JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J.-A. SERRET

Mémoire sur l'intégration d'une équation différentielle à l'aide des différentielles à indices quelconques

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 9 (1844), p. 193-216.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1844_1_9__193_0>

MÉMOIRE

SUR L'INTÉGRATION D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

A L'AIDE DES DIFFÉRENTIELLES A INDICES QUELCONQUES[*];

PAR J.-A. SERRET.

I.

La premiere idée des différentielles à indices quelconques remonte à Leibnitz, et cependant plus d'un siècle s'est écoulé sans qu'elle ait produit aucun résultat; car, bien qu'il soit plusieurs fois question de ces différentielles dans les ouvrages d'Euler, de Laplace et de Fourier, ce n'est que dans ces derniers temps que M. Liouville en a nettement fixé le sens et indiqué les principaux usages. Les Mémoires qu'il a écrits sur ce sujet, et en particulier son beau théorème des fonctions complémentaires, dissipant enfin le vague dont cette théorie était enveloppée, ont étendu le champ de l'analyse en permettant de donner aux formules toute la généralité qu'elles comportent et en multipliant les moyens de transformation. De là des ressources inattendues pour la solution d'un grand nombre de questions qu'on aborderait difficilement par les méthodes de l'analyse ordinaire. « Ces expressions (les dérivées à indices quelconques), dit avec raison » M. Liouville, dont il est aisé de fixer avec clarté le sens véritable, » ne sont pas seulement curieuses à étudier sous le rapport mathématique et purement spéculatif : leur représentation existe dans la » nature, et l'on peut citer des questions de géométrie et de physique » où leur usage est amené sans effort, et paraît même indispensable. »

Dans le Mémoire inséré au XXI^e cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, page 163, M. Liouville a montré comment on pou-

[*] Ce Mémoire est extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, tome XVII, page 458. Toutefois quelques légères modifications ont été introduites dans cette nouvelle rédaction.

vait appliquer avec fruit le calcul des différentielles à indices quelconques à l'intégration des équations différentielles. Sa méthode consiste à regarder la fonction que l'on cherche comme la dérivée à indice quelconque d'une fonction plus simple, et à profiter de l'indétermination de cet indice pour simplifier l'équation transformée. Cette méthode réussit dans un grand nombre de cas, mais dans beaucoup d'autres; avant de l'appliquer, il est nécessaire de faire subir aux équations des transformations convenables. On verra dans ce Mémoire en quoi consistent ces transformations.

II.

On rencontre à chaque pas, dans les questions de physique mathématique, et spécialement dans la théorie de la chaleur, une équation différentielle à laquelle on peut toujours ramener l'équation célèbre de Riccati, et dont plusieurs géomètres se sont occupés.

Cette équation est la suivante,

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2n}{x}\frac{dy}{dx} - m^2y = 0,$$

dans laquelle m et n représentent des constantes tout à fait quelconques. On sait que si n est un nombre entier positif ou négatif, l'intégrale complète de cette équation peut être obtenue sous forme finie; mais on n'a pas encore donné à cette intégrale la forme si simple et si élégante qu'elle est susceptible de prendre dans ce cas particulier, forme que les principes du nouveau calcul maintiennent invariable pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires des paramètres m et n.

Je me propose spécialement, dans ce Mémoire, d'appliquer les principes du calcul des différentielles à indices quelconques, à l'intégration de cette équation différentielle; mais, avant d'entrer dans l'exposition de la méthode, je dirai en peu de mots comment j'ai été conduit à cette recherche.

III.

Désignons par y la valeur de l'intégrale définie $\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+1}}\,d\alpha$;

M. Catalan et moi [*] avons montré, par des moyens différents, que cette intégrale peut être obtenue sous forme finie, lorsque n est un nombre entier; et j'ai fait voir, en outre, que la formule donnée par M. Catalan a encore lieu pour les valeurs fractionnaires de n.

La méthode suivie par M. Catalan repose sur ce que y satisfait à une équation différentielle linéaire de l'ordre $2(n+1)$, ce qui suppose nécessairement n entier; je vais montrer que, quel que soit n, y satisfait toujours à une équation linéaire du deuxième ordre.

L'intégration par parties donne

$$\int \frac{\cos \alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+1}} d\alpha = \frac{\sin \alpha x}{x(1+\alpha^2)^{n+1}} + \frac{2(n+1)}{x} \int \frac{\sin \alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+2}} \alpha d\alpha,$$

d'où

$$\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+1}} d\alpha = \frac{2(n+1)}{x} \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+2}} \alpha d\alpha,$$

ou

$$yx = 2(n+1) \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+2}} \alpha d\alpha;$$

différentiant deux fois par rapport à x, on a

$$\frac{d^2(yx)}{dx^2} = -2(n+1) \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+2}} \alpha^3 d\alpha,$$

d'où

$$\frac{d^2(yx)}{dx^2} - yx = -2(n+1) \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+1}} \alpha d\alpha:$$

or

$$-\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+1}} \alpha d\alpha = \frac{dy}{dx};$$

donc

$$\frac{d^2(yx)}{dx^2} - yx = 2(n+1) \frac{dy}{dx},$$

ou bien

$$(2) \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{2n}{x} \frac{dy}{dx} - y = 0,$$

(*) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. V, p. 110; t. VIII, p. 20.

équation qui coïnciderait avec l'équation (1) si l'on y changeait n en $-n$, et x en mx.

Rien n'est plus simple que de déterminer l'intégrale complète de l'équation (2) et, par suite, la valeur de l'intégrale définie $\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+1}} d\alpha$, en supposant n entier et positif.

Si l'on pose

$$y = ze^{\mu x},$$

μ étant l'une des racines carrées de l'unité, l'équation (2) devient

$$x\left(\frac{d^2z}{dx^2} + 2\mu\frac{dz}{dx}\right) - 2n\left(\frac{dz}{dx} + \mu z\right) = 0. \tag{3}$$

Intégrons cette équation par la méthode des coefficients indéterminés, et soit, s'il est possible,

$$z = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_px^p + a_{p+1}x^{p+1} + \ldots.$$

La substitution de cette valeur de z dans l'équation (3) fournit la relation suivante entre les coefficients a_{p+1} et a_p de deux termes consécutifs quelconques :

$$(p+1)(2n-p)a_{p+1} = -2\mu(n-p)a_p. \tag{4}$$

Cette relation fera connaître les rapports des coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_n$ au premier a_0, lequel est tout à fait arbitraire; elle montre, en outre, que les coefficients $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{2n-1}$ sont nuls, et que le suivant a_{2n} est arbitraire; elle donnera enfin les rapports de tous les autres à ce dernier.

Il résulte de là que, n étant entier, l'intégrale complète de l'équation (3) sera

$$\begin{aligned} z = {} & \frac{A}{a_0}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n) \\ & + \frac{A'}{a_{2n}}(a_{2n}x^{2n} + a_{2n+1}x^{2n+1} + \ldots), \end{aligned}$$

A et A' étant deux constantes arbitraires, et $\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \ldots$ des constantes déterminées et déduites de l'équation (4). La première partie de cette valeur de z est seule composée d'un nombre limité de termes.

On voit enfin que l'on obtiendra une intégrale particulière de l'équation (2) en posant

$$y = \frac{A}{a_0} e^{\mu x} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n),$$

formule dans laquelle μ a l'une des valeurs $+1$ ou -1.

L'intégrale générale sera donc

$$\begin{aligned} y = & \frac{A}{a_0} e^{-x}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n) \\ & + \frac{B}{a_0} e^{x}(a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - \ldots \pm a_n x^n), \end{aligned}$$

A et B étant deux constantes arbitraires et les rapports $\frac{a_1}{a_0}$, $\frac{a_2}{a_0}$, ... devant satisfaire l'équation générale

$$\frac{a_{p+1}}{a_p} = 2 \frac{n-p}{(p+1)(2n-p)}.$$

On déduit aisément de là la valeur du terme général $\frac{a_p}{a_0}$, savoir,

$$\frac{a_p}{a_0} = \frac{2^p}{1.2.3\ldots p} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{2n.(2n-1)(2n-2)\ldots(2n-p+1)};$$

ou, en représentant par $\Gamma(q)$ le produit des $(q-1)$ premiers nombres entiers,

$$\frac{a_p}{a_0} = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(2n)} 2^p \frac{\Gamma(2n-p+1)}{\Gamma(n-p+1)\,\Gamma(p+1)}.$$

On aura ainsi pour l'intégrale complète de l'équation (2),

$$\begin{aligned} y = & A e^{-x} \sum_0^n \frac{\Gamma(2n-p+1)}{\Gamma(n-p+1)\,\Gamma(p+1)} (2x)^p \\ & + B e^{x} \sum_0^n \frac{\Gamma(2n-p+1)}{\Gamma(n-p+1)\,\Gamma(p+1)} (-2x)^p, \end{aligned}$$

en mettant simplement A et B au lieu de $\frac{A\Gamma(n)}{\Gamma(2n)}$, $\frac{B\Gamma(n)}{\Gamma(2n)}$.

Il est aisé de déduire de là la valeur de $\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+1}} d\alpha$, mais je ne m'arrêterai pas à cette recherche, ayant voulu seulement faire voir que cette intégrale ne dépendait que de l'intégration d'une équation différentielle linéaire du deuxième ordre.

IV.

La méthode qui vient d'être exposée revient, en dernière analyse, à intégrer l'équation (2) supposée dépourvue du terme en $\frac{dy}{dx}$, ce qui donne

$$y = Ce^{-x} + C'e^{x},$$

puis à faire varier les constantes C et C', de manière à obtenir l'intégrale complète de l'équation (2).

C'est cette même marche que je vais suivre dans la recherche de l'intégrale générale de l'équation (1), où je supposerai les constantes m et n quelconques. Pour tout ce qui concerne l'exposition des principes du calcul des différentielles à indices quelconques, on devra consulter les Mémoires de M. Liouville insérés dans le *Journal de l'École Polytechnique* et dans le Journal de M. Crelle; je me bornerai ici à rappeler la définition de ces différentielles.

Si y désigne une fonction de x développable en série d'exponentielles réelles ou imaginaires, finies ou infiniment petites, et si $\sum Ae^{ax}$ représente ce développement, en sorte qu'on ait

$$y = \sum Ae^{ax},$$

nous appellerons, avec M. Liouville, dérivée d'ordre p de la fonction y, la nouvelle fonction $\sum Aa^p e^{ax}$, qu'on déduit de la première en multipliant chaque terme par la puissance p du coefficient de x; ainsi, l'on aura

$$\frac{d^p y}{dx^p} = \sum Aa^p e^{ax},$$

quelle que soit la constante p, positive, négative, entière, fractionnaire, irrationnelle ou même imaginaire.

Quelquefois aussi, et surtout quand p est négatif, M. Liouville remplace la notation $\frac{d^p y}{dx^p}$ par $\int^{-p} y\, dx^{-p}$, qu'il appelle intégrale à indice $-p$ de la fonction y. Il est presque superflu d'ajouter que cette définition, dans le cas de p entier, rentre tout à fait dans celle qu'on donne en analyse, en sorte que les formules du nouveau calcul s'appliqueront sans difficulté aux dérivées ordinaires.

V.

Si l'on pose, comme précédemment,

$$y = ze^{\mu x},$$

l'équation (1) devient

$$\left(\frac{d^2 z}{dx^2} + 2\mu \frac{dz}{dx} + \mu^2 z\right) + \frac{2n}{x}\left(\frac{dz}{dx} + \mu z\right) - m^2 z = 0,$$

et en déterminant μ par l'équation $\mu^2 - m^2 = 0$,

$$(5) \qquad x\left(\frac{d^2 z}{dx^2} + 2\mu \frac{dz}{dx}\right) + 2n\left(\frac{dz}{dx} + \mu z\right) = 0.$$

Il est clair qu'il suffira de connaître une intégrale particulière de l'équation (5) pour obtenir l'intégrale générale de l'équation (1) [*].

Si l'on pose

$$z = \frac{d^p \theta}{dx^p},$$

p étant une quantité quelconque à laquelle nous attribuerons plus tard une valeur particulière, l'équation (5) devient

$$(6) \qquad x\frac{d^{p+2}\theta}{dx^{p+2}} + 2\mu x \frac{d^{p+1}\theta}{dx^{p+1}} + 2n \frac{d^{p+1}\theta}{dx^{p+1}} + 2\mu n \frac{d^p \theta}{dx^p} = 0.$$

---

[*] En réalité, l'équation (5), en adoptant les deux valeurs de μ, donne lieu à deux équations différentielles distinctes, et il est nécessaire de connaître une intégrale particulière de chacune de ces équations.

Pour avoir l'intégrale à indice λ du premier membre de cette équation, nous nous servirons de la formule suivante, qui sert à intégrer le produit de deux facteurs [*] :

$$\int^{\lambda} \varphi\varphi_1\, dx^{\lambda} = \varphi_1 \int^{\lambda} \varphi dx^{\lambda} - \frac{\lambda}{1}\frac{d\varphi_1}{dx}\int^{\lambda+1} \varphi\, dx^{\lambda+1} + \frac{\lambda(\lambda+1)}{1.2}\frac{d^2\varphi_1}{dx^2}\int^{\lambda+2} \varphi\, dx^{\lambda+2} - \ldots.$$

On voit que le nombre des termes du second membre sera limité toutes les fois que φ_1 sera une fonction rationnelle et entière.

On aura donc

$$\int^{p+1} x\frac{d^{p+2}\theta}{dx^{p+2}}\, dx^{p+2} = x\frac{d\theta}{dx} - (p+1)\theta,$$

$$\int^{p+1} x\frac{d^{p+1}\theta}{dx^{p+1}}\, dx^{p+1} = x\theta - (p+1)\int\theta\, dx.$$

D'après cela, l'intégrale à indice $(p+1)$ du premier membre de l'équation (6) sera

$$x\frac{d\theta}{dx} + 2\mu x\theta + (2n - p - 1)\theta + 2\mu(n-p-1)\int\theta dx.$$

Si donc on désigne par ψ la fonction la plus générale qui satisfait à l'équation

$$\frac{d^{p+1}\psi}{dx^{p+1}} = 0,$$

on aura

$$x\frac{d\theta}{dx} + 2\mu x\theta + (2n - p - 1)\theta + 2\mu(n-p-1)\int\theta dx = \psi;$$

si l'on pose maintenant $p = n - 1$, le terme $\int\theta\, dx$ disparaîtra, et l'équation en θ, réduite au premier ordre, deviendra

$$x\frac{d\theta}{dx} + (2\mu x + n)\theta = \psi: \tag{7}$$

la fonction ψ satisfait à l'équation

$$\frac{d^n\psi}{dx^n} = 0,$$

[*] *Journal de l'École Polytechnique*, XXI^e cahier, p. 166.

et la valeur de z sera donnée en même temps que celle de θ, au moyen de la formule

$$z = \frac{d^{n-1}\theta}{dx^{n-1}}.$$

La fonction complémentaire ψ est nulle si n est entier et négatif; elle renferme n constantes arbitraires si n est entier et positif; dans tout autre cas elle en renferme un nombre arbitraire, mais limité : au surplus, nous n'avons pas à nous occuper ici de cette question.

La supposition de ψ nul dans l'équation (7) ne fera qu'altérer la généralité de la valeur de θ, mais cela importe peu, puisque nous n'avons besoin que d'une valeur particulière de z.

Si donc on fait $\psi = 0$, l'équation (7) devient

(8) $$x\frac{d\theta}{dx} + (2\mu x + n)\theta = 0,$$

ou

$$\frac{d\theta}{\theta} + \left(2\mu + \frac{n}{x}\right)dx = 0,$$

d'où

$$\theta = \mathrm{A}e^{-2\mu x}x^{-n},$$

A désignant une constante arbitraire.

On aura donc une intégrale particulière de l'équation (5) en posant

(9) $$z = \mathrm{A}\frac{d^{n-1}(e^{-2\mu x}x^{-n})}{dx^{n-1}}.$$

VI.

L'intégrale de l'équation (8) fait connaître immédiatement celle de l'équation (7) par la méthode de la variation des constantes; on trouve ainsi que la valeur la plus générale de θ qui satisfait à l'équation (7) ou à l'équation (6) est

(10) $$\theta = \mathrm{A}e^{-2\mu x}x^{-n} - e^{-2\mu x}x^{-n}\int e^{2\mu x}x^{n-1}\psi dx,$$

ψ étant, comme nous l'avons dit, la fonction la plus générale qui satisfait à l'équation

$$\frac{d^n\psi}{dx^n} = 0;$$

si n est un nombre entier, la fonction ψ renferme n constantes arbitraires, et l'équation (10) donne pour θ une expression renfermant $n+1$ constantes arbitraires, comme cela doit être.

VII.

Il résulte de ce qui précède qu'on satisfera à l'équation (1) en posant

$$(11) \qquad y = \mathrm{A}e^{\mu x} \frac{d^{n-1}(e^{-2\mu x} x^{-n})}{dx^{n-1}},$$

μ étant l'une des racines de l'équation

$$\mu^2 - m^2 = 0;$$

l'intégrale générale sera donc

$$(12) \qquad y = \mathrm{A}\, e^{mx} \frac{d^{n-1}(e^{-2mx} x^{-n})}{dx^{n-1}} + \mathrm{B}e^{-mx} \frac{d^{n-1}(e^{2mx} x^{-n})}{dx^{n-1}},$$

A et B désignant deux constantes arbitraires.

Telle est la forme simple et remarquable sous laquelle se présente la valeur générale de y, valeur que l'on pourra aisément calculer toutes les fois que n sera un nombre entier, mais qu'il importe de savoir transformer.

Nous allons examiner successivement les deux cas bien distincts qui peuvent se présenter.

VIII.

Supposons n positif ou de la forme $\alpha + 6\sqrt{-1}$, α étant positif.

On a

$$x^{-n} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty e^{-ux} u^{n-1} du,$$

$\Gamma(n)$ désignant, suivant l'habitude, l'intégrale eulérienne de seconde espèce

$$\int_0^\infty e^{-u} u^{n-1} du.$$

D'après cela, l'équation (11) devient, en mettant simplement A au lieu de $\frac{A}{\Gamma(n)}$,

$$y = A e^{\mu x} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \int_0^{\infty} e^{-(u+2\mu)x} u^{n-1}\, du;$$

or

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \int_0^{\infty} e^{-(u+2\mu)x} u^{n-1}\, du$$
$$= (-1)^{n-1} \int_0^{\infty} e^{-(u+2\mu)x} u^{n-1} (u + 2\mu)^{n-1}\, du,$$

donc

$$(13) \qquad y = A e^{-\mu x} \int_0^{\infty} e^{-xu} u^{n-1} (u + 2\mu)^{n-1} du.$$

Telle est l'équation qui, dans le cas de n positif, remplacera l'équation (11).

On en déduit, pour l'intégrale générale de l'équation (1),

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} y = {} & A e^{-mx} \int_0^{\infty} e^{-xu} u^{n-1} (u + 2m)^{n-1} du \\ & + B e^{mx} \int_0^{\infty} e^{-xu} u^{n-1} (u - 2m)^{n-1} du. \end{aligned} \right.$$

Si, par exemple, $n = 1$, on a

$$y = \frac{A e^{-mx} + B e^{mx}}{x};$$

si $n = 2$,

$$y = A e^{-mx} \left(\frac{1}{x^3} + \frac{m}{x^2}\right) + B e^{mx} \left(\frac{1}{x^3} - \frac{m}{x^2}\right),$$

valeurs qu'on peut aisément vérifier.

On voit en général que la valeur de y s'obtiendra sous forme finie si n est un nombre entier, et que dans aucun cas les intégrales définies de l'équation (14) ne deviendront infinies.

On peut aisément vérifier à posteriori l'exactitude des résultats auxquels nous sommes parvenus.

En effet, si l'on pose

$$y = \int_{u_0}^{u_1} e^{-(\mu+u)x} u^{n-1} (u + 2\mu)^{n-1} du.$$

u_0 et u_1 étant indépendants de x, et qu'on porte cette valeur dans l'équation (1), le résultat de la substitution donne

$$e^{-(\mu+u_1)x}u_1^n(u_1+2\mu)^n - e^{-(\mu+u_0)x}u_0^n(u_0+2\mu)^n = 0,$$

équation qui sera satisfaite si l'on fait

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_1 = \infty.$$

On satisfera encore à l'équation précédente en posant

$$u_0 = 0, \quad u_1 + 2\mu = 0,$$

ou bien

$$u_0 + 2\mu = 0, \quad \text{et} \quad u_1 = \infty;$$

en sorte qu'on pourra prendre pour valeur générale de y,

$$(15) \qquad \begin{cases} y = Ae^{-mx}\displaystyle\int_0^\infty e^{-xu}u^{n-1}(2m+u)^{n-1}du \\ \quad + Be^{mx}\displaystyle\int_0^{2m} e^{-xu}u^{n-1}(2m-u)^{n-1}du, \end{cases}$$

expression qui sera souvent plus commode que celle fournie par l'équation (14), et qui, du reste, peut être aisément déduite de cette dernière.

Il est clair que l'équation (14) subsiste quelle que soit la constante m réelle ou imaginaire.

IX.

Avant d'examiner le cas de n négatif, il est nécesaire de rappeler une formule importante due à M. Liouville [*], qui sert à transformer en intégrale définie, une intégrale à indice positif ou de la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, α étant positif.

Cette formule est la suivante :

$$(16) \qquad \int^p \varphi(x)dx^p = \frac{1}{(-1)^p\Gamma(p)}\int_0^\infty \varphi(x+u)u^{p-1}du.$$

[*] *Journal de l'École Polytechnique*, XXI^e cahier, p. 8.

L'exactitude de cette formule exige que la fonction $\varphi(x)$ s'annule pour $x = \infty$, ou, en d'autres termes, que le développement de $\varphi(x)$ en série d'exponentielles $\sum A_a e^{ax}$ ne renferme que des exposants négatifs ou de la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, α étant une quantité négative.

Il existe toutefois une formule analogue à la précédente et qui donne le moyen de transformer $\int^p \varphi(x)dx^p$, lorsque la fonction $\varphi(x)$ s'annule pour $x = -\infty$, ou que son développement en série d'exponentielles ne renferme que des exposants positifs ou de la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, α étant une quantité positive.

Supposons en effet a de cette forme dans l'équation

$$\varphi(x) = \sum A_a e^{ax},$$

et soit

$$X = \int_0^\infty \varphi(x-u)u^{p-1}du;$$

on aura

$$X = \int_0^\infty \sum A_a e^{a(x-u)} u^{p-1}\, du,$$

ou, en intégrant sous le signe $\sum$,

$$X = \sum A_a e^{ax} \int_0^\infty e^{-au} u^{p-1}\, du.$$

Or, la partie réelle de a étant positive, on a

$$\int_0^\infty e^{-au}u^{p-1}du = \frac{\Gamma(p)}{a^p};$$

donc

$$X = \Gamma(p)\sum \frac{A_a e^{ax}}{a^p} = \Gamma(p)\int^p \varphi(x)dx^p;$$

et, en remettant au lieu de X sa valeur,

$$\int^p \varphi(x)dx^p = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^\infty \varphi(x-u)u^{p-1}\,du. \tag{17}$$

Cette démonstration est semblable à celle que M. Liouville a donnée de l'équation (16).

Il ne faut pas oublier que les formules (16) et (17) n'ont lieu, la première, que si $\varphi(\infty) = 0$, et la deuxième, que si $\varphi(-\infty) = 0$.

X.

Examinons maintenant la forme de l'intégrale générale de l'équation (1) quand n est négatif, ou de la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, α étant négatif. Si l'on change n en $-n$, les équations (1) et (11) deviennent

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{2n}{x}\frac{dy}{dx} - m^2 y = 0, \tag{1 bis}$$

$$y = Ae^{\mu x}\int^{n+1} e^{-2\mu x} x^n dx^{n+1}. \tag{11 bis}$$

L'équation (11 *bis*) fait connaître deux intégrales particulières de l'équation (1 *bis*) correspondantes aux deux valeurs de μ, et par suite l'intégrale générale.

Si donc on remplace μ successivement par $+m$ et $-m$ dans l'équation (11 *bis*), on aura pour l'intégrale générale de l'équation (1 *bis*),

$$y = Ae^{mx}\int^{n+1} e^{-2mx} x^n\, dx^{n+1} + Be^{-mx}\int^{n+1} e^{2mx} x^n\, dx^{n+1}, \tag{18}$$

A et B désignant deux constantes arbitraires.

Si m est réel ou de la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, α n'étant pas nul, on aura, en vertu des formules (16) et (17),

$$\int^{n+1} e^{-2mx} x^n dx^{n+1} = \frac{1}{(-1)^{n+1}\Gamma(n+1)}\int_0^\infty e^{-2m(x+u)}(x+u)^n u^n\, du,$$

$$\int^{n+1} e^{2mx} x^n dx^{n+1} = \frac{1}{\Gamma(n+1)}\int_0^\infty e^{2m(x-u)}(x-u)^n u^n\, du,$$

et l'équation (18) devient, en mettant simplement A et B au lieu de $\frac{A}{(-1)^{n+1}\Gamma(n+1)}$, $\frac{B}{\Gamma(n+1)}$,

$$\left\{\begin{aligned} y &= Ae^{-mx}\int_0^\infty e^{-2mu}(x+u)^n u^n\, du \\ &\quad + Be^{mx}\int_0^\infty e^{-2mu}(x-u)^n u^n\, du. \end{aligned}\right. \tag{19}$$

Telle est l'intégrale complète de l'équation (1 *bis*) dans le cas de n positif ou de la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, α étant positif.

Les deux intégrales définies qui y entrent, ne deviendront jamais infinies, même si m était de la forme $\beta\sqrt{-1}$; mais il est évident que, dans ce cas, les formules (16) et (17) cessent d'avoir lieu, et l'équation (19) ne représente plus l'intégrale générale de l'équation (1 *bis*).

Si $n = 1$, on trouve

$$y = \mathrm{A}\,e^{-mx}(mx + 1) + \mathrm{B}\,e^{mx}(mx - 1);$$

si $n = 2$,

$$y = \mathrm{A}\,e^{-mx}(m^2x^2 + 3mx + 3) + \mathrm{B}e^{-mx}(m^2x^2 - 3mx + 3),$$

valeurs qu'il est aisé de vérifier.

En général, on voit que la valeur de y s'obtiendra sous forme finie toutes les fois que n sera un nombre entier.

La substitution dans l'équation (1 *bis*) de la valeur de y, fournie par l'équation (13), s'effectue très-simplement; mais le résultat de cette substitution n'est nul, ainsi que nous l'avions prévu, que si m est réel ou au moins de la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, α n'étant pas nul.

Ce dernier cas ne saurait offrir aucune difficulté, et on le ramène au précédent; effectivement, si l'on change m en $m\sqrt{-1}$, l'équation (1 *bis*) devient

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2n}{x}\frac{dy}{dx} + m^2y = 0, \tag{1 ter}$$

dans laquelle m est une quantité réelle.

Or, si dans cette dernière on change x en $x\sqrt{-1}$, on retombe précisément sur l'équation (1 *bis*); on obtiendra donc l'intégrale de l'équation (1 *ter*) en changeant x en $x\sqrt{-1}$ dans l'équation (19). On aura ainsi

$$\left\{\begin{aligned} y &= \mathrm{A}\,e^{-mx\sqrt{-1}}\int_0^\infty e^{-2mu}\,(x\sqrt{-1} + u)^n\,u^n\,du \\ &\quad + \mathrm{B}\,e^{mx\sqrt{-1}}\int_0^\infty e^{-2mu}\,(x\sqrt{-1} - u)^n\,u^n\,du, \end{aligned}\right. \tag{20}$$

résultat qui, comme les précédents, est très-facile à vérifier à posteriori.

XI.

Nous avons déduit de l'équation (12), qui exprime dans tous les cas l'intégrale générale de l'équation (1), deux autres formes de cette intégrale générale, évaluées au moyen d'intégrales définies, facilement exprimables à l'aide des transcendantes eulériennes, et qui ont l'avantage de ne jamais devenir infinies. Toutefois, ainsi que nous l'avons déjà dit, si $n = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, la première exige que α soit positif, et la seconde qu'il soit négatif.

Ces deux cas, que nous avons examinés séparément, et que nous avons traités par des méthodes différentes, peuvent aisément se ramener l'un à l'autre, en sorte que l'intégrale de l'équation (1) étant connue dans l'un de ces cas, on la connaîtra aussi dans le second.

Soit

$$y = \mathrm{F}(n, x)$$

l'intégrale générale de l'équation (1), dans laquelle on suppose n tout à fait quelconque; si l'on change n en $-n$, on retombera sur l'équation (1 *bis*), dont l'intégrale générale sera

$$y = \mathrm{F}(-n, x);$$

or, il est facile de voir quel changement éprouve la fonction F, quand on y change n en $-n$; si, en effet, on pose

$$y = x^{2n+1} z,$$

l'équation (1 *bis*) devient

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{2(n+1)}{x}\frac{dz}{dx} - m^2 z = 0,$$

dont l'intégrale générale sera

$$z = \mathrm{F}[(n+1), x].$$

L'intégrale générale de l'équation (1 *bis*) sera donc

$$y = x^{2n+1}\,\mathrm{F}[(n+1), x].$$

Il est évident que l'équation

$$F(-n, x) = x^{2n+1} F[(n+1), x]$$

a lieu, que F soit ou non l'intégrale générale de l'équation (1); si donc on prend

$$F(-n, x) = A e^{\mu x} \int^{n+1} e^{-2\mu x} x^n dx^{n+1}.$$

$$F(n+1, x) = A' e^{\mu x} \frac{d^n (e^{-2\mu x} x^{-n-1})}{dx^n},$$

on aura cette formule remarquable, au moyen de laquelle une intégrale se trouve exprimée par une différentielle,

$$\int^{n+1} e^{-2\mu x} x^n dx^{n+1} = C x^{2n+1} \frac{d^n (e^{-2\mu x} x^{-n-1})}{dx^n}.$$

La constante C se détermine aisément; on trouve

$$C = \left(\frac{-1}{2\mu}\right)^{2n+1}.$$

Si dans l'équation précédente on fait $e^{-2\mu x} = X$, elle devient

$$\frac{1}{x^{2n+1}} \int^{n+1} X x^n dx^{n+1} = \frac{d^n}{dx^n} \cdot \frac{1}{x^{n+1}} \int^{2n+1} X dx^{2n+1},$$

et cette formule a évidemment lieu quelle que soit la fonction X.

On peut renfermer dans un même type les intégrales de toutes les équations différentielles (1) quand n varie.

Si, en effet, on pose

$$C = A \frac{d^{n-1} (e^{2mx} x^{-n})}{dx^{n-1}}, \quad C' = B \frac{d^{n-1} (e^{-2mx} x^{-n})}{dx^{n-1}},$$

l'équation (12) deviendra

$$y = C e^{-mx} + C' e^{mx}.$$

XII.

Dans le cas de $m = 1$, on satisfait à l'équation (1 *bis*) en posant

$$y = \int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{(1+\alpha^2)^{n-1}} d\alpha;$$

et, comme cette valeur de y ne peut croître indéfiniment avec x, on aura évidemment, en ayant égard à l'équation (19),

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+1}}\, d\alpha = A e^{-x} \int_0^{\infty} e^{-2u}(x+u)^n u^n\, du.$$

Pour déterminer A, soit $x = 0$, on aura

$$\int_0^{\infty} \frac{d\alpha}{(1+\alpha^2)^{n+1}} = A \int_0^{\infty} e^{-2u} u^{2n} du,$$

d'où

$$A = \frac{\pi}{[\Gamma(n+1)]^2};$$

donc

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+1}} d\alpha = \frac{\pi e^{-x}}{[\Gamma(n+1)]^2} \int_0^{\infty} e^{-2u}(x+u)^n u^n du,$$

formule que j'ai démontrée directement [*].

XIII.

Les résultats qui précèdent et ceux que M. Liouville, et après lui d'autres géomètres, ont obtenus [**], montrent clairement, non-seulement l'utilité, mais encore la nécessité incontestable de l'intervention du calcul des différentielles à indices quelconques dans une multitude de questions d'analyse et de physique mathématique. Et, en effet, une équation différentielle étant donnée, la fonction qui doit lui satisfaire est, en général, une fonction continue, non-seulement de la variable indépendante, mais aussi des paramètres qui entrent dans l'équation différentielle. D'ailleurs ces paramètres peuvent entrer dans l'équation intégrale comme indices de différentiation. Si l'on veut se borner au cas particulier où ils sont entiers et positifs, on détruit la généralité des formules en renonçant gratuitement à la continuité qu'elles présentent d'elles-mêmes.

Nous citerons un exemple célèbre à l'appui de cette assertion.

---

[*] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. VIII, p. 20.

[**] Plusieurs géomètres se sont occupés, dans ces derniers temps, des applications du calcul des différentielles à indices quelconques. Nous citerons en particulier les travaux de MM. Svanberg, Kummer et Jurgensen, publiés à Berlin, par M. Crelle.

XIV.

Si l'on développe la fonction $(1 - 2rx + r^2)^{-\frac{1}{2}}$, suivant les puissances entières et positives de r, le coefficient X_n de r^n sera une fonction rationnelle et entière de x, qui satisfait, comme on sait, à l'équation différentielle

$$(21) \qquad (1 - x^2)\frac{d^2y}{d^2x} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0.$$

D'après cela, n étant entier, on sait encore, et il est facile de le vérifier, que l'intégrale générale de l'équation précédente sera

$$y = X_n\left[A + B\int\frac{dx}{(1-x^2)X_n^2}\right]:$$

cette valeur de y suppose nécessairement n entier et positif, mais la forme que M. Rodrigues a donnée de l'intégrale complète de l'équation (21) est tout à fait à l'abri de cette particularisation [*].

Si l'on pose

$$y = \frac{d^p\theta}{dx^p},$$

l'équation (21) devient

$$(1 - x^2)\frac{d^{p+2}\theta}{dx^{p+2}} - 2x\frac{d^p\theta}{dx^p} + n(n+1)\frac{d^p\theta}{dx^p} = 0,$$

et, en prenant l'intégrale de l'ordre $(p+1)$,

$$(1 - x^2)\frac{d\theta}{dx} + 2px\theta + [p(p+1) - n(n+1)]\int\theta\, dx = \psi,$$

la fonction ψ devant satisfaire à l'équation

$$\frac{d^p\psi}{dx^p} = 0.$$

Si l'on pose

$$p(p+1) - n(n+1) = 0,$$

[*] L'équation (21) rentre dans la classe d'équations que M. Liouville a étudiée, XXI^e cahier du *Journal de l'École Polytechnique*.

on a, en négligeant la fonction ψ,

$$(1 - x^2)\frac{d\theta}{dx} + 2px\theta = 0,$$

d'où

$$\theta = A(1 - x^2)^p,$$

et par suite

$$y = A\frac{d^p.(1 - x^2)^p}{dx^p}.$$

Or les deux valeurs de p sont $p = n$ et $p = -(n+1)$; l'intégrale générale de l'équation (21) sera donc

$$y = A\frac{d^n.(1 - x^2)^n}{dx^n} + B\int^{n+1}\frac{dx^{n+1}}{(1 - x^2)^{n+1}}. \tag{22}$$

Telle est la formule donnée par M. Rodrigues; elle constitue, dans tous les cas, l'intégrale générale de l'équation (21); si n est entier, la première partie ne diffère de X_n que par un coefficient constant.

On pourrait arriver à l'intégrale complète (22), si l'on connaissait l'une des intégrales particulières de l'équation (21). Soit, en effet,

$$y = A\frac{d^n(1 - x^2)^n}{dx^n}.$$

Si l'on change n en $-n$ dans cette équation ainsi que dans l'équation (21), on aura

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + (n-1)ny = 0,$$

équation qui sera satisfaite par

$$y = A\int^n\frac{dx^n}{(1 - x^2)^n};$$

on satisfera donc à l'équation (21) en posant

$$y = A\int^{n+1}\frac{dx^{n+1}}{(1 - x^2)^{n+1}},$$

ce qu'il fallait démontrer.

XV.

Les résultats qui précèdent sont parfaitement connus, et je ne les ai rappelés que pour montrer l'heureuse intervention du nouveau calcul dans un genre de questions qui ont si vivement préoccupé nos plus illustres géomètres. On sait, en effet, que les fonctions X_n, dont nous venons de parler, ne sont qu'un cas particulier des fonctions Y_n de Laplace, fonctions sur lesquelles repose entièrement la théorie des attractions et qui jouent un si grand rôle dans la *Mécanique céleste*.

Dans un grand nombre de cas les difficultés qu'on rencontre dans les applications du calcul des différentielles à indices quelconques, se réduisent à trouver les développements des fonctions en séries d'exponentielles. Il ne peut exister à cet égard de règle générale; quelquefois il sera nécessaire d'introduire des intégrales définies multiples : nous allons en trouver un exemple dans la transformation des intégrales particulières de l'équation (21).

XVI.

Si x est > 1, on a

$$\frac{1}{(x-1)^{n+1}} = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_0^\infty e^{-\theta(x-1)} \theta^n \, d\theta,$$

$$\frac{1}{(x+1)^{n+1}} = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_0^\infty e^{-\varphi(x+1)} \varphi^n \, d\varphi,$$

d'où

$$\frac{1}{(1-x^2)^{n+1}} = \frac{1}{(-1)^{n+1}\Gamma^2(n+1)} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{(\theta-\varphi)} \theta^n \varphi^n \, d\theta \, d\varphi \, e^{-(\theta+\varphi)x};$$

on aura donc, en vertu de la définition des différentielles à indices quelconques,

$$\int^{n+1} \frac{dx^{n+1}}{(1-x^2)^{n+1}} = \frac{1}{(-1)^{2n+2}\Gamma^2(n+1)} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{(\theta-\varphi)} \theta^n \varphi^n \, d\theta \, d\varphi \frac{e^{-(\theta+\varphi)x}}{(\theta+\varphi)^{n+1}};$$

et si l'on pose

$$\theta = \varphi \operatorname{tang}^2 \frac{\omega}{2}, \quad \text{d'où} \quad d\theta = \varphi \operatorname{tang} \frac{\omega}{2} \frac{d\omega}{\cos^2 \frac{\omega}{2}},$$

cette équation devient

$$\int^{n+1} \frac{dx^{n+1}}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{1}{(-1)^{2n+2}\Gamma^2(n+1)} \int_0^\pi \sin^{2n+1} \frac{\omega}{2} \frac{d\omega}{\cos \frac{\omega}{2}} \int_0^\infty e^{-\varphi \frac{x+\cos\omega}{\cos^2 \frac{\omega}{2}}} \varphi^n \, d\varphi.$$

D'ailleurs l'intégrale définie relative à φ a pour valeur

$$\Gamma(n+1)\frac{\cos^{2n+2}\frac{\omega}{2}}{(x+\cos\omega)^{n+1}},$$

et l'on aura, toute réduction faite,

$$\int^{n+1}\frac{dx^{n+1}}{(1-x^2)^{n+1}} = \frac{-1}{(-2)^{2n+1}\Gamma(n+1)}\int_0^\pi \frac{\sin^{2n+1}\omega}{(x+\cos\omega)^{n+1}}\,d\omega.$$

Mais cette formule ne peut donner que les valeurs de $\int^{n+1}\frac{dx^{n+1}}{(1-x^2)^{n+1}}$ qui correspondent aux valeurs de x plus grandes que 1. On eût obtenu une formule applicable à tous les cas en employant un développement différent pour la fonction $\frac{1}{(1-x^2)^{n+1}}$.

Si, par exemple, on prend

$$\frac{1}{(1+x)^{n+1}} = \frac{1}{\Gamma(n+1)}\int_0^\infty e^{-\theta(1+x)}\,\theta^n\,d\theta,$$

$$\frac{1}{(1-x)^{n+1}} = \frac{(-\sqrt{-1})^{n+1}}{\Gamma(n+1)}\int_0^\infty e^{\varphi(1-x)\sqrt{-1}}\,\varphi^n d\varphi,$$

d'où

$$\frac{1}{(1-x^2)^{n+1}} = \frac{(-\sqrt{-1})^{n+1}}{\Gamma^2(n+1)}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\theta-\varphi\sqrt{-1})}\,\theta^n\,\varphi^n\,d\theta\,d\varphi\,e^{-x(\theta+\varphi\sqrt{-1})},$$

et qu'on opère sur ce développement exponentiel, comme nous l'avons fait précédemment, on trouvera sans difficulté

$$\int^{n+1}\frac{dx^{n+1}}{(1-x^2)^{n+1}} = \frac{(\sqrt{-1})^{n+1}}{2^{n+1}\Gamma(n+1)}\int_0^\pi \frac{\sin^n\omega\,d\omega}{\left(1+xe^{\omega\sqrt{-1}}\right)^n},$$

formule qui fera connaître la valeur de $\int^{n+1}\frac{dx^{n+1}}{(1-x^2)^{n+1}}$ correspondante à une valeur quelconque de x.

XVII.

Dans bien des cas la transformation des différentielles à indices quelconques, en intégrales définies, exige des calculs fort longs; mais il arrive souvent que cette transformation, effectuée dans l'hypothèse particulière où les indices sont entiers, conduit à des résultats exacts dans tous les cas.

Quand cette particularisation momentanée doit apporter des simplifications notables, on devra toujours s'y soumettre, sauf ensuite à discuter la généralité des résultats obtenus.

L'application de ce qui précède conduit immédiatement à la valeur générale de la seconde des intégrales particulières de l'équation (21).

n étant un nombre entier, on a, par la formule du binôme,

$$(x^2 - 1)^n = \sum \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-p+1)\Gamma(p+1)}(-1)^p x^{2n-2p},$$

d'où

$$\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} = \sum \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2n-2p+1)}{\Gamma(n-p+1)\Gamma(p+1)\Gamma(n-2p+1)}(-1)^p x^{n-2p}.$$

D'ailleurs

$$\frac{\Gamma(2n-2p+1)}{\Gamma(n-p+1)\Gamma(p+1)} = \frac{2^{2n+1}}{\pi}\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(2p+1)}\int_0^\infty \frac{\theta^{2p}d\theta}{(1+\theta^2)^{n+1}},$$

donc

$$\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} = \frac{2^{2n+1}\Gamma(n+1)}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\theta}{(1+\theta^2)^{n+1}}\sum \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(2p+1)\Gamma(n-2p+1)} x^{n-2p}(\theta\sqrt{-1})^{2p};$$

mais l'expression

$$\sum \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(2p+1)\Gamma(n-2p+1)} x^{n-2p}(\theta\sqrt{-1})^{2p} = \sum \frac{n(n-1)\ldots(n-2p+1)}{1.2.3\ldots 2p} x^{n-2p}(\theta\sqrt{-1})^{2p}$$

n'est autre que la partie réelle de $(x \pm \theta\sqrt{-1})^n$; on aura donc

$$\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} = \frac{2^{2n}\Gamma(n+1)}{\pi}\int_0^\infty \frac{(x+\theta\sqrt{-1})^n + (x-\theta\sqrt{-1})^n}{(1+\theta^2)^{n+1}}d\theta.$$

et il est très-facile de s'assurer que l'équation (21) est satisfaite, quel que soit n, en posant

$$y = A\int_0^\infty \frac{(x+\theta\sqrt{-1})^n + (x-\theta\sqrt{-1})^n}{(1+\theta^2)^{n+1}}d\theta \text{ [*]},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$y = Ax^{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n\omega\cos n\omega}{(\cos^2\omega + x^2\sin^2\omega)^{n+1}}d\omega.$$

---

[*] Cette formule a été donnée par M. Wantzel, dans le *Compte rendu des séances de l'Académie des Sciences*, tome XVII, page 1191.

XVIII.

Il résulte de ce qui précède que si n est positif, l'intégrale générale de l'équation (21) sera

$$y = \mathrm{A}x^{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n\omega \cos n\omega}{(\cos^2\omega + x^2\sin^2\omega)^{n+1}}\,d\omega + \mathrm{B}\int_0^{\pi} \frac{\sin^{2n+1}\omega}{(x+\cos\omega)^{n+1}}\,d\omega;$$

seulement, ainsi que je l'ai dit, la seconde de ces intégrales ne peut subsister que pour les valeurs de x supérieures à 1.

La forme de cette intégrale générale sera la même si n et $n+1$ sont négatifs, car le changement de n en $-n$ ou de n en $n-1$ produit le même changement dans l'équation (21).

Si n est négatif et $n+1$ positif, l'intégrale devient, en changeant le signe de n,

$$y = \mathrm{A}\int^n \frac{dx^n}{(1-x^2)^n} + \mathrm{B}\int^{1-n} \frac{dx^{1-n}}{(1-x^2)^{1-n}},$$

ou

$$y = \mathrm{A}\int_0^{\pi} \frac{\sin^{2n-1}\omega\, d\omega}{(x+\cos\omega)^n} + \mathrm{B}\int_0^{\pi} \frac{\sin^{1-2n}\omega}{(x+\cos\omega)^{1-n}}\,d\omega.$$

Ces deux intégrales deviennent identiques dans le cas particulier de $n=\frac{1}{2}$; mais en posant $1-2n=h$, et faisant tendre h vers 0, on déduit aisément de l'équation précédente la valeur suivante de y qui correspond à ce cas particulier,

$$y = \mathrm{A}\int_0^{\pi} \frac{d\omega}{\sqrt{x+\cos\omega}} + \mathrm{B}\int_0^{\pi} \frac{d\omega}{\sqrt{x+\cos\omega}}\, l\,\frac{\sin\omega}{\sqrt{x+\cos\omega}}.$$

Enfin, comme le paramètre $n(n+1)$ de l'équation (21) peut être réel pour des valeurs imaginaires de n, on est nécessairement conduit dans cette question à la considération des différentielles à indices imaginaires; les formules que nous avons données sont encore applicables dans ce cas, mais leur discussion présente peu d'intérêt.