JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J.-A. SERRET

Développements sur une classe d'équations relatives à la représentation géométrique des fonctions elliptiques

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 10 (1845), p. 351-363.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1845_1_10__351_0>

Développements sur une classe d'équations relatives à la représentation géométrique des fonctions elliptiques;

Par M. J.-A. SERRET.

Je me suis proposé d'étudier ici avec attention les équations algébriques que j'ai désignées par

$$\Pi_m(\zeta) = 0$$

dans mon Mémoire sur la représentation géométrique des fonctions elliptiques. Les résultats auxquels je suis parvenu me semblent devoir intéresser les géomètres; on verra que les polynômes Π_m ont une analogie frappante avec les fonctions si remarquables résultant du développement de $(1 - 2\alpha\zeta + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$. La forme que je trouve pour l'équation

$$\Pi_m(\zeta) = 0$$

est assez simple pour qu'on puisse reconnaître immédiatement la nature des racines, ce qui est essentiel dans l'analyse où j'en ai fait usage.

I.

Rappelons d'abord en peu de mots la formation des polynômes Π_m : soient

$$\varphi(z) = \frac{(z-a)^m(z+a)^n}{(z+\alpha)^{n+1}}, \quad \psi(z) = \frac{(z-a)^m(z+a)^n}{(z-\alpha)^{m+1}},$$

où a et α désignent des quantités quelconques, m et n des nombres entiers positifs; on démontre aisément l'identité

$$\frac{\varphi^m(\alpha)}{1.2\ldots m} + \frac{\psi^n(-\alpha)}{1.2\ldots n} = 0,$$

en sorte que les équations

$$\varphi^m(\alpha) = 0, \quad \psi^n(-\alpha) = 0$$

établissent entre a et α une relation unique. Si l'on suppose, ce qui est permis, que m ne soit pas supérieur à n, on trouve facilement

$$\varphi^m(\alpha) =$$

$$\frac{(\alpha+a)^{n-m}}{(2\alpha)^{n+m+1}}\frac{\Gamma^2(m+1)}{\Gamma(n+1)}\sum_{p=0}^{p=m}\sum_{q=0}^{q=m}(-1)^{p+q}\frac{\Gamma(n+m-p+1)\Gamma(n+m-q+1)}{\Gamma(m-p+1)\Gamma(p+1)\Gamma(m-q+1)\Gamma(q+1)\Gamma(n+m-p-q+1)}(2\alpha)^p(2a)^q(\alpha+a)^{2m-p-q},$$

en désignant toujours par

$$\Gamma(\mu)$$

le produit des $\mu - 1$ premiers nombres entiers.

Soit maintenant

$$\frac{(\alpha+a)^2}{4a\alpha} = \zeta,$$

et posons

$$\Pi_m(\zeta) =$$

$$\frac{\Gamma^2(m+1)}{\Gamma(n+1)}\sum_{p=0}^{p=m}\sum_{q=0}^{q=m}(-1)^{p+q}\frac{\Gamma(n+m-p+1)\Gamma(n+m-q+1)}{\Gamma(m-p+1)\Gamma(p+1)\Gamma(m-q+1)\Gamma(q+1)\Gamma(n+m-p-q+1)}\frac{(2\alpha)^p(2a)^q(\alpha+a)^{2m-p-q}}{(4a\alpha)^m},$$

$\Pi_m(\zeta)$ sera une fonction entière et rationnelle de ζ, et du degré m, et l'on aura

$$\varphi^m(\alpha) = 2^{m-n-1}\frac{(\alpha+a)^{n-m}a^m}{\alpha^{n+1}}\Pi_m(\zeta).$$

Telle est la loi de formation des polynômes Π_m que nous allons étudier.

II.

De l'équation

$$\varphi(z) = \frac{(z-a)^m(z+a)^n}{(z+\alpha)^{n+1}}$$

on déduit par la différentiation

$$(z^3+\alpha z^2-a^2z-a^2\alpha)\varphi'(z)=\{(m-1)z^2+[(m-n)a+(m+n)\alpha]z+(m-n)a\alpha+(n+1)a^2\}\varphi(z),$$

et si l'on différentie $m+2$ fois cette nouvelle équation, on aura

$$(z^3+\alpha z^2-a^2z-a^2\alpha)\varphi^{m+3}(z)+\frac{m+2}{1}(3z^2+2\alpha z-a^2)\varphi^{m+2}(z)$$
$$+\frac{(m+2)(m+1)}{1.2}(6z+2\alpha)\varphi^{m+1}(z)+\frac{(m+2)(m+1)m}{1.2.3}6\varphi^m(z)$$
$$=\{(m-1)z^2+[(m-n)a+(m+n)\alpha]z+(m-n)a\alpha+(n+1)a^2\}\varphi^{m+2}(z)$$
$$+\frac{m+2}{1}[2(m-1)z+(m-n)a+(m+n)\alpha]\varphi^{m+1}(z)$$
$$+\frac{(m+2)(m+1)}{1.2}2(m-1)\varphi^m(z);$$

équation que nous représentons, pour abréger, par

$$A\varphi^{m+3}(z)+B\varphi^{m+2}(z)+C\varphi^{m+1}(z)+D\varphi^m(z)=0,$$

en faisant

$$\begin{aligned}
A&=(z-a)(z+a)(z+\alpha),\\
B&=(2m+7)z^2+[(m-n+4)\alpha-(m-n)a]z-(m+n+3)a^2-(m-n)a\alpha,\\
C&=(m+2)[(m+5)z-(n-1)\alpha-(m-n)a],\\
D&=(m+2)(m+1).
\end{aligned}$$

Si l'on fait maintenant $z=\alpha$, on aura

$$(1)\qquad A\varphi^{m+3}(\alpha)+B\varphi^{m+2}(\alpha)+C\varphi^{m+1}(\alpha)+D\varphi^m(\alpha)=0,$$

avec

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned}
A&=2\alpha(\alpha^2-a^2),\\
B&=(3m-n+11)\alpha^2-2(m-n)a\alpha-(m+n+3)a^2,\\
C&=(m+2)[(m-n+6)\alpha-(m-n)a],\\
D&=(m+2)(m+1).
\end{aligned}\right.$$

III.

Désignons par $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, $\varphi_3(z)$, les valeurs que prend $\varphi(z)$ quand on change successivement m en $m+1$, $m+2$, $m+3$; on aura

$$\begin{aligned}
\varphi_1(z)&=(z-a)\varphi(z),\\
\varphi_2(z)&=(z-a)^2\varphi(z),\\
\varphi_3(z)&=(z-a)^3\varphi(z);
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit très-aisément

$$\varphi^{m+1}(z) = \frac{\varphi_1^{m+1}(z) - (m+1)\varphi^m(z)}{z-a},$$

$$\varphi^{m+2}(z) = \frac{\varphi_2^{m+2}(z) - 2(m+2)\varphi_1^{m+1}(z) + (m+2)(m+1)\varphi^m(z)}{(z-a)^2},$$

$$\varphi^{m+3}(z) = \frac{\varphi_3^{m+3}(z) - 3(m+3)\varphi_2^{m+2}(z) + 3(m+3)(m+2)\varphi_1^{m+1}(z) - (m+3)(m+2)(m+1)\varphi^m(z)}{(z-a)^3}.$$

Faisant $z = \alpha$ dans ces équations, et portant ensuite dans l'équation (1) les valeurs qui en résultent pour $\varphi^{m+1}(\alpha)$, $\varphi^{m+2}(\alpha)$, $\varphi^{m+3}(\alpha)$, celle-ci deviendra

$$\text{(3)} \qquad M\varphi_3^{m+3}(\alpha) + N\varphi_2^{m+2}(\alpha) + P\varphi_1^{m+1}(\alpha) + Q\varphi^m(\alpha) = 0,$$

en faisant, pour abréger,

$$M = \frac{A}{\alpha - a},$$

$$N = -3(m+3)\frac{A}{\alpha - a} + B,$$

$$P = 3(m+3)(m+2)\frac{A}{\alpha - a} - 2(m+2)B + C(\alpha - a),$$

$$Q = -(m+3)(m+2)(m+1)\frac{A}{\alpha - a} + (m+2)(m+1)B$$
$$- (m+1)C(\alpha - a) + D(\alpha - a)^2,$$

ou, en vertu des équations (2),

$$\text{(4)} \qquad \left\{ \begin{aligned} & M = 2\alpha(\alpha + a), \\ & N = -(3m+n+7)\alpha^2 - (8m-2n+18)a\alpha \\ & \qquad\qquad - (m+n+3)a^2, \\ & P = (m+2)\left[\begin{aligned} &(m+n+2)\alpha^2 + (8m-2n+12)a\alpha \\ &\qquad + (3m+n+6)a^2 \end{aligned}\right], \\ & Q = -2(m+2)(m+1)^2 a(\alpha + a). \end{aligned} \right.$$

IV.

Cela posé, on a, par la définition même des fonctions Π_m,

$$\varphi^m(\alpha) = 2^{m-n-1}\frac{(\alpha+a)^{n-m}a^m}{\alpha^{n+1}}\Pi_m,$$

$$\varphi_1^{m+1}(\alpha) = 2^{m-n}\frac{(\alpha+a)^{n-m-1}a^{m+1}}{\alpha^{n+1}}\Pi_{m+1},$$

$$\varphi_2^{m+2}(\alpha) = 2^{m-n+1}\frac{(\alpha+a)^{n-m-2}a^{m+2}}{\alpha^{n+1}}\Pi_{m+2},$$

$$\varphi_3^{m+3}(\alpha) = 2^{m-n+2}\frac{(\alpha+a)^{n-m-3}a^{m+3}}{\alpha^{n+1}}\Pi_{m+3};$$

et, en substituant dans l'équation (3),

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &8a^2\alpha\,\Pi_{m+3} + 2a\,\mathrm{N}\,\Pi_{m+2} + (\alpha+a)\,\mathrm{P}\,\Pi_{m+1} \\ &\qquad - (m+2)(m+1)^2(\alpha+a)^3\,\Pi_m = 0. \end{aligned}\right.$$

Dans cette équation les quantités N et P doivent être remplacées par leurs valeurs tirées des équations (4).

Voici donc une relation linéaire entre quatre fonctions consécutives Π_m, Π_{m+1}, Π_{m+2}, Π_{m+3}; mais, à cause que ces fonctions sont symétriques en a et α, on pourra former une équation qui n'en renferme que trois.

L'équation (5) ne cessera pas d'avoir lieu, si l'on change les lettres a et α l'une en l'autre, et si l'on désigne par N′ et P′ ce que deviennent N et P par suite de ce changement, on aura

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &8\alpha a^2\,\Pi_{m+3} + 2\alpha\,\mathrm{N}'\,\Pi_{m+2} + (\alpha+a)\,\mathrm{P}'\,\Pi_{m+1} \\ &\qquad - (m+2)(m+1)^2(\alpha+a)^3\,\Pi_m = 0, \end{aligned}\right.$$

en sorte qu'on pourra, à l'aide des équations (5) et (6), éliminer à volonté, soit Π_m, soit Π_{m+3}. On trouve ainsi, en remplaçant partout $\frac{(\alpha+a)^2}{4a\alpha}$ par ζ,

$$\Pi_{m+3} = [(n+m+3)\zeta - (n-m-2)]\,\Pi_{m+2} - (m+2)^2\zeta\,\Pi_{m+1},$$

et

$$\Pi_{m+2} = [(n+m+2)\zeta - (n-m-1)]\,\Pi_{m+1} - (m+1)^2\zeta\,\Pi_m.$$

On voit que la première de ces équations se déduit bien de la seconde par le changement de m en $m+1$, ce qui donne une vérification parfaite de nos calculs.

V.

Si, dans la dernière des équations précédentes, on met m au lieu de $m+2$, on aura

$$(7)\qquad \Pi_m = [(n+m)\zeta - (n-m+1)]\,\Pi_{m-1} - (m-1)^2\zeta\,\Pi_{m-2}.$$

On pourra, à l'aide de cette formule, calculer les fonctions

$$\Pi_2,\quad \Pi_3,\ldots,\quad \Pi_n,$$

car les deux premières Π_0 et Π_1 se forment immédiatement; on trouve

$$\Pi_0 = 1,$$
$$\Pi_1 = (n+1)\zeta - n.$$

Calculons Π_2 à l'aide de l'équation (7), nous trouverons

$$\Pi_2 = (n+2)(n+1)\zeta^2 - 2(n+1)n\zeta + n(n-1);$$

on aurait de même

$$\begin{aligned}\Pi_3 = (n+3)(n+2)(n+1)\zeta^3 &- 3(n+2)(n+1)n\zeta^2 \\ &+ 3(n+1)n(n-1)\zeta - n(n-1)(n-2).\end{aligned}$$

L'examen des valeurs que nous venons de trouver pour Π_1, Π_2, Π_3, fait présumer que l'on aura généralement

$$(8)\qquad \Pi_m = \sum_{p=0}^{p=m}(-1)^p\frac{\Gamma(n+m-p+1)\,\Gamma(m+1)}{\Gamma(n-p+1)\,\Gamma(m-p+1)\,\Gamma(p+1)}\zeta^{m-p},$$

et il est, en effet, facile de démontrer que si Π_{m-1} et Π_{m-2} se forment d'après cette loi, il en sera de même de Π_m. D'abord il est évident, d'après l'équation (7), que le premier et le dernier terme de Π_m se formeront d'après la loi que nous venons d'indiquer; il suffit donc de la vérifier pour l'un des termes intermédiaires.

On a, par hypothèse,

$$\Pi_{m-1} = \sum_{p=0}^{p=m-1} (-1)^p \frac{\Gamma(n+m-p)\Gamma(m)}{\Gamma(n-p+1)\Gamma(m-p)\Gamma(p+1)} \zeta^{m-p-1},$$

$$\Pi_{m-2} = \sum_{p=0}^{p=m-2} (-1)^p \frac{\Gamma(n+m-p-1)\Gamma(m-1)}{\Gamma(n-p+1)\Gamma(m-p-1)\Gamma(p+1)} \zeta^{m-p-2}.$$

D'après cela, et en vertu de l'équation (7), le coefficient de $(-1)^p \zeta^{m-p}$ dans Π_m sera

$$(n-m+1)\frac{\Gamma(n+m-p+1)\Gamma(m)}{\Gamma(n-p+2)\Gamma(m-p+1)\Gamma(p)} + (n+m)\frac{\Gamma(n+m-p)\Gamma(m)}{\Gamma(n-p+1)\Gamma(m-p)\Gamma(p+1)}$$
$$+ (m-1)^2 \frac{\Gamma(n+m-p)\Gamma(m-1)}{\Gamma(n-p+2)\Gamma(m-p)\Gamma(p)},$$

ou, d'après la définition des Γ,

$$\frac{\Gamma(n+m-p+1)\Gamma(m+1)}{\Gamma(n-p+1)\Gamma(m-p+1)\Gamma(p+1)},$$

ce qu'il fallait démontrer.

VI.

On peut, d'après cela, donner à la fonction Π_m une forme très-remarquable; on a, en effet,

$$\zeta^n(\zeta-1)^m = \sum_{p=0}^{p=m} (-1)^p \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-p+1)\Gamma(p+1)} \zeta^{n+m-p},$$

et, en différentiant m fois,

$$\frac{d^m.\zeta^n(\zeta-1)^m}{d\zeta^m} = \sum_{p=0}^{p=m} (-1)^p \frac{\Gamma(n+m-p+1)\Gamma(m+1)}{\Gamma(n-p+1)\Gamma(m-p+1)\Gamma(p+1)} \zeta^{n-p},$$

d'où l'on conclut

$$\Pi_m = \frac{1}{\zeta^{n-m}} \frac{d^m.\zeta^n(\zeta-1)^m}{d\zeta^m}.$$

En particulier, on aura

$$\Pi_n = \frac{d^n.(\zeta^2 - \zeta)^n}{d\zeta^n};$$

si l'on fait

$$\zeta - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x,$$

il viendra

$$\Pi_n = \frac{1}{2^n}\frac{d^n.(x^2 - 1)^n}{dx^n},$$

ce qui montre que notre fonction particulière Π_n, divisée par $1.2\ldots n$, n'est autre que la fonction X_n de Legendre, qui représente le coefficient de α^n dans le développement de $(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$.

VII.

On sait que la fonction Π_n satisfait à une équation différentielle du second ordre, qui joue un rôle important dans la théorie de ces fonctions; nous allons montrer que l'échelle de relation précédemment déterminée et qui nous a conduit à l'expression de la fonction plus générale Π_m, peut aisément se transformer en une équation qui ne renferme que la fonction Π_m et ses deux premières dérivées.

Soit

$$\varpi(\zeta) = \zeta^n(\zeta - 1)^m,$$

d'où

$$\frac{d^m\varpi}{d\zeta^m} = \zeta^{n-m}\,\Pi_m;$$

si ϖ_1 désigne ce que devient ϖ quand on y change m en $m+1$, on aura

$$\varpi_1(\zeta) = (\zeta - 1)\,\varpi(\zeta),$$

d'où

$$\frac{d^{m+1}\varpi_1}{d\zeta^{m+1}} = (\zeta - 1)\frac{d^{m+1}\varpi}{d\zeta^{m+1}} + (m+1)\frac{d^m\varpi}{d\zeta^m},$$

et, en remplaçant

$$\frac{d^{m+1}\varpi_1}{d\zeta^{m+1}}, \quad \frac{d^m\varpi}{d\zeta^m} \quad \text{et} \quad \frac{d}{d\zeta}\frac{d^m\varpi}{d\zeta^m}$$

par leurs valeurs,

$$\Pi_{m+1} = [(n+1)\zeta - (n-m)]\,\Pi_m + \zeta(\zeta - 1)\,\Pi'_m,$$

on pourra de la même manière exprimer Π_{m+2} à l'aide de Π_{m+1} et de Π'_{m+1}; d'ailleurs ces deux dernières quantités s'expriment à l'aide de Π_m, Π'_m et Π''_m, et l'on trouvera finalement

$$\begin{aligned}\Pi_{m+2} = {} & [(n+2)(n+1)\zeta^2 - 2(n+1)(n-m)\zeta + (n-m)(n-m-1)]\,\Pi_m \\ & + 2\zeta(\zeta-1)[(n+2)\zeta - (n-m)]\,\Pi'_m + \zeta^2(\zeta-1)^2\,\Pi''_m.\end{aligned}$$

Portant ces valeurs de Π_{m+1} et Π_{m+2} dans l'équation

$$\Pi_{m+2} = [(n+m+2)\zeta - (n-m-1)]\,\Pi_{m+1} - (m+1)^2\zeta\,\Pi_m,$$

on aura

$$\zeta(\zeta-1)\,\Pi''_m + [(n-m+2)\zeta - (n-m+1)]\,\Pi'_m - m(n+1)\,\Pi_m = 0,$$

ou, en posant $\zeta = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$,

$$(x^2-1)\,\Pi''_m + [(n-m+2)x - (n-m)]\,\Pi'_m - m(n+1)\,\Pi_m = 0,$$

équation dans laquelle Π_m est fonction de la nouvelle variable x considérée comme indépendante.

Faisant $m = n$, on obtiendra l'équation connue à laquelle satisfait la fonction Π_n, savoir,

$$(x^2-1)\,\Pi''_n + 2x\,\Pi'_n - n(n+1)\,\Pi_n = 0.$$

VIII.

Pour que ζ puisse exprimer, comme cela est nécessaire dans notre analyse, la valeur d'une quantité de la forme $\frac{(a+\alpha)^2}{4a\alpha}$, a et α étant des imaginaires conjuguées, il faut et il suffit que ζ soit réelle, positive et < 1. Nous démontrerons donc un théorème important en faisant voir que les m racines de l'équation

$$\Pi_m(\zeta) = 0$$

(où nous supposons toujours n au moins égal à m), sont réelles et comprises entre o et 1. Or, pour y parvenir, considérons, à l'exemple de M. Sturm, une suite de m fonctions Π, savoir,

$$\Pi_m, \quad \Pi_{m-1},\ldots, \quad \Pi_2, \quad \Pi_1, \quad \Pi_0.$$

La dernière de ces fonctions est constante et ne peut changer de signe quand on fait varier ζ; en outre, l'équation (7) montre que si l'on fait varier ζ depuis zéro jusqu'à une valeur positive quelconque, deux fonctions Π consécutives ne peuvent s'annuler en même temps, et que si l'une d'elles s'annulle, celle qui la précède et celle qui la suit sont de signes contraires; d'où il résulte clairement que le nombre des variations que présente la suite des signes des fonctions Π ne peut s'altérer que lorsque la première change de signe et par conséquent s'annule.

Cela posé, l'équation (7) montre que pour $\zeta = 0$ deux fonctions Π consécutives sont toujours de signes contraires, et par conséquent que la suite des signes des fonctions Π présente m variations.

En second lieu, l'équation (7) ou l'équation (8) donne aisément pour $\zeta = 1$,

$$\Pi_0 = 1, \quad \Pi_1 = 1, \quad \Pi_2 = 1.2,\ldots, \quad \Pi_m = 1.2\ldots m,$$

ce qui montre que la suite des signes des fonctions Π ne présente aucune variation.

Il résulte de là que quand ζ varie de o à 1, la suite des signes des fonctions Π perd m variations, et par conséquent que l'équation

$$\Pi_m(\zeta) = 0$$

a ses m racines réelles et comprises entre o et 1 [*].

On voit encore que la fonction Π_{m-1} joue ici le même rôle que la dérivée de Π_m, d'où il résulte que deux racines de $\Pi_m = 0$ comprennent une racine de $\Pi_{m-1} = 0$, et n'en comprennent qu'une; ce qui peut servir au calcul numérique des racines.

---

[*] On arriverait au même résultat en appliquant m fois de suite le théorème de Rolle à la fonction $\zeta^m(\zeta - 1)^m$, dont la $m^{ième}$ dérivée fournit l'expression de Π_m et dont les racines sont connues.

IX.

Nous ferons ici une remarque curieuse sur l'équation particulière

$$\Pi_n(\zeta) = 0,$$

où les deux arguments m et n sont égaux. On voit, d'après la forme de Π_n donnée au § VI, que cette équation ne changera pas si l'on change ζ en $1 - \zeta$, d'où il résulte que les modules des fonctions elliptiques correspondantes à l'équation

$$\Pi_n = 0$$

seront deux à deux complémentaires, ce qui a déjà été démontré dans mon Mémoire pour le cas de $n = 2$; on voit encore que si n est impair, l'équation précédente aura toujours pour racine $\frac{1}{2}$, et que par conséquent la fonction *lemniscatique* correspondra à toute fonction Π_n d'indice impair; mais il ne faut pas conclure de là que la lemniscate proprement dite se retrouve dans les différentes classes de courbes dont nous parlons: ces courbes, au contraire, diffèrent essentiellement par leur équation, ainsi que je le ferai voir en m'occupant de leurs propriétés particulières; seulement on aura plusieurs courbes dont les arcs représenteront la même fonction elliptique.

Cette observation s'applique plus généralement aux racines communes à plusieurs équations

$$\Pi = 0.$$

Ainsi, par exemple, si l'on fait

$$n' = n \pm \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}},$$

l'équation

$$\Pi_2 = 0$$

donne

$$\zeta = \frac{n'}{n'+1};$$

donc, si n' est commensurable, chaque racine ζ se retrouvera dans quelque équation

$$\Pi_1 = 0;$$

en sorte qu'une courbe de la première classe pourra servir aussi à représenter la fonction elliptique correspondante, que la seconde classe comprend déjà.

En particulier, si $n = 8$, on aura

$$n' = 2 \quad \text{et} \quad n' = 14,$$

ce qui montre que les deux fonctions elliptiques aux modules $\sqrt{\frac{2}{3}}$ et $\sqrt{\frac{14}{15}}$ s'exprimeront à volonté par un arc de courbe de première ou de seconde classe.

Si, en second lieu, on fait $n = 49$, on aura

$$n' = 14 \quad \text{et} \quad n' = 84,$$

et la conclusion précédente s'appliquera aussi aux deux fonctions de modules $\sqrt{\frac{14}{15}}$ et $\sqrt{\frac{84}{85}}$; on voit même qu'il existera, dans la deuxième classe, deux courbes dont les arcs pourront représenter la fonction au module $\sqrt{\frac{14}{15}}$.

X.

J'ai été conduit, dans le Mémoire déjà cité, à considérer d'autres fonctions Π_m, qui se déduiraient, de la même manière que les premières, des deux quantités

$$\varphi(z) = \frac{(z-a)^m (z+\alpha)^n}{(z+a)^{n+1}}, \quad \psi(z) = \frac{(z-a)^m (z+\alpha)^n}{(z-\alpha)^{m+1}}.$$

La fonction φ que nous considérons ici, se déduirait de l'ancienne par le changement de n en $-n-1$; il en sera donc de même de la nouvelle fonction Π_m, et l'on aura

$$\Pi_m = [-(n-m+1)\zeta + (n+m)]\,\Pi_{m-1} - (m-1)^2\,\zeta\,\Pi_{m-2};$$

on a d'ailleurs

$$\Pi_0 = 1, \quad \Pi_1 = -n\zeta + (n+1),$$

d'où l'on conclut pour $\zeta = 1$,

$$\Pi_0 = 1, \quad \Pi_1 = 1, \quad \Pi_2 = 1.2, \ldots, \quad \Pi_m = 1.2\ldots m.$$

D'ailleurs pour $\zeta = \infty$, deux fonctions Π consécutives sont toujours de signes contraires, d'où il résulte que, quand ζ varie de 1 à ∞, la suite des signes des fonctions Π gagne m variations, et par conséquent que l'équation

$$\Pi_m = 0$$

a ses m racines réelles positives, mais plus grandes que 1, en sorte qu'elles ne peuvent pas servir à l'objet que nous nous proposions dans le Mémoire auquel se rapportent les développements qu'on vient de lire.