

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. BRASSINNE

**Note sur la transformation et l'intégration d'une classe d'équations
différentielles simultanées à plusieurs variables**

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 10 (1845), p. 194-203.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1845_1_10__194_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

Faisons

$$k' = R c', \quad k'' = R c'', \quad k''' = R c''',$$

R étant égal à $\sqrt{k'^2 + k''^2 + k'''^2}$.

Déterminons six quantités $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$, au moyen des trois conditions

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 &= 0, \\ a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 &= 0, \\ b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 &= 0. \end{aligned}$$

Si l'on se donne les quantités a_2, a_3, b_3 , les autres inconnues a_1, b_1, b_2 dépendront d'équations du premier degré; on prendra ensuite pour a', a'', a''' les valeurs

$$\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \quad \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \quad \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}},$$

et pour b', b'', b''' ,

$$\frac{b_1}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}, \quad \frac{b_2}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}, \quad \frac{b_3}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

Cela fait, on parviendra par substitution, après les artifices de calcul indiqués ci-dessus, aux trois équations,

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{d^2 x'}{dt^2} + m \cdot \frac{ds'}{dt} \cdot \frac{dx'}{dt} = 0, \\ \frac{d^2 y'}{dt^2} + m \cdot \frac{ds'}{dt} \cdot \frac{dy'}{dt} = 0, \\ \frac{d^2 z'}{dt^2} + m \cdot \frac{ds'}{dt} \cdot \frac{dz'}{dt} + R e^{-ms'} = 0. \end{cases}$$

Les deux premières donnent, par l'intégration,

$$(3) \quad \frac{dx'}{dt} = A e^{-ms'}, \quad \frac{dy'}{dt} = B e^{-ms'}, \quad \text{d'où} \quad dy' = C dx'.$$

Regardant z' comme fonction de x' seul, puisque, d'après les formules (3), y' peut s'exprimer au moyen de x' , on posera

$$\frac{dz'}{dt} = \frac{dz'}{dx'} \cdot \frac{dx'}{dt} \quad \text{ou} \quad \frac{dz'}{dt} = p' \frac{dx'}{dt},$$

en nommant p' le rapport $\frac{dz'}{dx'}$. La substitution dans la troisième équation du groupe (2) fournit, en ayant égard aux deux premières équations de ce groupe,

$$\frac{dx'}{dt} \cdot \frac{dp'}{dt} = -R e^{-ns'};$$

divisant celle-ci par le carré de la première des équations (3), on aura

$$(4) \quad \frac{dp'}{dx'} = -\frac{R}{A^2} e^{(2m-n)s'}.$$

Mais

$$ds' = \sqrt{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2} = dx' \sqrt{1 + C^2 + p'^2}.$$

Multipliant les deux membres de l'équation (4) par cette valeur de ds' , on aura

$$dp' \sqrt{1 + C^2 + p'^2} = -\frac{R}{A^2} e^{(2m-n)s'} ds',$$

qui, intégrée, donne

$$\begin{aligned} (1 + C^2) \left[\frac{p'}{\sqrt{1 + C^2}} \sqrt{1 + \frac{p'^2}{1 + C^2}} + \log \left(\frac{p'}{\sqrt{1 + C^2}} + \sqrt{1 + \frac{p'^2}{1 + C^2}} \right) \right] \\ = \gamma - \frac{R}{A^2(2m-n)} e^{(2m-n)s'}, \end{aligned}$$

γ étant la constante arbitraire. Éliminant, dans cette dernière, l'exponentielle au moyen de l'équation (4), on trouvera

$$dx' = \frac{dp'}{(2m-n)(1+C^2) \left[\frac{p'}{\sqrt{1+C^2}} \sqrt{1 + \frac{p'^2}{1+C^2}} + \log \left(\frac{p'}{\sqrt{1+C^2}} + \sqrt{1 + \frac{p'^2}{1+C^2}} \right) \right]}.$$

dy' vaudra ensuite $C dx'$, et dz' vaudra $p' dx'$; remplaçant x' , y' , z' par leurs valeurs

$$\begin{aligned} x' &= a'x + a''y + a'''z, \\ y' &= b'x + b''y + b'''z, \\ z' &= c'x + c''y + c'''z, \end{aligned}$$

et exprimant ensuite $\frac{dz'}{dx'}$ en fonction de $\frac{dz}{dx}$, que l'on appellerait p , l'intégration des équations (1) sera ramenée aux quadratures.

3. Supposons qu'il s'agisse de trouver le mouvement d'un projectile soumis à la résistance de l'air et à l'action du vent, que nous regarderons comme une force accélératrice constante d'intensité et de direction. Si cette force agit dans le plan vertical de la trajectoire, elle se combinera avec la gravité, et, en admettant que la résistance de l'air est proportionnelle au carré de la vitesse que le projectile possède à chaque instant, les équations du mouvement auront la forme

$$(1) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + C \cdot \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} + k = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + C \cdot \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dy}{dt} + k' = 0.$$

Remplaçons, dans ces équations, k et k' par $m \cos \alpha$ et $m \sin \alpha$, m étant égal à $\sqrt{k^2 + k'^2}$ et $\tan \alpha$ étant égal à $\frac{k'}{k}$; posons ensuite

$$x = -x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \quad \text{et} \quad y = x' \cos \alpha + y' \sin \alpha,$$

les équations (1) deviendront

$$\begin{aligned} & -\frac{d^2x'}{dt^2} \sin \alpha + \frac{d^2y'}{dt^2} \cos \alpha \\ & + C \cdot \frac{ds'}{dt} \left(-\frac{dx'}{dt} \sin \alpha + \frac{dy'}{dt} \cos \alpha \right) + m \cos \alpha = 0, \\ & + \frac{d^2x'}{dt^2} \cos \alpha + \frac{d^2y'}{dt^2} \sin \alpha \\ & + C \cdot \frac{ds'}{dt} \left(\frac{dx'}{dt} \cos \alpha + \frac{dy'}{dt} \sin \alpha \right) + m \sin \alpha = 0, \end{aligned}$$

puisque

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx'^2 + dy'^2} = ds'.$$

Multipliant la première équation par $\sin \alpha$, la deuxième par $\cos \alpha$, et soustrayant, on trouvera

$$\frac{d^2x'}{dt^2} + C \cdot \frac{ds'}{dt} \cdot \frac{dx'}{dt} = 0.$$

Multipliant ensuite la première équation par $\cos \alpha$, et la deuxième par $\sin \alpha$, et ajoutant, on trouvera

$$\frac{d^2y'}{dt^2} + C \cdot \frac{ds'}{dt} \cdot \frac{dy'}{dt} + m = 0.$$

Ces deux dernières équations, traitées par les méthodes connues (voir Poisson, *Mécanique*, deuxième édition, page 402), conduisent à

$$(2) \quad \begin{cases} C.dx' = \frac{dp'}{p' \sqrt{1+p'^2} + \log(p' + \sqrt{1+p'^2}) - \gamma'} \\ \text{et} \\ C.dy' = \frac{p' dr'}{p' \sqrt{1+p'^2} + \log(p' + \sqrt{1+p'^2}) - \gamma'}; \end{cases}$$

ici r' désigne le rapport $\frac{dy'}{dx'}$. Mais, pour exprimer les coordonnées primitives ou leurs différentielles dx , dy en fonction du rapport $\frac{dy}{dx} = r$, nous observerons que

$$dx' = dy \cos \alpha - dx \sin \alpha \quad \text{et} \quad dy' = dy \sin \alpha + dx' \cos \alpha,$$

et, par suite,

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{p \sin \alpha + \cos \alpha}{p \cos \alpha - \sin \alpha}.$$

Substituant, dans la formule (2), pour p' , dx' , dy' leurs valeurs, et appelant $F(r) dp$, $f(r) dp$ ce que deviennent les seconds membres, on aura visiblement

$$C.dy = \cos \alpha F(r) dp + \sin \alpha f(r) dp,$$

$$C.dx = \cos \alpha f(r) dp - \sin \alpha F(r) dp.$$

La trajectoire aura, dans ce cas, une asymptote parallèle à l'axe des y' , et faisant, par conséquent, avec l'axe des x , un angle $\pi - \alpha$.

4. Nous terminerons ce travail par quelques observations utiles dans la pratique de la balistique. On peut voir dans les *Traité de Mécanique rationnelle*, dans celui de Poisson par exemple (tome I^{er}, page 403), que pour toutes les lois de la résistance de l'air, on obtient la relation générale

$$\frac{dp \cdot dx}{dt^2} = -g.$$

Si donc, pour les équations du mouvement d'un projectile, nous

avons

$$\frac{d^2x}{dt^2} + m\psi(s) \cdot \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + m\psi(s) \cdot \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dy}{dt} + g = 0,$$

la première, pouvant s'intégrer une fois, donnera une valeur de dt qui, substituée dans la relation générale ci-dessus, conduira à l'équation différentielle de la trajectoire.

L'intégrale de cette équation s'obtiendra généralement lorsque, pour le tir sous de petits angles, nous supposons

$$ds = dx.$$

Admettons, enfin, que la loi de la résistance de l'air est exprimée par deux termes de la forme

$$m \cdot \frac{ds^2}{dt^2} + n \cdot \varphi(s) \cdot \frac{ds^3}{dt^3},$$

remplaçant pour de petits angles s par x ; les équations différentielles du mouvement seront, dans cette hypothèse,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + m \frac{dx^2}{dt^2} + n\varphi(x) \cdot \frac{dx^3}{dt^3} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \left[m \frac{dx^2}{dt^2} + n\varphi(x) \cdot \frac{dx^3}{dt^3} \right] \frac{dy}{dx} + g = 0.$$

La première, divisée par $\frac{dx^2}{dt^2}$ et multipliée par dt , s'intègre une fois et donne un résultat de la forme

$$dt - mt \cdot dx + ndx \int \varphi(x) dx = 0,$$

équation linéaire du premier ordre, qui donnera t , et, par suite, dt en fonction de x . Cette valeur, substituée dans la relation générale

$$\frac{d\varphi \cdot dx}{dt^2} = -g,$$

conduira à une équation différentielle de la trajectoire, intégrable dans un grand nombre de cas, dans celui, par exemple, où $\varphi(x)$ sera une constante.

