JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J.-A. SERRET

# Note sur les courbes elliptiques de la première classe

*Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série*, tome 10 (1845), p. 421-429.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1845_1_10__421_0>

# NOTE

## SUR LES COURBES ELLIPTIQUES DE LA PREMIÈRE CLASSE;

PAR J.-A. SERRET.

### I.

Dans les deux Mémoires que j'ai publiés récemment dans ce Recueil, j'ai démontré l'existence d'une infinité de classes de courbes algébriques, dont les arcs sont identiques aux fonctions elliptiques de première espèce, qui les représentent; chaque classe renferme elle-même une infinité de courbes, et M. Liouville a depuis étendu mes résultats, en montrant qu'on pouvait supposer fractionnaire l'un des paramètres qui entrent dans l'équation générale de ces courbes, et que mon analyse supposait nécessairement entier. Les courbes de la première classe comprennent la lemniscate, et méritent pour cette raison d'être étudiées avec soin; il ne sera donc pas inutile de donner ici quelques développements relatifs seulement aux courbes de cette classe.

### II.

On a, comme on sait, pour les courbes de la première classe,

$$(1)\quad \begin{cases} x + iy = Ce^{\omega i}\dfrac{(z+a)^{n+1}}{(z-\alpha)(z+\alpha)^n}, \\ x - iy = Ce^{-\omega i}\dfrac{(z+\alpha)^{n+1}}{(z-a)(z+a)^n}, \end{cases}$$

où $i$ désigne l'imaginaire $\sqrt{-1}$, C et $\omega$ des constantes réelles quelconques, $n$ un nombre entier ou fractionnaire, $a$ et $\alpha$ des constantes imaginaires conjuguées, satisfaisant à la condition

$$(2)\quad \frac{(a+\alpha)^2}{4a\alpha} = \frac{n}{n+1};$$

on aura, en outre, en différentiant les équations (1) et ayant égard à la relation (2),

$$(3)\quad \begin{cases} dx+idy = \mathrm{C}e^{\omega i}\left[-(a+\alpha)-n(a-\alpha)\right]\dfrac{(z-a)(z+a)^n\,dz}{(z-\alpha)^2(z+\alpha)^{n+1}}, \\ dx-idy = \mathrm{C}e^{-\omega i}\left[-(a+\alpha)+n(a-\alpha)\right]\dfrac{(z-\alpha)(z+\alpha)^n\,dz}{(z-a)^2(z+a)^{n+1}}. \end{cases}$$

Cela posé, si $r$ désigne le rayon vecteur $\sqrt{x^2+y^2}$, et $ds$ la différentielle de l'arc $\sqrt{dx^2+dy^2}$, on aura, en vertu des équations (1), (2), (3),

$$(4)\qquad r^2 = \mathrm{C}^2\frac{(z+a)(z+\alpha)}{(z-a)(z-\alpha)},$$

$$(5)\qquad ds = 2\mathrm{C}\sqrt{na\alpha}\,\frac{dz}{\sqrt{(z+a)(z+\alpha)(z-a)(z-\alpha)}}.$$

## III.

Rien n'est plus facile que d'avoir l'équation en $r$ et $s$ des courbes dont nous nous occupons; si l'on élimine $z$ et $dz$ entre les équations (5), (4), et l'équation qu'on obtient en différentiant (4), on trouve très-aisément, en prenant pour unité le paramètre C,

$$(6)\qquad ds = 2\sqrt{n(n+1)}\,\frac{dr}{\sqrt{-r^4+2(2n+1)r^2-1}},$$

ce qui donne ce théorème remarquable: *L'arc des courbes de première classe est une fonction elliptique du rayon vecteur.*

Si $\theta$ désigne la seconde coordonnée polaire, on aura pour l'équation différentielle de ces courbes,

$$\sqrt{dr^2+r^2\,d\theta^2} = 2\sqrt{n(n+1)}\,\frac{dr}{\sqrt{-r^4+2(2n+1)r^2-1}},$$

ou

$$(7)\qquad d\theta = \frac{r^2-(2n+1)}{\sqrt{-r^4+2(2n+1)r^2-1}}\,\frac{dr}{r};$$

on tire de là

$$\tfrac{1}{2}r^2\,d\theta = \tfrac{1}{4}\,\frac{r^2-(2n+1)}{\sqrt{-r^4+2(2n+1)r^2-1}}\,d(r^2),$$

d'où

$$\int \tfrac{1}{2} r^2\, d\theta = -\tfrac{1}{4}\sqrt{-r^4 + 2(2n+1)r^2 - 1} + \text{constante},$$

ce qui montre que *les courbes de la première classe sont toutes carrables comme la lemniscate.*

L'équation (7) fait connaître $\dfrac{r}{\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)}$ en fonction de $r$; on en déduit aisément, par la différentiation, la valeur du rayon de courbure qui est simplement

$$R = \frac{2r\sqrt{n(n+1)}}{3r^2 - (2n+1)}.$$

Dans le cas de $n = 1$, qui est précisément le cas de la lemniscate, on a

$$ds = 2\sqrt{2}\,\frac{dr}{\sqrt{-r^4 + 6r^2 - 1}};$$

$r$ désigne ici le rayon vecteur issu de l'un des foyers: on sait que si $r'$ désigne le rayon vecteur mené du centre, on a plus simplement

$$ds = \frac{dr'}{\sqrt{1 - r'^4}},$$

mais ces deux formes se déduisent aisément l'une de l'autre par les transformations connues.

## IV.

On obtiendrait facilement l'équation sous forme finie de nos courbes, en éliminant $z$ entre l'équation (4) et l'une des équations (1); mais il est, je crois, encore plus simple de la déduire de l'équation (7) par l'intégration.

On a

$$d\theta = \frac{r\,dr}{\sqrt{-r^4 + 2(2n+1)r^2 - 1}} - (2n+1)\frac{\dfrac{dr}{r}}{\sqrt{-r^4 + 2(2n+1)r^2 - 1}},$$

où l'on doit avoir soin de prendre partout le radical avec le même signe; il est clair que pour que le radical soit réel, il faut que $r^2$ et $\frac{1}{r^2}$ soient compris entre

$$2n+1-2\sqrt{n(n+1)} \quad \text{et} \quad 2n+1+2\sqrt{n(n+1)};$$

on pourra donc poser

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} r^2 &= 2n+1+2\sqrt{n(n+1)}\cos 2\lambda, \\ \frac{1}{r^2} &= 2n+1+2\sqrt{n(n+1)}\cos 2\mu, \end{aligned} \right.$$

$\lambda$ et $\mu$ désignant deux angles qu'on pourra évidemment ne faire varier que de $0$ à $\frac{\pi}{2}$, et dont, par suite, toutes les lignes trigonométriques seront positives; d'après cela, on trouve

$$\frac{r\,dr}{\sqrt{-r^4+2(2n+1)r^2-1}} = -d\lambda,$$

$$\frac{\frac{dr}{r}}{\sqrt{-r^4+2(2n+1)r^2-1}} = d\mu,$$

et l'équation (7) deviendra

$$d\theta = -d\lambda - (2n+1)\,d\mu,$$

d'où, en intégrant et désignant par $\omega$ une constante arbitraire,

$$\theta = \omega - \lambda - (2n+1)\mu.$$

On obtiendra donc l'équation des courbes de première classe en éliminant $\lambda$ et $\mu$ entre cette équation et les équations (8). La constante $\omega$ est analogue à celle que l'on désignait par la même lettre dans les équations (1); nous la supposerons égale à $\frac{\pi}{2}$, et l'on aura

$$e^{i\theta} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\lambda-\mu\right)}e^{-2ni\mu},$$

où

$$(9) \quad \cos\theta + i\sin\theta = [\sin(\lambda+\mu) + i\cos(\lambda+\mu)](\cos 2\mu - i\sin 2\mu)^n.$$

Faisons, pour abréger,

$$\Delta = \sqrt{-r^4+2(2n+1)r^2-1},$$

on aura, en vertu des équations (8),

$$\cos 2\mu = \frac{1-(2n+1)r^2}{2r^2\sqrt{n(n+1)}}, \quad \sin 2\mu = \frac{\Delta}{2r^2\sqrt{n(n+1)}},$$

$$\cos 2\lambda = \frac{r^2-(2n+1)}{2\sqrt{n(n+1)}}, \quad \sin 2\lambda = \frac{\Delta}{2\sqrt{n(n+1)}};$$

d'où

$$\cos 2\mu - i\sin 2\mu = \frac{[1-(2n+1)r^2]-i\Delta}{2r^2\sqrt{n(n+1)}},$$

$$\cos 2\lambda - i\sin 2\lambda = \frac{[r^2-(2n+1)]-i\Delta}{2\sqrt{n(n+1)}},$$

et, par suite,

$$\cos 2(\lambda+\mu) - i\sin 2(\lambda+\mu) = \frac{-(r^2+1)^2+2i(r^2+1)\Delta+\Delta^2}{4(n+1)r^2},$$

d'où, en extrayant la racine carrée, et multipliant ensuite par $i$,

$$\sin(\lambda+\mu) + i\cos(\lambda+\mu) = \frac{(r^2+1)-i\Delta}{2r\sqrt{(n+1)}}.$$

D'après cela, l'équation (9) devient

$$(10)\qquad \cos\theta + i\sin\theta = \frac{[(r^2+1)-i\Delta][1-(2n+1)r^2-i\Delta]^n}{2^{n+1}n^{\frac{n}{2}}(n+1)^{\frac{n+1}{2}}r^{2n+1}},$$

ce qui est l'équation générale de nos courbes en coordonnées polaires; si $x$ et $y$ désignent les coordonnées rectangulaires, on aura

$$x + iy = \frac{[(r^2+1)-i\Delta][1-(2n+1)r^2-i\Delta]^n}{2^{n+1}n^{\frac{n}{2}}(n+1)^{\frac{n+1}{2}}r^{2n}}.$$

Dans le cas de $n$ entier, on en déduit pour $x$ et $y$ des valeurs de la forme

$$x = \frac{F(r^2)}{r^{2n}}, \quad y = \frac{f(r^2)}{r^{2n}}\Delta,$$

F et $f$ désignant des fonctions entières et rationnelles, la première du degré $n+1$, et la seconde du degré $n$.

V.

On peut conclure de ce qui précède, un théorème remarquable de calcul intégral; car si l'on pose

$$(11) \qquad x = \frac{F(r^2)}{r^{2n}}, \quad y = \frac{f(r^2)}{r^{2n}}\Delta,$$

et que l'on détermine les polynômes F et $f$ par la condition que

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

les $2n+3$ coefficients de F et $f$ seront entièrement déterminés, ainsi que les fonctions $x$ et $y$, qui satisferont dès lors à l'équation

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = 2\sqrt{n(n+1)}\frac{dr}{\Delta};$$

en d'autres termes, si F et $f$ sont des fonctions entières, et si $r$ désigne le rayon vecteur de la courbe dont les coordonnées rectangulaires $x$ et $y$ sont données par les équations (11), l'arc de cette courbe sera, par cela même, exprimé par l'intégrale elliptique

$$2\sqrt{n(n+1)}\int\frac{dr}{\sqrt{-r^4 + 2(2n+1)r^2 - 1}}.$$

Si $n$ est fractionnaire et égal à $\frac{p}{q}$, l'équation (10) ne cessera pas d'être algébrique, et l'on aura, en élevant ses deux membres à la puissance $q$,

$$(12) \qquad \cos q\theta + i\sin q\theta = \frac{(r^2 + 1 - i\Delta)^q\left(1 - \frac{2p+q}{q}r^2 - i\Delta\right)^p}{2^{p+q}\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{p}{2}}\left(\frac{p+q}{q}\right)^{\frac{p+q}{2}} r^{2p+q}},$$

avec

$$\Delta = \sqrt{-r^4 + 2\,\frac{2p+q}{q}\,r^2 - 1},$$

et l'on en déduira, pour $\cos q\theta$ et $\sin q\theta$, des valeurs de la forme

$$\cos q\theta = \frac{F(r^2)}{r^{2p+q}}, \quad \sin q\theta = \frac{f(r^2)}{r^{2p+q}}\Delta,$$

F et $f$ désignant des fonctions entières, la première du degré $p+q$, et la deuxieme du degré $p+q-1$. Si $q$ est pair, et seulement dans ce cas, la courbe aura deux axes rectangulaires, qui ne sont autres que les axes coordonnés des $x$ et des $y$, car alors la quantité $r^q \cos q\theta$ est une fonction paire de $x$ et de $y$, et l'équation de la courbe prend la forme

$$\Psi(x^2, y^2) = 0.$$

Il est presque superflu d'ajouter que cette circonstance ne se présentera jamais dans le cas de $n$ entier.

## VI.

On ramène aisément la différentielle de l'arc de nos courbes à la forme elliptique ordinaire, en posant, comme dans les équations (8),

$$r^2 = 2n + 1 + 2\sqrt{n(n+1)}\cos 2\lambda,$$

ou

$$\frac{1}{r^2} = 2n + 1 + 2\sqrt{n(n+1)}\cos 2\mu.$$

Si l'on fait cette substitution dans l'équation (6), on trouve

$$ds = \frac{-2\sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \cdot \frac{d\lambda}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\lambda}},$$

ou

$$ds = \frac{2\sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \cdot \frac{d\mu}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\mu}},$$

en faisant, pour abréger,

$$k' = \frac{2\sqrt[4]{n(n+1)}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}:$$

cette forme du module est moins simple que celle qu'on avait trouvée d'abord, et qui était

$$k = \sqrt{\frac{n}{n+1}};$$

mais il est aisé de vérifier que ces deux modules sont liés l'un à l'autre par la relation

$$k' = \frac{2\sqrt{k}}{k+1},$$

en sorte qu'on peut passer de l'un à l'autre par la transformation connue.

## VII.

Si l'on fait $n = 1$ dans l'équation (10), on trouve

$$\cos\theta + i\sin\theta = \frac{-(r^4+4r^2-1)+i(r^2-1)\sqrt{-r^4+6r^2-1}}{4r^3},$$

d'où

$$\cos\theta = \frac{-(r^4+4r^2-1)}{4r^3}, \quad \sin\theta = \frac{(r^2-1)\sqrt{-r^4+6r^2-1}}{4r^3},$$

équations qui appartiennent toutes deux à la lemniscate. De la première on tire

$$r^2(r^2+4r\cos\theta+4) = 1,$$

ou

$$rr' = 1.$$

Si l'on fait $n = 2$, on a

$$\cos\theta + i\sin\theta = \frac{(4r^6+27r^4-12r^2+1)+i(-4r^4+7r^2-1)\sqrt{-r^4+10r^2-1}}{12r^5\sqrt{3}},$$

d'où

$$\cos\theta = \frac{4r^6+27r^4-12r^2+1}{12r^5\sqrt{3}}, \quad \sin\theta = \frac{(-4r^4+7r^2-1)\sqrt{-r^4+10r^2-1}}{12r^5\sqrt{3}}.$$

L'une quelconque de ces équations représente la seconde courbe de la première classe. De la première on tire

$$r^2 - 3\sqrt{3}\,r\cos\theta + \frac{27}{4} = \frac{3}{r^2} - \frac{1}{4r^4},$$

ou

$$r'^2 = \frac{3}{r^2} - \frac{1}{4r^4},$$

ce qui est l'équation de la même courbe entre deux rayons vecteurs $r$ et $r'$. Cette courbe est facile à construire, elle se compose de trois boucles fermées, comme on le voit dans la figure ci-jointe (voyez *Planche II*); son arc est exprimé par la fonction elliptique de première espèce, au module $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

## VIII.

On a vu, au § IV, que si $n$ est entier, l'équation générale de nos courbes est du degré $2(n+1)$, en sorte que, dans ce cas, la courbe particulière dont nous venons de parler est bien réellement la plus simple après la lemniscate; mais si l'on donne à $n$ une valeur fractionnaire $\frac{p}{q}$, le degré de l'équation générale sera $2(p+q)$, et ce nombre se réduira à 6 pour $p=1$ et $q=2$; on aura ainsi une deuxième courbe du sixième degré, tout aussi simple que la première. Dans cette hypothèse, l'équation (12) donne

$$\cos 2\theta + i \sin 2\theta = \frac{-(r^6+6r^2-2)+i(r^4+2r^2-2)\sqrt{-r^4+4r^2-1}}{3r^4\sqrt{3}},$$

d'où

$$\cos 2\theta = -\frac{r^6+6r^2-2}{3r^4\sqrt{3}}, \quad \sin 2\theta = \frac{(r^4+2r^2-2)\sqrt{-r^4+4r^2-1}}{3r^4\sqrt{3}}.$$

Dans la première classe, la lemniscate est la seule courbe du quatrième degré, son arc est exprimé par la fonction elliptique au module $\sqrt{\frac{1}{2}}$, laquelle coïncide avec sa fonction complémentaire. Après la lemniscate, viennent les deux courbes du sixième degré dont nous avons donné les équations; les arcs de ces deux courbes sont exprimés par les deux fonctions elliptiques complémentaires, aux modules $\sqrt{\frac{2}{3}}$ et $\sqrt{\frac{1}{3}}$; ce fait est général: si dans l'équation (10), on fait successivement

$$n = \frac{p}{q} \quad \text{et} \quad n = \frac{q}{p},$$

on aura deux courbes du degré $2(p+q)$, dont les arcs seront représentés par les fonctions elliptiques complémentaires aux modules

$$\sqrt{\frac{p}{p+q}} \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{q}{p+q}}.$$

On voit, par ce qui précède, combien est élégante l'extension que M. Liouville a donnée aux résultats que nous avions découverts.