera pour toutes les positions de ce triangle.*

---

[*] Le lecteur est prié de faire lui-même les figures.

Remarque. Ce théorème donne un moyen très-simple de construire la tangente en un point de la courbe, car il suffira de construire le triangle correspondant à ce point, et de le joindre au centre du cercle circonscrit au triangle; mais il conduit aussi à un nouveau mode de génération pour la lemniscate.

Théorème III. *Soit* OMP *un triangle dont le sommet* O *est fixe, et dont les côtés mobiles* OP *et* MP *sont constamment égaux, l'un à* 1, *l'autre à* $\sqrt{2}$, *le sommet* M *décrira une lemniscate dont* O *sera un foyer, si son déplacement infiniment petit* MM′ *a constamment lieu suivant le rayon* CM *du cercle circonscrit au triangle* OMP.

Remarque. Le triangle dont nous venons de parler joue, comme on le voit, un rôle assez important dans la théorie de la lemniscate; aussi je ne crois pas inutile de mentionner une dernière propriété qui consiste en ce que l'aire de ce triangle et l'aire du secteur de la courbe ont la même différentielle.

II.

La généralisation des propriétés précédentes conduit immédiatement à la théorie complète des courbes elliptiques de la première classe.

Soit n un nombre entier, ou fractionnaire, ou même incommensurable, et construisons le triangle OMP *tel que*

$$\mathrm{OP} = \sqrt{n} \quad \text{et} \quad \mathrm{MP} = \sqrt{n+1},$$

puis imaginons que, le sommet O *restant fixe, le triangle varie de telle sorte que le cosinus de l'angle θ formé par le seul côté variable* OM *avec une droite fixe, soit constamment égal au cosinus de l'angle*

$$n.\mathrm{MOP} - (n+1)\,\mathrm{OMP},$$

le point M *engendrera une courbe (algébrique si n est commensurable) dont l'arc sera une fonction elliptique du rayon vecteur, réductible au module* $\sqrt{\frac{n}{n+1}}$, *et les courbes ainsi engendrées ne sont autres que* *celles que j'ai désignées sous le nom de courbes elliptiques de la première classe.*

Soient, en effet, MOP $= \alpha$, OMP $= \beta$; l'équation de la courbe résultera de l'élimination de α et β entre

$$\cos\theta = \cos[n\alpha - (n+1)\beta],$$

$$\cos\alpha = \frac{r^2-1}{2r\sqrt{n}},$$

$$\cos\beta = \frac{r^2+1}{2r\sqrt{n+1}}.$$

De ces deux dernières on déduit

$$\sin\alpha = \frac{\Delta}{2r\sqrt{n}},$$

$$\sin\beta = \frac{\Delta}{2r\sqrt{n+1}},$$

en faisant, pour abréger,

$$\Delta = \sqrt{-r^4 + 2(2n+1)r^2 - 1}.$$

Cela posé, on trouve, par la différentiation,

$$\pm d\theta = nd\alpha - (n+1)d\beta,$$

$$d\alpha = -\frac{r^2+1}{\Delta}\frac{dr}{r},$$

$$d\beta = -\frac{r^2-1}{\Delta}\frac{dr}{r};$$

d'où

$$\pm d\theta = \frac{r^2-(2n+1)}{\Delta}\frac{dr}{r},$$

et, par suite, on aura, pour la différentielle de l'arc,

$$\pm ds = 2\sqrt{n(n+1)}\frac{dr}{\Delta}.$$

Des équations précédentes on déduit encore les formules suivantes, qu'il convient de remarquer :

$$\mp ds = \sqrt{n}\,\frac{d\alpha}{\cos\beta}.$$

$$\mp ds = \sqrt{n+1}\,\frac{d\beta}{\cos\alpha}.$$

On a d'ailleurs, en posant $k = \sqrt{\frac{n}{n+1}}$,

$$\sin\beta = k\sin\alpha,$$

d'où

$$\cos\beta = \sqrt{1 - k^2\sin^2\alpha};$$

donc, en supposant que l'arc croisse en même temps que α,

$$ds = \sqrt{n}\,\frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}},$$

et l'arc, compté à partir du point de l'axe polaire qui correspond à $\alpha = 0$, ou $r = \sqrt{n+1} \pm \sqrt{n}$, sera exprimé par l'intégrale elliptique de module k et d'amplitude α,

$$\sqrt{n}\int_0^{\alpha}\frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}.$$

ce qu'il s'agissait de démontrer.

On voit aisément que, dans le cas de $n = 1$, la courbe dont nous parlons se confond avec la lemniscate de Bernoulli, et l'on a ainsi la démonstration du théorème I du § I.

L'aire du triangle générateur OMP est $\frac{\Delta}{4}$, et l'on trouve, d'ailleurs, aisément

$$\int \tfrac{1}{2} r^2\, d\theta = \frac{\Delta}{4} + \text{constante},$$

d'où l'on conclut que l'aire du secteur de courbe, comptée à partir de l'axe polaire, est toujours égale à l'aire du triangle générateur.

Je passe maintenant à l'examen de la seconde propriété de ces courbes remarquables. On a, dans le triangle OMP,

$$r^2 = 2n + 1 + 2\sqrt{n(n+1)}\cos(\alpha + \beta),$$

d'où

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{r^2 - (2n+1)}{2\sqrt{n(n+1)}} = \pm \frac{r\,d\theta}{ds},$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{\Delta}{2\sqrt{n(n+1)}} = \pm \frac{dr}{ds},$$

d'où l'on conclut que l'inclinaison de la normale sur le rayon vecteur est précisément égale à $\alpha + \beta$, ou à son supplément; si donc on fait au point M un angle PMN = MOP, en supposant d'abord le premier cas, MN sera la normale au point M de la courbe, lequel correspond à la position OMP du triangle générateur; d'ailleurs le point O se trouve nécessairement sur le segment capable de l'angle PMN, que l'on décrirait sur MP, ce qui montre que MN est tangente au cercle circonscrit au triangle générateur, et si C est le centre du cercle circonscrit, le rayon MC sera précisément la tangente à la courbe. Il est d'ailleurs évident que, quand le triangle décrira la courbe d'un mouvement continu, cette propriété se conservera pour toutes les positions de ce triangle.

On pouvait supposer que l'inclinaison de la normale sur le rayon vecteur fût égale au supplément de $\alpha + \beta$; dans ce cas, on ferait tourner le triangle OMP autour de OM, on aurait un second triangle, qu'on pourrait substituer au premier, sans inconvénient, pour engendrer la courbe, et la propriété précédente serait alors relative à ce nouveau triangle.

De ce qui précède résulte le mode de génération suivant pour les courbes elliptiques :

Si le triangle OMP *varie de telle manière que le sommet* O *reste fixe, et que les côtés mobiles* OP *et* MP, *soient constamment égaux, le premier à* $\sqrt{n}$, *le second à* $\sqrt{n+1}$, *et que, de plus, le déplacement infiniment petit* MM′ *du point* M *ait lieu à chaque instant suivant la droite qui joint ce point au centre du cercle circonscrit au triangle générateur, le point* M *engendrera la courbe elliptique qui correspond au nombre* n.

On a ainsi, en particulier, la démonstration des théorèmes II et III du § I, lesquels sont relatifs seulement à la lemniscate.

On obtient aisément l'expression du rayon de courbure. Soit ε l'angle que fait la normale avec l'axe polaire, on aura

$$\varepsilon = \theta - (\alpha + \beta),$$

car $(\alpha + \beta)$ est l'angle de la normale avec le rayon vecteur; on a, en différentiant, l'angle de contingence $d\varepsilon$,

$$d\varepsilon = d\theta - d\alpha - d\beta = \frac{3r^2 - (2n+1)}{\Delta}\frac{dr}{r},$$

et, pour le rayon de courbure,

$$\frac{ds}{d\varepsilon} = \mathrm{R} = \frac{2r\sqrt{n(n+1)}}{3r^2 - (2n+1)}.$$